

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.
26.06.2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.06 Основы функционального анализа

- 1. Шифр и наименование направления подготовки / специальности:** 01.03.04
прикладная математика
- 2. Профиль подготовки / специализации:** применение математических методов
к решению инженерных и экономических задач
- 3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр
- 4. Форма образования:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа
и операторных уравнений
- 6. Исполнители программы:** Бондарев Андрей Сергеевич, преподаватель, Сапро-
нова Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н, доцент, математический факультет, кафедра функ-
ционального анализа и операторных уравнений
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета, протокол №0500-06 от
26.06.2017
- 8. Учебный год:** 2018-2019 **Семестр(ы):** четвертый, пятый

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью курса является ознакомление студентов с основными понятиями и методами теории функциональных пространств и их отображений.

Задачами курса является изучение:

- 1) метрических пространств;
- 2) линейных нормированных пространств;
- 3) пространств со скалярным произведением;
- 4) простейших свойств отображений функциональных пространств;

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к математическому и естественнонаучному циклу и является обязательной дисциплиной данного цикла.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса «Основы функционального анализа»: Математический анализ.

Дисциплина «Основы функционального анализа» является необходимой для усвоения всех математических курсов, ибо терминология функционального анализа является языком современной математики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-1	готовность к самостоятельной работе	знать: основные понятия и определения функционального анализа
		уметь: доказывать основные теоремы функционального анализа, решать задачи по функциональному анализу
ОПК-2	способность использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования	владеть: основной терминологией функционального анализа, способность применять знания по функциональному анализу к решению теоретических и прикладных задач
		знать: современные математические методы и современные прикладные программные средства, использующиеся в решении задач функционального анализа
		уметь: выбрать метод и программное обеспечение для решения конкретной задачи
		владеть: навыками решения задач по функциональному анализу с помощью современных прикладных программных средств

ПК-9	ПК-9 – способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат	<p>знать: основные способы постановки задач, не укладываемых в рамки детерминированных конструкций</p> <p>уметь: решать задачи теоретического и прикладного характера в рамках курса</p> <p>владеть: пониманием основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с функциональных анализом</p>
ПК-10	готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач, способность применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных	<p>знать: основные теоретические основы функционального анализа</p> <p>уметь: использовать полученные фундаментальные знания при решении теоретических и практических задач</p> <p>владеть: навыками решения практических задач</p>
ПК-12	способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук.	<p>знать: основные средства поиска необходимой информации и способы ее качественного и быстрого освоения</p> <p>уметь: самостоятельно осваивать понятия и факты функционального анализа</p> <p>владеть: навыками практического использования самостоятельно полученных знаний</p>

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 6/216

Форма промежуточной аттестации: зачет, экзамен.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)			
	Всего	В том числе интерактивные часы	По семестрам	
			Семестр 4	Семестр 5
Аудиторные занятия	104		68	36
в том числе:				
лекции	50		34	16
практические	0			
лабораторные	50		34	16
Самостоятельная работа	80		40	40
Контроль	36			36
Итого:	216		108	108
Форма промежуточной аттестации	Контрольные работы, зачет, экзамен		2 Контрольные работы, зачёт	Контрольная работа, экзамен

13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1.	Метрические пространства	Метрика, сходимости, полнота, открытые и замкнутые множества, сепарабельность пространств, свойство компактности и вполне ограниченности множеств.
2.	Линейные нормированные пространства	Линейные пространства, норма, ряды в нормированных пространствах, эквивалентные нормы.
3.	Пространства со скалярным произведением	Скалярное произведение, свойство ортогональности, ряды Фурье.
4.	Отображения функциональных пространств	Непрерывность отображений, принцип сжимающих отображений, интегральные уравнения Фредгольма и Вольтера.

13.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Контроль	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Метрические пространства	16		16	16	48
2.	Линейные нормированные пространства	12		12	14	38
3.	Пространства со скалярным произведением	8	16	8	10	42
4.	Отображения функциональных пространств	14	20	14	40	88
Итого:		50	36	50	80	216

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении лабораторных занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на лабораторных занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. При изучении курса «Основы функционального анализа» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.
2. Перед лабораторным занятием обязательно повторить лекционный материал. После лабораторного занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем лабораторном занятии или в присутствующий час преподавателю.
3. При подготовке к лабораторным занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить лабораторные задачи.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2006 .— 570 с.
2.	Треногин, Владилен Александрович. Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям «Математика» и «Прикладная математика» / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с. : ил. — Библиогр.: с. 482-483 .

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3.	<i>Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – 589 с.</i>
4.	<i>Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Физматлит. – 2002. – 496 с.</i>
5.	<i>Антоневич А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ. – 2003. – 430 с.</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	Сборник заданий для лабораторных работ по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" : Для студ. 2 и 4 к. мат. фак. всех форм обучения / Воронеж. гос. ун-т. Каф. функцион. анализа и оператор. уравнений; Сост. В. В. Смагин.— Воронеж, 2001 .— 27 с.
2.	Треногин, Владилен Александрович. Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с. : ил. — Библиогр.: с. 482-483 .
3.	Линейные операторы и функционалы : пособие для студентов по специальности 010101 (010100) - Математика / Воронеж. гос. ун-т, Каф. функционал. анализа; сост. А.О. Рыченков .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2005 .— 27с.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Лекция с применением современных компьютерных технологий (лекция-презентация).

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Лекционная аудитория, аудитория для лабораторных, компьютер, мультимедийный проектор, доска (мел, маркеры).

19. Фонд оценочных средств:**19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения**

Код и содержание компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС (средства оценивания)

ОПК-1 готовность к самостоятельной работе	Знать: основные понятия и определения функционального анализа	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Устный опрос, практико-ориентированные задания
	уметь: доказывать основные теоремы функционального анализа, решать задачи по функциональному анализу	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Контрольная работа №1, контрольная работа №2, контрольная работа №3, практико-ориентированные задания
	владеть: основной терминологией функционального анализа, способность применять знания по функциональному анализу к решению теоретических и прикладных задач	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Контрольная работа №1, контрольная работа №2, контрольная работа №3, практико-ориентированные задания
ОПК-2 способность использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования	знать: современные математические методы и современные прикладные программные средства функционального анализа	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Практико-ориентированные задания
	Уметь: выбрать метод и программное обеспечение для решения конкретной задачи	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Практико-ориентированные задания
	Владеть: навыками решения задач по функциональному анализу с помощью современных прикладных программных средств	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Практико-ориентированные задания
ПК-9 способность выявлять естественную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовность использовать для их решения соответствующий естественно-научный аппарат	Знать: основные способы постановки задач, не укладывающихся в рамки детерминированных конструкций	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Устный опрос, практико-ориентированные задания
	Уметь: решать задачи теоретического и прикладного характера в рамках курса	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные	Контрольная работа №1, контрольная работа №2, контрольная

		пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	работа №3, практико-ориентированные задания
	Владеть: пониманием основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с функциональным анализом	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Устный опрос, практико-ориентированные задания
ПК-10 готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач, способность применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных	Знать: основные теоретические основы функционального анализа	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Устный опрос, практико-ориентированные задания
	Уметь: использовать полученные фундаментальные знания при решении теоретических и практических задач	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Контрольная работа №1, контрольная работа №2, контрольная работа №3, практико-ориентированные задания
	Владеть: навыками решения практических задач	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Контрольная работа №1, контрольная работа №2, контрольная работа №3, практико-ориентированные задания
ПК-12 способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук.	знать: основные средства поиска необходимой информации и способы ее качественного и быстрого освоения	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Практико-ориентированные задания, устный опрос
	уметь: самостоятельно осваивать понятия и факты функционального анализа	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Практико-ориентированные задания
	владеть: навыками практического использования самостоятельно полученных знаний	Разделы 1-4 Метрические пространства Линейные нормированные пространства Пространства со скалярным произведением Отображения функциональных пространств	Практико-ориентированные задания

Промежуточная аттестация	зачет, экзамен
--------------------------	----------------

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере использует фундаментальные знания в области математического анализа, функционального анализа и других дисциплин, способен к определению общих форм и закономерностей отдельной данной предметной области умеет строго доказать утверждения, формулировать результаты, быстро видит следствия полученного результата	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум-трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы, демонстрирует частичные знания,	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	<i>Неудовлетворительно</i>

Для оценивания результатов обучения на зачете используется – зачтено, не зачтено
Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере использует фундаментальные знания в области математического анализа, функционального анализа и других дисциплин, способен к определению общих форм и закономерностей отдельной данной предметной области умеет строго доказать утверждения, формулировать результаты, быстро видит следствия полученного результата	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Зачтено</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но	<i>Базовый уровень</i>	

обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы		
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум-трем из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы, демонстрирует частичные знания,	<i>Пороговый уровень</i>	
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	<i>Не зачтено</i>

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к зачету:

1. Множество, операции над множествами. Свойства двойственности.
2. Отображения, виды отображений. Отношение эквивалентности. Мощность множества.
3. Счетные множества. Свойства. Счетность множества рациональных чисел.
4. Несчетность отрезка $[0, 1]$. Множества мощности континуума.
5. Упорядоченные, частично упорядоченные и вполне упорядоченные множества. Примеры.
6. Неравенство Юнга (с выводом).
7. Неравенство Гельдера (с выводом).
8. Неравенство Минковского (с выводом).
9. Понятие метрического пространства. Дискретное пространство, пространства R_p^n , $1 \leq p \leq \infty$; $C[a, b]$.
10. Пространства $C_1[a, b]$, $M[a, b]$.
11. Пространства l_p , $1 \leq p < \infty$; s ; m .
12. Понятия замкнутого и открытого шаров, ограниченного множества в метрическом пространстве. Понятие сходящейся последовательности, свойства сходящихся последовательностей.
13. Сходимость в R_p^n , $1 \leq p \leq \infty$; $C[a, b]$.
14. Сходимость в s .
15. Понятия фундаментальной последовательности и полного метрического пространства. Полнота R_p^n , $1 \leq p \leq \infty$.
16. Полнота $C[a, b]$.
17. Полнота l_p , $1 \leq p < \infty$.
18. Неполнота $C_1[a, b]$.
19. Понятия точки прикосновения и замыкания множества. Теорема 1 (О свойствах операции замыкания).
20. Теорема 2 (Необходимое и достаточное условие для предельной точки). Понятия предельной и изолированной точек множества.
21. Понятие замкнутого множества. Примеры.
22. Теорема 3 (Об объединении и пересечении замкнутых множеств).
23. Понятия внутренней точки и внутренней множества. Теорема 5 (О свойствах внутренней и замыкания дополнения множества).
24. Теорема 4 (О свойствах внутренней множества).
25. Понятие открытого множества. Примеры.
26. Теорема 6 (О дополнениях открытого и замкнутого множеств).
27. Теорема 7 (объединении и пересечении открытых множеств).

28. Открытые и замкнутые множества на числовой прямой. Теоремы 8 (Об ограниченном открытом множестве на числовой прямой), 9 (Об ограниченном замкнутом множестве на числовой прямой).
29. Понятие подпространства метрического пространства. Теорема 10 (Критерий полноты подпространства).
30. Теорема 11 (О вложенных шарах).
31. Понятия плотного, всюду плотного, нигде не плотного множеств, изометрии. Теорема 12 (О пополнении метрического пространства).
32. Множества первой и второй категорий. Теорема 13 (Бэра).
33. Понятие сепарабельного пространства. Сепарабельность $R_p^n, 1 \leq p \leq \infty$.
34. Сепарабельность $C[a, b]$.
35. Сепарабельность s .
36. Сепарабельность $l_p, 1 \leq p < \infty$.
37. Несепарабельность $M[a, b]$.
38. Несепарабельность m .
39. Понятие непрерывного отображения, Липшецевого и равномерно непрерывного отображения.
40. Теорема 15 (О непрерывном прообразе открытого множества). Теорема 16. (О непрерывном прообразе замкнутого множества).
41. Понятие сжимающего отображения. Теорема 17 (Банаха).
42. Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.
43. Понятия компактного и относительно компактного множества. Теорема 18 (Об ограниченности относительно компактного множества).
44. Теорема 19 (Вейерштрасса).
45. Вполне ограниченное множество. Теорема 20 (Об ограниченности вполне ограниченного множества). Теорема 21 (Хаусдорфа).
46. Критерий относительно компактности в пространствах $R_p^n, 1 \leq p \leq \infty$, и $C[a, b]$.
47. Понятие линейного пространства, примеры.
48. Понятия выпуклого множества, линейно зависимой и независимой систем, линейного многообразия.
49. Леммы о линейных многообразиях. Понятия размерности, базиса пространства, бесконечности пространства, прямой суммы подпространств.
50. Фактор-пространство линейного пространства.
51. Нормированное пространство, свойства, примеры. Банахово пространство.
52. Ряды в нормированных пространствах. Теоремы о сходимости рядов.
53. Фактор-пространство линейного нормированного пространства.
54. Теорема о Фактор-пространстве линейного нормированного пространства.
55. Понятие эквивалентных норм, свойства.
56. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве. Следствия.
57. Разрешимость интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.
58. Лемма Рисса. Теорема об относительной компактности ограниченного множества в конечномерном пространстве.
59. Пространства со скалярным произведением. Примеры.
60. Гильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Непрерывность скалярного произведения.
61. Ортогональность элементов, ортогональность элемента и множества. Теорема о прямой сумме подпространств.
62. Критерий полноты множества в ПСП.
63. Ортогональные системы элементов. Теоремы об ортогональных системах элементов.
64. Понятие ряда Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:

1. Линейные операторы и функционалы (определения).
2. Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке.

3. Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью.
4. Теорема об ограниченности линейного оператора, определенного на конечномерном пространстве.
5. Норма линейного ограниченного оператора (определение).
6. Теорема о вычислении нормы оператора.
7. Оператор Фредгольма в пространстве $C[a, b]$ и его норма.
8. Оператор дифференцирования в $C[a, b]$ и из $C^1[a, b]$ в $C[a, b]$.
9. Пространство линейных ограниченных операторов.
10. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости). Следствие для сопряженного пространства.
11. Произведение линейных операторов.
12. Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью.
13. Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема).
14. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле сильной сходимости).
15. Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения).
16. Теорема о линейности обратного оператора.
17. Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного.
18. Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе.
19. Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.
20. Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).
21. Резольвента линейного оператора и его спектр (определения).
22. Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра.
23. Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра.
24. Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора.
25. Замкнутость оператора дифференцирования в $C[a, b]$.
26. Теорема о замкнутости оператора, обратного к замкнутому, следствие для непрерывно обратимого оператора.
27. Декартово произведение линейных нормированных пространств (линейные операции, норма и полнота). График линейного оператора.
28. Лемма о графике замкнутого оператора.
29. Теорема о замкнутом операторе, определенном на всем пространстве.
30. Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха (доказательство для сепарабельного вещественного пространства).
31. Три следствия.
32. Лемма о биортогональных системах.
33. Общий вид линейных ограниченных функционалов в пространствах: конечномерном, l_p ($1 < p < \infty$), гильбертовом, $L_p[a, b]$ ($1 < p < \infty$) (случай $p \neq 2$ без доказательства).
34. Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства.
35. Слабая сходимость элементов в нормированных пространствах (определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела.
36. Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств.
37. Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение).
38. Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества.
39. Теорема о слабой относительно компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства).
40. Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора).
41. Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a, b]$.
42. Теорема о линейности и норме сопряженного оператора.
43. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
44. Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов.

45. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство.
 46. Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному.
 47. вполне непрерывные операторы и слабая сходимости (две леммы и теорема).
 48. вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, из $L_2[a, b]$ в $C[a, b]$, из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$.

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

Комплект заданий для контрольной работы №1.

№1. Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n точек метрического

$$\text{пространства } X \text{ к точке } a. x_n = \frac{1}{n^2} \sqrt{n^4 t^2 + 1}, a = |t|, X = C[-4; 4]$$

№2. Для данного множества A выяснить, является ли множество $B = A \cap l_p (p \geq 1)$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p . $p = 3/2, A = \left\{ x \mid |x(k)| \leq \frac{1}{k} \right\}$.

№3. Является ли метрическое пространство (X, ρ) полным? $X = M[0, 1]$ пространство вещественнозначных ограниченных функций на $[0, 1]$, наделенное метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|.$$

№4. Выяснить, являются ли данные множества предкомпактными, компактными в $C[0; 1]$. $M = \{t^n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

№5. Является ли отображение F метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_3 , где $x_{k+1} = F(x_k), x_0 = 0$. Оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки, если F является сжимающим.

$$X = C[-1; 1], (Fx)(t) = \frac{1}{3} \sin x(t) + e^t.$$

Комплект заданий для контрольной работы №2.

№1. Проверить, является ли функция p нормой в пространстве X . Образует ли пара

$$(X, \rho), \text{ где } \rho(x, y) = p(x - y), \text{ метрическое пространство? } X = \tilde{N}^{(1)}[a; b],$$

$p(x) =$

$$|x(a)| + \max \left\{ |x'(t)| \mid t \in [a; b] \right\}$$

№2. Является ли множество A выпуклым в пространстве X ? $X = l_1, A = \left\{ x \in l_1 \mid |x(n)| \leq \frac{1}{n^2}, n \in \mathbf{N} \right\}$

Выяснить, являются ли нормы p и q эквивалентными в данном пространстве X .

№3.

$$X = l_1, p(x) = \sup_{n \in \Gamma} |x_n|, q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Проверить, является ли заданная система векторов (x_k) в бесконечномерном

№4.

пространстве X линейно независимой. $X = C[a; b], x_k(t) = (t - a)^k, k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Комплект заданий для контрольной работы №3.

№1. Пусть X, Y – нормированные пространства. Выяснить, совпадает ли область определения $D(A) = \{x \in X \mid Ax \in Y\}$ оператора A с нормированным пространством X . Является ли оператор A линейным, непрерывным оператором из

$$D(A) \text{ в } Y? \quad X = L_2[0;1], Y = L_1[0;1], (Ax)(t) = |x(t)|.$$

№2. Доказать, что оператор $A: X \rightarrow Y$ является линейным ограниченным, и найти его норму.

$$A: l_7 \rightarrow l_7, Ax = (0, 0, \frac{x(1)}{2}, \frac{x(2)}{2^2}, \dots, \frac{x(k)}{2^k}, \dots)$$

№3. Для последовательности операторов $(A_n) \subset LB(X, Y)$, $X, Y \in Norm$ и $A \in LB(X, Y)$ установить:

1) сходится ли (A_n) поточечно (сильно) к оператору A ; 2) сходится ли (A_n) по норме к оператору A .

$$A_n x = (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots), A = I_1, X = Y = l_1$$

№4. Пусть $A: X \rightarrow Y$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор A^{-1} , и построить его.

$$A: l_1 \rightarrow l_1, Ax = ((1 - \frac{1}{2})^2 x_1, (1 - \frac{1}{3})^3 x_2, (1 - \frac{1}{4})^4 x_3, \dots).$$

№5. Пусть E, F – ЛНП, A – замкнутый линейный оператор из E в F . Доказать, что множество нулей $N(A)$ оператор A является подпространством пространства E .

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в формах: *устного опроса (индивидуальный опрос, фронтальная беседа); письменных работ (контрольные, выполнение практико-ориентированных заданий)*. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются качественная шкала оценок. Критерии оценивания приведены выше.