

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_ системного анализа и управления  
наименование кафедры, отвечающей за реализацию дисциплины  
 \_\_\_\_\_ проф. Задорожний В.Г.  
подпись, расшифровка подписи  
\_\_\_\_.\_\_\_\_.2022г

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

\_\_\_ Б1.В.01 Приложения и вычислительные методы спектральной теории \_\_\_  
*Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом*

1. Код и наименование направления подготовки/специальности: \_\_\_\_\_  
Компьютерные технологии в задачах математической физики, оптимизации и управления
2. Профиль подготовки/специализация:  
*01.04.02 Прикладная математика и информатика*
3. Квалификация выпускника: *магистр*
4. Форма обучения *очная*
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:  
*кафедра системного анализа и управления*
6. Составители программы: Курбатов Виталий Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_  
*(ФИО, ученая степень, ученое звание)*

---

7. Рекомендована: \_\_\_\_\_  
*(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола)*  
Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики (протокол № 8 от 15.04.2022) \_\_\_\_\_
8. Учебный год: 2022/2023 Семестр(ы)/Триместр(ы): 1

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- знакомство с прикладными задачами, решаемыми спектральными методами, стандартными алгоритмами и их реализациями в данной области для формирования умений и навыков проводить работу по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований; обработки, интерпретации, оформлению и представлению профессиональному обществу результаты проведенных исследований; использовании современных математических и компьютерных методов в задачах математической физики, оптимизации и оптимального управления.

Задачи учебной дисциплины:

- приобретение навыков в решении спектральных задач компьютерными средствами;
- приобретение навыков в оценке точности и времени работы компьютерных программ;
- приобретение навыков в тестировании собственных разработок;
- формирование навыков выбора метода решения поставленной задачи с учетом имеющихся ресурсов, а также теоретического обобщения научных данных, результатов экспериментов и наблюдений;
- формирование навыков анализа информации для обработки данных, полученных в рамках проведенных исследований;
- получение практических навыков использования современных наукоемких технологий и пакетов прикладных программ для решения задач анализа динамических систем, задач математической физики, оптимизации и оптимального управления;
- приобретение навыков выбора алгоритма и средств его реализации при решении задач управления и оптимизации.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

учебная дисциплина относится к формируемой участниками образовательных отношений части Блока 1. От студентов требуется знание курсов «Алгебры» и «Функционального анализа». Данная дисциплина необходима для глубокого понимания курсов «Дифференциальных уравнений», «Уравнений математической физики» и «Методов вычислений», практические навыки необходимы для прикладных курсов, связанных с дифференциальными уравнениями, и выполнения выпускной работы.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен проводить работу по обработке и анализу научно-технической информации, результатов исследований	ПК-1.3	Выбирает методы решения поставленной задачи с учетом имеющихся ресурсов, а также теоретического обобщения научных данных, результатов экспериментов и наблюдений	Знать: основы спектральной теории и основные вычислительные методы, сферу применения спектральных методов  Уметь: использовать стандартные компьютерные средства и писать собственные программы для решения спектральных задач
ПК-3	Способен обрабатывать, интерпретировать, оформлять и представлять профессиональному обществу результаты проведенных исследова-	ПК-3.1	Использует современные методы анализа информации для обработки данных, полученных в рамках проведенных исследований	Владеть: навыками решения прикладных спектральных задач компьютерными средствами

	ний.		
ПК-4	Способен использовать современные математические и компьютерные методы в задачах математической физики, оптимизации и оптимального управления	ПК-4.1	Использует современные наукоемкие технологии и пакеты прикладных программ для решения задач анализа динамических систем, задач математической физики, оптимизации и оптимального управления.
ПК-4	Способен использовать современные математические и компьютерные методы в задачах математической физики, оптимизации и оптимального управления	ПК-4.3	Правильно выбирает алгоритм и средства его реализации при решении задач управления и оптимизации.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 4/144.**

**Форма промежуточной аттестации экзамен**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			1	№ семестра
Аудиторные занятия		48	48	
в том числе:	лекции	16	16	
	практические	16	16	
	лабораторные	16	16	
Самостоятельная работа		60	60	
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации (экзамен – час.)		36	36	
Итого:		144	144	

**13.1. Содержание дисциплины**

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Матричные операции в пакете «Математика»	Умножение матриц. Норма матрицы. Определитель и след. Спектр.	ПВМСТ
1.2	Функции от матриц	Определение функции от матрицы путем подстановки с степенной ряд. Матричная экспонента. Преобразования подобия. Функции от диагональной матрицы. Приложения к построению решения системы дифференциальных уравнений.	ПВМСТ
1.3	Евклидовы пространства	Матрица Грама и биортогональные системы. Ортогонализация Грама–Шмидта. Свойства ортогональных систем. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля.	ПВМСТ
1.4	Нормальные матрицы	Нормальные матрицы. Унитарные матрицы. Унитарное подобие. Эрмитовы матрицы. Построение функций от эрмитовых матриц. Разложение Шура и функции от треугольной матрицы.	ПВМСТ

1.5	Полиномиальная интерполяция	Определение интерполяционного. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Барицентрическая форма многочлена. Примеры узлов и весов. Интерполяционный многочлен в форме Эрмита. Разделенные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона . .	ПВМСТ
1.6	Рациональная интерполяция	Постановка задачи рациональной интерполяции. Остаточный член рациональной интерполяции. Аппроксимация Паде. Интерполяция с заданными полюсами. Наилучшее равномерное приближение.	ПВМСТ
1.7	Вычисление функций от матриц	Вычисление многочлена от матрицы. Вычисление рациональной функции от матрицы. Прикладные примеры функций от матриц. Способы приближенного вычисления аналитических функций от матриц. Уравнение Сильвестра.	ПВМСТ
1.8	Обусловленность	Абсолютные и относительные ошибки. Числа обусловленности отображения. Число обусловленности матрицы. Обусловленность скалярного произведения. Обусловленность собственных. Влияние округлений. Обусловленность функции от матрицы.	ПВМСТ
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Матричные операции в пакете «Математика»	Умножение матриц. Норма матрицы. Определитель и след. Спектр.	ПВМСТ
2.2	Функции от матриц	Определение функции от матрицы путем подстановки с степенной ряд. Матричная экспонента. Преобразования подобия. Функции от диагональной матрицы. Приложения к построению решения системы дифференциальных уравнений.	ПВМСТ
2.3	Евклидовы пространства	Матрица Грама и биортогональные системы. Ортогонализация Грама–Шмидта. Свойства ортогональных систем. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля.	ПВМСТ
2.4	Нормальные матрицы	Нормальные матрицы. Унитарные матрицы. Унитарное подобие. Эрмитовы матрицы. Построение функций от эрмитовых матриц. Разложение Шура и функции от треугольной матрицы.	ПВМСТ
2.5	Полиномиальная интерполяция	Определение интерполяционного. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Барицентрическая форма многочлена. Примеры узлов и весов. Интерполяционный многочлен в форме Эрмита. Разделенные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона . .	ПВМСТ
2.6	Рациональная интерполяция	Постановка задачи рациональной интерполяции. Остаточный член рациональной интерполяции. Аппроксимация Паде. Интерполяция с заданными полюсами. Наилучшее равномерное приближение.	ПВМСТ
2.7	Вычисление функций от матриц	Вычисление многочлена от матрицы. Вычисление рациональной функции от матрицы. Прикладные примеры функций от матриц. Способы приближенного вычисления аналитических функций от матриц. Уравнение Сильвестра.	ПВМСТ
2.8	Обусловленность	Абсолютные и относительные ошибки. Числа обусловленности отображения. Число обусловленности матрицы. Обусловленность скалярного произведения. Обусловленность собственных. Влияние округлений. Обусловленность функции от матрицы.	ПВМСТ
<b>3. Лабораторные работы</b>			

2.9	Лабораторная работа 1	Знакомство со структурой пакета «Математика» и его командами.	ПВМСТ
2.10	Лабораторная работа 2	Создание случайных матриц заданного класса. Построение ортогональных и биортогональных базисов.	ПВМСТ
2.11	Лабораторная работа 3	Построение интерполяционных многочленов и рациональных функций. Подстановка в них матриц. Способы проверки результатов и точности вычислений.	ПВМСТ
2.12	Лабораторная работа 4	Компьютерная реализация конкретных прикладных программ.	ПВМСТ

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Матричные операции в пакете «Математика»	2	2	2	7	13
2	Функции от матриц	2	2	2	8	14
3	Евклидовы пространства	2	2	2	7	13
4	Нормальные матрицы	2	2	2	8	14
5	Полиномиальная интерполяция	2	2	2	7	13
6	Рациональная интерполяция	2	2	2	8	14
7	Вычисление функций от матриц	2	2	2	7	13
8	Обусловленность	2	2	2	8	14
	Итого:	16	16	16	60	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Курс предполагает отведение большого числа разделов на самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами данные разделы.

Материал по каждой теме излагается последовательно с использованием ранее введенных определений, обозначений и доказательств. Необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного на занятиях материала.

Желателен просмотр материала по данной учебной дисциплине с опережением лекций с использованием рекомендуемой в данной учебной программе литературы.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учебное пособие / Г. И. Марчук. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-0892-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/167761">https://e.lanbook.com/book/167761</a> (дата обращения: 14.11.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Меркулова, Н. Н. Методы приближенных вычислений : учебное пособие / Н. Н. Меркулова, М. Д. Михайлов. — 2-е изд. — Томск : ТГУ. — Часть III — 2011. — 184 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/44922">https://e.lanbook.com/book/44922</a> (дата обращения: 14.11.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3	Меркулова, Н. Н. Методы приближенных вычислений : учебное пособие / Н. Н. Меркулова, М. Д. Михайлов. — 2-е изд. — Томск : ТГУ, 2014. — 764 с. — ISBN 978-5-94621-420-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/76708">https://e.lanbook.com/book/76708</a> (дата обращения: 14.11.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
---	--

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Курбатов, В. Г. Вычислительные методы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — 326 с.
2	Курбатов, В. Г. Основы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Научная книга, 2015. — 122 с.
3	Курбатов, В. Г. Пакет «Математика» в прикладных научных исследованиях : учебное пособие / В. Г. Курбатов, В. Е. Чернов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. — 240 с.
4	Воеводин, В. В. Вычислительная математика и структура алгоритмов : учебное пособие / В. В. Воеводин. — 2-е изд. — Москва : ИНТУИТ, 2016. — 145 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/100738">https://e.lanbook.com/book/100738</a> (дата обращения: 14.11.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5	Деммель, Д. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель. — М. : Мир, 2001. — 430 с.
6	Голуб, Д. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М. : Мир, 1999. — 548 с.
7	Higham, N. J. Functions of matrices: theory and computation / N. J. Higham. — Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. — xx+425 p.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1.	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a> );
2.	Электронная библиотека технического ВУЗа «Консультант студента» (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://www.studmedlib.ru">https://www.studmedlib.ru</a> )
3.	Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a> )
4.	ПВМСТ / В. Г. Курбатов. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы, онлайн-курсы, ЭУМК

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a> );
2	ПВМСТ / В. Г. Курбатов. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):** Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс ПВМСТ, размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.5.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Учебная аудитория для проведения лекций (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. 10, 11, 12, 15, 20, 124, 214, 216, 226, 329, 433, 435, 407п): специализированная мебель, компьютер (ноутбук), мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения).

Windows 10 (лицензионное ПО); LibreOffice (свободное и/или бесплатное ПО); Adobe Reader (свободное и/или бесплатное ПО); Mozilla Firefox (свободное и/или бесплатное

ПО)

Учебная аудитория для проведения практических и лабораторных занятий (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. 10, 11, 12, 15, 20, 124, 214, 216, 407п): специализированная мебель, персональные компьютеры для индивидуальной работы с возможностью подключения к сети «Интернет», мультимедийное оборудование (проектор, экран).

Windows 10 (лицензионное ПО); LibreOffice (свободное и/или бесплатное ПО); Adobe Reader (свободное и/или бесплатное ПО); Mozilla Firefox (свободное и/или бесплатное ПО); ПО Matlab, ПО Scilab, ПО Mathematica

### **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Раздел 1. Матричные операции в пакете «Математика» Раздел 2. Функции от матриц Раздел 3. Евклидовы пространства Раздел 4. Полиномиальная интерполяция Раздел 5. Рациональная интерполяция Раздел 6. Вычисление функций от матриц Раздел 7. Интеграл Лебега Раздел 8. Обусловленность	ПК-1, ПК-3, ПК-4	ПК-1.3, ПК-3.1, ПК-4.1, ПК4.3.	<i>Лабораторные работы</i>
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				<i>Перечень вопросов см. ниже.</i>

### **20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

#### **20.1. Текущий контроль успеваемости**

Контроль текущей успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: домашние задания, лабораторные работы.

Задания для лабораторных работ перечислены в учебном пособии [1], см. п. 15, а также продублированы в электронном ресурсе ПВМСТ.

#### *Описание технологии проведения собеседования по лабораторным работам*

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины организовано в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

#### *Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания*

**Оценка «зачтено»** выставляется, если обучающийся предъявляет работающие компьютерные решения большинства заданий лабораторных работ и показывает понимание реализуемых алгоритмов в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

**Оценка «незачтено»** выставляется, если обучающийся не в состоянии объяснить алгоритмы и запрограммировать более 1/3 всех заданий; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

#### **20.2. Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по экзаменационным билетам к экзамену.

### **Перечень вопросов к экзамену**

1. Линейные пространства. Линейные операторы. Линейная зависимость и независимость. Нормы. Прямые суммы и разложение единицы.
2. Векторы и матрицы. Матрица линейного оператора. Норма матрицы. Замена базиса.
3. Определитель и след. Матрица перестановок. Блочные матрицы.
4. Спектр и характеристический многочлен. Спектральный радиус.
5. Функции от матриц.
6. Матричная экспонента.
7. Спектральные проекторы.
8. Преобразование подобия. Матрицы простой структуры.
9. Бескоординатная форма теоремы Жордана.
10. Евклидовы пространства. Матрица Грама и биортогональные системы.
11. Ортогонализация Грама–Шмидта. Свойства ортогональных систем.
12. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля. Существование ортонормированного базиса.
13. Гильбертовы пространства. Ортогональное дополнение.
14. Сопряженный оператор.
15. Инвариантные подпространства. Нормальные матрицы.
16. Унитарные матрицы. Унитарное подобие.
17. Эрмитовы матрицы.
18. Разложение Шура. QR-разложение.
19. QR-алгоритм.
20. Разложение Холецкого.
22. Сингулярное разложение.
23. Определение интерполяционного многочлена. Матрица Вандермонда.
24. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
25. Интерполяционный многочлен в форме Эрмита.
26. Разделенные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.
27. Постановка задачи некротной рациональной интерполяции.
28. Задача кратной рациональной интерполяции.
29. Остаточный член рациональной интерполяции.
30. Аппроксимация Паде.
31. Наилучшее равномерное приближение
32. Функции от треугольной матрицы.
33. Вычисление многочлена от матрицы.
34. Вычисление рациональной функции от матрицы.
35. Прикладные примеры функций от матриц.
36. Способы приближенного вычисления функций от матриц.
37. Точные представления матричной экспоненты.
38. Уравнение Сильвестра.
39. Квадратное уравнение.
40. Уравнение Риккати.

Образец билета к экзамену

1. Матричная экспонента.
2. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
3. Вычисление рациональной функции от матрицы.

### *Описание технологии проведения экзамена*

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

### *Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания*

**Оценка «отлично»** выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, содержащегося в основных и дополнительных рекомендованных литературных источниках, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы, за умение анализировать изучаемые явления в их взаимосвязи и диалектическом развитии, применять теоретические положения при решении практических задач; обучающийся подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «хорошо»** выставляется за твердое знание основного (программного) материала, включая расчеты (при необходимости), за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы, за умение применять теоретические положения для решения практических задач; обучающийся демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «удовлетворительно»** выставляется за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала, за слабое применение теоретических положений при решении практических задач; обучающийся подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

**Оценка «неудовлетворительно»** выставляется за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в расчетах, за незнание основных понятий дисциплины; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.