


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
Системного анализа и управления
 В.Г.Задорожний
10.06.2022_г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.23 Методы оптимизации

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.03.02_прикладная математика и информатика

2. Профиль подготовки/специализация: *Базовый блок дисциплин*

3. Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Системного анализа и управления

6. Составители программы: Задорожний Владимир Григорьевич
Доктор физ.-мат. Наук, профессор

7. Рекомендована: Программа одобрена— НМС протокол №8 от 15.04.2022

8. Учебный год:2022/23

Семестры: 5, 6

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- изучение основ теории экстремальных задач, получение необходимых концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки существующих алгоритмов решения оптимизационных задач и, если необходимо, разработки новых методов и подходов решения новых типов таких задач для формирования умений и навыков по использованию фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности; по использованию и адаптации существующих математических методов и систем программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач; по разработке алгоритмов и компьютерных программ, пригодных для практического применения.

Задачи учебной дисциплины:

- дать студентам общее представление о прикладных задачах оптимизации;
- ознакомить с основными теоретическими фактами;
- изучить основные классы методов;
- обучить использованию методов решения прикладных задач оптимизации;
- расширить и систематизировать знания по формализации поставленной задачи и выбору математических методов для ее решения;
- сформировать практические навыки по адаптации методов решения прикладной задачи; реализации математических методов и алгоритмов в форме компьютерных программ для проведения вычислительного эксперимента, по осуществлению сравнения точности, сходимости и других характеристик вычислительных алгоритмов.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Обязательная дисциплина, базовая.. Требуется уверенное владение техникой дифференцирования и интегрирования основные умения в линейной алгебре. Требуется овладение основными понятиями и аналитическими и численными методами решения экстремальных задач.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2	Осуществляет формализацию поставленной задачи и выбирает математические методы для ее решения.	знать: Основные типы экстремальных задач. Основные необходимые и достаточные условия экстремума уметь: Находить точки экстремума функций нескольких переменных, функционалов и задач оптимального управления. владеть (иметь навык(и)): Приемами формализации экстремальных задач, численными и аналитическими методами решения задач оптимизации.
ОПК-2	Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	ОПК-2.1	Выделяет основные направления адаптации методов решения прикладной задачи; реализует математические методы и алгоритмы в форме компьютерных программ для проведения вычисли-	

			тельного эксперимента.
ОПК-5	Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	ОПК-5.1	Применяет фундаментальные знания для реализации математических методов и алгоритмов при решении прикладной задачи; осуществляет сравнение точности, сходимости и других характеристик вычислительных алгоритмов.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 216/6.

Форма промежуточной аттестации экзамен, зачет

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			5 семестра	6 семестра	...
Аудиторные занятия		96	32	64	
в том числе:	лекции	48	16	32	
	практические	32	16	16	
	лабораторные	16		16	
Самостоятельная работа		84	40	44	
в том числе: курсовая работа (проект)					
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 36 час.)		36		36	
Итого:		216	72	144	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Задачи оптимизации и их формализация	Примеры задач оптимизации. Существование решений в экстремальных задачах. Классификация задач.	Методы оптимизации(бак)
1.2	Методы оптимизации функций одной переменной	Классический метод. Численные методы одномерной оптимизации.	Методы оптимизации(бак)
1.3	Элементы линейного программирования	Основные задачи ЛП. Геометрическая интерпретация. Угловые точки. Симплекс-метод. Метод искусственного базиса.	Методы оптимизации(бак)

1.4	Элементы выпуклого анализа	Выпуклые функции и множества. Теоремы отделимости. Теоремы Куна – Таккера. Связь прямой и двойственной задач.	Методы оптимизации(бак)
1.5	Задачи вариационного исчисления	Простейшая задача. Дифференциал функционала. Слабый и сильный экстремумы. Уравнение Эйлера.	Методы оптимизации(бак)
1.6	Задачи оптимального управления	Необходимые условия в задаче с фиксированными концами времени. Принцип максимума Понтрягина. Постановка задачи синтеза. Задачи с интегральными ограничениями. Первый интеграл Гамильтоновой системы. Необходимые условия слабого минимума ПЗВИ. Достаточные условия минимума ПЗВИ. Метод динамического программирования в задачах оптимального управления. Градиентный метод.	Методы оптимизации(бак)
2. Практические занятия			
2.1	Задачи оптимизации и их формализация	Примеры задач оптимизации	Методы оптимизации(бак)
2.2	Методы оптимизации функций одной переменной	Методы приближенного нахождения экстремумов	Методы оптимизации(бак)
2.3	Элементы линейного программирования	Симплексный метод	Методы оптимизации(бак)
3. Лабораторные работы			
3.1	Численные методы одномерной оптимизации	Метод деления отрезка пополам. Метод золотого сечения.	Методы оптимизации(бак)
3.2	Численные методы многомерной оптимизации	Градиентный метод. Метод Ньютона.	Методы оптимизации(бак)
3.3	Задачи оптимального управления	Приближенные методы нахождения оптимального управления.	Методы оптимизации(бак)

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Задачи оптимизации и их формализация	2	2		4	8
2	Методы оптимизации функций одной переменной	2	2	6	10	20
3	Элементы линейного программирования	6	6	2	12	26
4	Элементы выпуклого анализа	10	6	2	8	26
5	Задачи вариационного исчисления	8	6	2	20	36
6	Задачи оптимального управления	20	10	4	30	64
	Итого:	48	32	16	84	180

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

Курс предполагает отведение большого числа разделов на самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами данные разделы.

Материал по каждой теме излагается последовательно с использованием ранее введенных определений, обозначений и доказательств. Необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного на занятиях материала.

Желателен просмотр материала по данной учебной дисциплине с опережением лекций с использованием рекомендуемой в данной учебной программе литературы.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Аттетков, А. В. Введение в методы оптимизации : учеб. пособие / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. - Москва : Финансы и статистика, 2011. - 272 с. - ISBN 978-5-279-03251-8. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785279032518.html (дата обращения: 15.02.2021). - Режим доступа : по подписке.
2	Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 512 с. — ISBN 978-5-8114-1887-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168850 (дата обращения: 15.12.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Задорожний В.Г. Методы оптимизации : пособие для студентов / В.Г. Задорожний, Е.Л. Ульянова. – Воронеж : Изд-во Воронеж, ВГУ, 2004. – 31 с.
4	Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации/ В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. М.: Физматлит, 2007. – 255 с.
5	Алюшин В.М., Колобашкина Л.В. Методы оптимального управления. Уч. Пособ. МИФИ, 2020, 176 с. – Электрон. Дан. – СПб., Лань.
6	Горелик, В.А. Исследование операций и методы оптимизации: Учебник / В.А. Горелик. - М.: Academia, 2018. - 384 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1	Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Кн.1 [Электронный ресурс] : . — Электрон. дан. — М. : МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2011. — 620 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9304
2	Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Кн.2 [Электронный ресурс] : . — Электрон. Дан. — М. : МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2011. — 433 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9305 —
3	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: https://lib.vsu.ru/
4	Методы оптимизации(бак)/ В.Г. Задорожний. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.moodle.ru

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Задорожний В.Г. Методы оптимизации : пособие для студентов / В.Г. Задорожний, Е.Л. Ульянова. – Воронеж : Изд-во Воронеж, ВГУ, 2004. – 31 с.
2	Белюсова Е.П., Коструб И.Д. Методы оптимизации http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/nov05111.pdf

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Методы оптимизаций (бак)», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория для проведения лекций и практических занятий (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. 226, 227, 319, 321, 323, 329, 428, 430, 433, 435): специализированная мебель, доска (маркерная или меловая)

Учебная аудитория для проведения лабораторных работ (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. 10, 11, 12, 15, 20, 124, 214, 216, 407п): специализированная мебель, персональные компьютеры для индивидуальной работы с возможностью подключения к сети «Интернет», мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения).

Windows 10 (лицензионное ПО), Mozilla Firefox (свободное и/или бесплатное ПО); Free Pascal (свободное и/или бесплатное ПО), ПО IntelliJ IDEA Community Edition, Anaconda, Maxima, пакет прикладных программ Matlab

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Задачи оптимизации и их формализация	ОПК-1,	ОПК-1.2,	<i>Собеседования по темам</i>
2.	Методы оптимизации функций одной переменной	ОПК-1,	ОПК-1.2,	<i>Собеседования по темам</i>
3	Элементы линейного программирования	ОПК-1,	ОПК-1.2,	<i>Собеседования по темам</i>
4.	Элементы выпуклого анализа	ОПК-2, ОПК-5	ОПК-2.1, ОПК-5.1	<i>Собеседования по темам</i>
5.	Задачи вариационного исчисления	ОПК-2, ОПК-5	ОПК-2.1, ОПК-5.1	<i>Собеседования по темам</i>
6.	Задачи оптимального управления	ОПК-2, ОПК-5	ОПК-2.1, ОПК-5.1	<i>Собеседования по темам контрольная</i>
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен, зачет				<i>Перечень вопросов см. ниже.</i>

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: **Контрольные работы**

Перечень заданий для контрольных работ

Тема: Задачи оптимизации и их формализация. Методы оптимизации функций одной переменной. Элементы линейного программирования и нелинейного программирования. Методы минимизации функций нескольких переменных

Вариант 1

1. Решить задачу классическим методом: $J(u) = u^3(u^2 - 1) \rightarrow \inf, u \in [1; 2]$.

2. Привести задачу к каноническому виду:

$$J(u) = 2u_1 - 3u_2 + u_3 \rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 - u_3 + u_4 \leq 1, \\ u_1 - u_2 + 2u_4 \geq 1, \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 = -4, \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

3. Составить математическую модель двойственной задачи и по её решению найти оптимальное решение исходной задачи:

$$J(u) = -7u_1 - 8u_2 - 12u_3 \rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 + 3u_3 \leq -1,5, \\ u_1 + 2u_2 + 4u_3 \leq -7, \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

4. Решить задачу: $J(u) = u_1u_2 + 50/u_1 + 20/u_2 \rightarrow \text{extr}$.

5. Найти условный экстремум функции нескольких переменных в задаче с ограничениями типа равенств: $J(u) = u_1u_2 + u_2u_3 \rightarrow \text{extr}, u_1 - u_2 = 2, u_2 + 2u_3 = 4$.

6. Составить функцию Лагранжа и выписать систему для нахождения условного экстремума в задаче с ограничениями типа равенств и неравенств: $J(u) = u_1u_2u_3 \rightarrow \text{extr}, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1, u_1 + u_2 + u_3 \leq 0$.

Тема: Элементы выпуклого анализа. Задачи вариационного исчисления.

Вариант 1

1. Дать определение: а) выпуклой функции; б) сильного локального минимума.

2. Решить задачу $\int_0^1 (\dot{u}^2 - 24tu) dt \rightarrow \inf, u(0) = \dot{u}(1) = 0, u(1) = 1/5, \dot{u}(1) = 1$.

3. Решить задачу $\int_0^1 (u - \dot{u}^2) dt \rightarrow \text{extr}, u(0) = u(1) = 0$.

Для оценивания результатов обучения (контрольная работа) используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Оценка «отлично» выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы; выполнил все задания и задачи полностью без ошибок и недочетов; строго соблюдает требования при оформлении работы; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; выполнил все задания и задачи полностью, но при наличии в их решении не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов; строго соблюдает требования при оформлении работы; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций; выполнил не менее 2/3 всех предложенных заданий и задач или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочетов, при наличии четырех-пяти недочетов; допускает незначительные ошибки при оформлении работы; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине; если число ошибок и недочетов в работе превысило норму для оценки 3 или обучающийся выполнил правильно менее 2/3 всех заданий и задач; допускает грубые ошибки при оформлении работы; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень вопросов к экзамену и порядок формирования КИМ

1. Транспортная задача.
2. Задача Эвклида.
3. Задача о брахистохроне
4. Задача Дидоны,
5. Задача оптимального быстрогодействия.
6. Классический метод.
7. Метод деления отрезка пополам.
8. Метод золотого сечения.
9. Метод парабол.
10. Классический метод для задач на безусловный экстремум (функции нескольких переменных).
11. Постановка задачи на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
12. Достаточное условие условного экстремума.
13. Пример Пеано.
14. Выпуклые множества и их свойства.
15. Проекция точки на выпуклое множество.
16. Теорема о разделяющей гиперплоскости.
17. Теорема об опорной гиперплоскости.
18. Представление выпуклого множества через его крайние точки.
19. Выпуклые функции многих переменных. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.
20. Критерий выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции.
21. Задача о максимуме выпуклой функции на выпуклом множестве.
22. Теорема Куна - Таккера.
23. Седловая точка функции Лагранжа. Другая формулировка теоремы Куна - Таккера.
24. Двойственная задача нелинейного программирования.
25. Связь двойственных задач нелинейного программирования.
26. Общая постановка задачи линейного программирования. Канонический вид задачи линейного программирования.
27. Геометрический метод решения задачи линейного программирования (можно на примере).
28. Крайние точки. Необходимое и достаточное условие для того чтобы точка была крайней.
29. Симплексный метод (на простейшем примере).
30. М-метод.
31. Градиентный метод.
32. Метод Ньютона.
33. Метод штрафных функций.
34. Пространства функций. Понятие слабого и сильного минимума.
35. Дифференциал функционала. Необходимое условие минимума функционала.
36. Лемма Лагранжа. Уравнение Эйлера и его использование.
37. Общая постановка задачи оптимального управления.
38. Задача о запуске спутника.
39. Необходимые условия в задаче оптимального управления.
40. Принцип максимума Понтрягина.
41. Пример решения задачи оптимального управления.
42. Условие Лежандра. Условие Якоби.
43. Условие Вейерштрасса.
44. Необходимые условия минимума функционала вариационного исчисления.
45. Достаточные условия слабого минимума.
46. Достаточные условия сильного минимума.
47. Первый интеграл Гамильтоновой системы.
48. Задачи с интегральными ограничениями.
49. Комбинаторные задачи.
50. Сведение задачи оптимального управления к задаче минимизации функции нескольких переменных.

Контрольно-измерительный материал №_1_

1. Задача о брахистохроне.
2. Теорема Куна–Таккера.
3. Выписать уравнение Беллмана для задачи:

4.

$$\int_0^1 (\sin^2(x(t)u(t)) + u^2(t))dt \rightarrow \min$$

.....

Контрольно-измерительный материал №2__

1. Теорема об опорной гиперплоскости.
2. Условия трансверсальности.
3. Выписать условие Лежандра для ПЗВИ

$$\int_0^1 (x^2 - \frac{1}{2} x'^2) dt$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

.....

Описание технологии проведения. Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие показатели:

- 1) знание основных определений, примеров и формулировок теорем;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение решать задачи вычислительного характера;
- 4) умение обосновывать (доказывать) основные факты теории.

Для оценивания результатов обучения на зачете с оценкой используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Полное соответствие ответа обучающегося на контрольно-измерительный материал всем перечисленным критериям</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал соответствует первым трем критериям.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<i>Ответ обучающегося на контрольно-измерительный материал соответствует первым двум критериям.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
<i>Ответ не соответствует первым двум критериям.</i>	–	<i>Неудовлетворительно</i>