МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
19.05.22

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1. В. 08 Асимптотические методы анализа

1. Шифр и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей

6. Составители программы: Глушко Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор

ФИО, ученая степень, ученое звание)

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол № 0500-03 от 24.03.2022

8. Учебный год: 2024/2025 **Семестр(ы): 5**

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели изучения дисциплины:

- так как исследование качественных свойств решений большого количества задач для уравнений с частными производными основывается на свойствах собственных значений и корней характеристических уравнений для этих задач, то главной целью курса является формирование способности к решению задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения об асимптотиках корней многочленов, решений трансцендентных уравнений. Такими способами являются теория асимптотических рядов, ряды Пюизо, диаграмма Ньютона;
- формирование навыков и изложение теоретических основ выбирает оптимальных способов исследования интегральных представлений решений изучаемых задач на основе методов Лапласа, стационарной фазы, метода перевала;
- формирование устойчивых навыков и компетенций, необходимых для выбора метод исследования асимптотических свойств решений поставленных задач.

Задачи учебной дисциплины:

- изучить понятия асимптотической последовательности и асимптотического ряда;
- выработать навыки анализа многообразия современных способов решения асимптотических задач в области уравнений;
- выработать навыки исследования интегральных представлений решений задач математической физики методами Лапласа, Фурье, Методом перевала;
- практическая часть курса предполагает освоение всего комплекса методов решения соответствующих задач с изложением классических задач из теории спецфункций.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина Асимптотические методы анализа относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК - 3	Способность к решению задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	ПК-3.1	Анализирует многообразие современных способов решения задач в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Освоил базовые и профессиональные основы изучаемого предмета, основные методы классификации и оценки информационных ресурсов Умеет применять многообразие современных способов решения задач теории возмущений Владеет методами анализа и поиска данных для математической постановки задачи

		ПК-3.2	Выбирает оптимальный способ исследования задач аналитического характера в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знает достаточно полный набор методов асимптотического анализа поставленных задач Умеет выбрать оптимальный метод асимптотического исследования поставленной задачи Владеет методиками основных методов теории возмущений и может применить нужный метод на практике
		ПК-3.3	Применяет выбранный метод исследования к решению задачи в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знает классификацию основных асимптотических методов анализа и области их применимости Умеет применить знания о классификации методов асимптотического анализа к выбору оптимального из них Владеет методикой применения выбранного метода

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — __2__/___72__.

Форма промежуточной аттестации 5 семестр – зачет

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость (часы)	
		Всего	По семестрам 5 семестр
в том числе:	Контактная работа	36	36
	лекции	18	18
	практические	18	18
	лабораторные	-	-
	Самостоятельная работа	36	36
	Промежуточная аттестация - экзамен		
Итого:		36	36

13.1. Содержание разделов дисциплины

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела

			дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Асимптотики решений алгебраических уравнений	Калибровочные функции. Примеры «скорости стремления» функций к нулю.	http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=363 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-2
		Асимптотические ряды. Пример интеграла $f(\omega)=\int_0^{\infty}\frac{\omega e^{-x}}{\omega+x}dx \quad (\omega\to\infty)$.	
		Асимптотические разложения и последовательности.	
		Алгебраические уравнения. Примеры построения асимптотических разложений при $\varepsilon\to 0$ корней уравнения $x^2-(3+2\varepsilon)x+2+\varepsilon=0$ и $z^3-z^2=\varepsilon$.	
		Построить разложения при $\varepsilon\to 0$ корней сингулярно возмущенного уравнения $\varepsilon x^2+x+1=0$. Методика нахождения порядка сингулярности.	
		Построить асимптотические разложения при $\varepsilon\to 0$ корней кубических уравнений $x^3-(6+\varepsilon)x^2+(11+2\varepsilon)x-6+\varepsilon^2=0$ и $x^3-(4+\varepsilon)x^2+(5-2\varepsilon)x-2+\varepsilon^2=0$.	
		Построить асимптотические разложения при $\varepsilon\to 0$ корней сингулярно возмущенного кубического уравнения $\varepsilon x^3+x+2+\varepsilon=0$.	
		Методика построения асимптотических разложений корней сингулярно возмущенного уравнения высокого порядка $\varepsilon x^n=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\ldots+a_1x+a_0$, где $\varepsilon\to 0$, $n,\ m\in\mathbb{N}$, $n>m$.	
		Найти асимптотическое представление при $n\to\infty$ корней x_n трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}x=\frac{1}{x}$, где x_n - корень уравнения, удовлетворяющий условию $\pi n-\frac{\pi}{2}<x_n<\pi n+\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.	
1.2	Метод Лапласа	Интегралы Лапласа. Эвристические соображения метода Лапласа. Лемма 1 о простейшей оценке интеграла Лапласа.	http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=363
		Лемма (2) Ватсона в случае дифференцируемой функции $f(x)$. Лемма (3)	

		Ватсона в случае непрерывной функции $f(x)$.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-3
		Найти асимптотическое разложение при $t\to\infty$ интеграла преобразования Лапласа $F(t)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-tx}dx$ при $f(x)\in C^{\infty}$ при малых x и условии, что интеграл $F(t)$ сходится при некотором $t>0$.	
		Теорема 1 о вкладе от граничной точки a в случае, когда $S'(a)\neq 0$. Теорема 1 о вкладе от граничной точки a при условии $S'(a)\neq 0$ и пониженных условиях гладкости на $f(x)$ и $S(x)$. Пример построения асимптотического представления при $t\to\infty$ для функции ошибок $\mathrm{Erfc}(x)=\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$.	
		Лемма 4 о замене переменной интегрирования в интеграл Лапласа. Теорема 3 о вкладе от внутренней невырожденной точки максимума x_0 в случае $S''(x_0)\neq 0$ и теорема 4 о вкладе от граничной точки максимума.	
		Доказать формулу Стирлинга: при $x\to\infty: \Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\cdot e^{-x}x^x(1+o(1))$ на основе интегрального представления $\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} t^x e^{-t}dt$.	
		Доказать асимптотическое представление при $n\to\infty$ интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\cdot(1+o(1))$ и на этой основе с использованием табличного равенства $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$ получить формулу http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=363Валлиса, выражающую число π .	
		Найти асимптотику при $x\to\infty$ функции Бесселя $I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta$. Найти асимптотику при $x>0,\ n\to+\infty$ полинома Лежандра $P_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\theta)^n d\theta$.	

		Дополнительные стандартные методы. Найти асимптотические разложения $J(\varepsilon)=\int_0^1 \sin(\varepsilon x^2)dx$ при $\varepsilon \to 0$; $J(x)=\int_0^x t^{-\frac{3}{4}}e^{-t}dt$ при $x \to +0$; $J(x)=\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$ при $x \to +\infty$.	
1.3	Метод стационарной фазы	Интегралы Фурье. Лемма Римана-Лебега.	http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=363
		Метод стационарной фазы. Теорема 1 об асимптотике интеграла Фурье в случае $S'(x)\neq 0,\ x\in[a;\,b]$ и пример построения асимптотического представления при $x\to\infty$ для интеграла $F(x)=\int_x^{\infty} f(t)e^{it}\,dt=-if(x)e^{ix}(1+o(1))$, в случае, когда $f(t)\in C^2([0;\,\infty)),\ f(t)>0,\ f'(t)<0,\ f''(t)>0$ при достаточно больших t, $f^{(j)}(t)=o(1),\ j=0{,}1;\ f'(t)=o(f(t)),\ t\to+\infty$.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-4
		Принцип локализации (Лемма 1). Теорема о разбиении единицы (без доказательства). Определения обычной, критической точек, вклада от критической точки. Теорема 2 о принципе локализации.	
		Интегралы Фурье. Теорема 3 о вкладе от граничной критической точки a в случае $S'(a)\neq 0$.	
		Интегралы Фурье. Доказать лемму Эрдейи в частном случае $f(x)\equiv 1$ при $0\le x\le \delta$.	
		Интегралы Фурье. Доказать лемму Эрдейи в общем случае, считая ее доказанной в частном случае.	
		Интегралы Фурье. Теорема 4 о вкладе от внутренней стационарной точки x_0 в случае $S''(x_0)\neq 0$ и пример построения асимптотики функции Бесселя $I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)dx, x\to\infty$.	
		Интегралы Фурье. Теорема 5 о вкладе от граничной стационарной точки x_0 в случае $S''(x_0)\neq 0$ и пример построения асимптотики при $\nu\to+\infty$ функции Бесселя $I_\nu(\nu)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\pi}\exp(i\nu(\varphi-\sin\varphi))d\varphi-$ $-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\nu(t+\mathrm{sh}\,t))dt$.	

		Интегралы Фурье. Найти асимптотическое представление при $\nu \to +\infty$ $(x>1)$ функции Бесселя вещественного индекса ν: $I_\nu(\nu x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[\nu(\varphi - x\sin\varphi)]d\varphi - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\nu(t+x\,\mathrm{sh}\,t))dt$.	
1.4	Метод перевала	Идея метода перевала. Линии уровня фазы и линии наискорейшего спуска. Седловые точки.	http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=363
		Метод перевала. Построить асимптотику при $t \to +\infty$ интеграла $\mathrm{Ai}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\frac{s^3}{3}+ts)ds$.	
		Метод перевала. Построить асимптотику при $a \to 0$ функции Бесселя первого рода нулевого порядка $I_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{e^{i\alpha z}}{\sqrt{1-z^2}}dz$.	
2. Практические занятия			
2.1	Асимптотики решений алгебраических уравнений	Калибровочные функции. Примеры «скорости стремления» функций к нулю. Асимптотические ряды. Асимптотические разложения и последовательности.	http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=363
		Алгебраические уравнения. Методика нахождения порядка сингулярности.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-2
		Диаграмма Ньютона	
		Асимптотики решений трансцендентных уравнений	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-5
2.2	Метод Лапласа	Интегралы Лапласа.. Лемма 1 о простейшей оценке интеграла Лапласа. Лемма (2) Ватсона в случае дифференцируемой функции $f(x)$. Лемма (3) Ватсона в случае непрерывной функции $f(x)$.	http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=363
		Теорема 1 о вкладе от граничной точки a в случае, когда $S'(a)\neq 0$. Лемма 4 о замене переменной интегрирования в интеграл Лапласа.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-3
		Теорема 3 о вкладе от внутренней невырожденной точки максимума x_0 в случае $S''(x_0)\neq 0$ и теорема 4 о вкладе от граничной точки максимума.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-5

		Дополнительные стандартные методы.	
2.3	Метод стационарной фазы	Интегралы Фурье. Лемма Римана-Лебега.Теорема 1 об асимптотике интеграла Фурье в случае $S'(x)\neq 0,\ x\in[a;b]$. Принцип локализации (Лемма 1). Определения обычной, критической точек, вклада от критической точки. Теорема 2 о принципе локализации.	http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=363 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-4 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952#section-5
		Интегралы Фурье. Теорема 3 о вкладе от граничной критической точки a в случае $S'(a)\neq 0$.	
		Лемма Эрдейи. Теорема 4 о вкладе от внутренней стационарной точки x_0 в случае $S''(x_0)\neq 0$. Теорема 5 о вкладе от граничной стационарной точки x_0 в случае $S''(x_0)\neq 0$. Контрольная работа	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Асимптотики решений алгебраических уравнений	4	6	-	12	22
02	Метод Лапласа	6	6	-	10	22
03	Метод стационарной фазы	6	6	-	10	22
04	Метод перевала	2			4	6
	Итого:	18	18		36	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Асимптотические методы анализа» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

5. Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены также на кафедральном сайте http//:www.kuchp.ru .

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 36 часа.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Асимптотические методы анализа» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (контрольная работа и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятия обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям (5 семестр – зачет)

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (5 семестр – зачет).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Шалаумов В.А. Асимптотические методы в анализе : учебное пособие / В.А. Шалаумов .— Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2012 .— 88 с. / http://biblioclub.ru/ .— ISBN 978-5-8353-1267-2 .— <URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232652>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Асимптотические методы : пособие для студентов по специальности 010101 / сост. А.В. Глушко, В.П. Глушко. – Воронеж : ЛОП ВГУ, 2004. – 56 с. (№ 1018). / http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=34
2	Глушко В.П. Курс уравнений математической физики с использованием пакета Mathematica. Теория и технология решения задач : учеб. пособие / В.П. Глушко, А.В. Глушко. – СПб : Лань, 2010. – 320 с. илл. (+CD).
3	Глушко А.В. Асимптотические методы анализа/ А.В. Глушко, Л.В. Безручуина, Е.А. Логинова, А.С. Рябенко//Воронеж.: ВГу.-2015.-61 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	Источник
1	*http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений*
2	*http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ*
3	*http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Асимптотические методы : пособие для студентов по специальности 010101 / сост. А.В. Глушко, В.П. Глушко. – Воронеж : ЛОП ВГУ, 2004. – 56 с. (№ 1018). / http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=34

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9952).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, Calc, Math, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet Explorer.

---

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория со специализированной мебелью.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.)

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Асимптотики решений алгебраических уравнений	ПК-3	ПК-3.2, ПК-3.3	Домашние задания, контрольная работа
2	Метод Лапласа	ПК-3	ПК-3.1, ПК-3.2, ПК-3.3	Домашние задания, контрольная работа
3	Метод стационарной фазы	ПК-3	ПК-3.1, ПК-3.2, ПК-3.3	Домашние задания, контрольная работа
4	Метод перевала	ПК-3	ПК-3.1, ПК-3.2, ПК-3.3	Контрольная работа
Промежуточная аттестация Форма контроля - Зачет				Перечень вопросов к зачету

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств. Пример заданий контрольной работы.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных заданий и домашних работ, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях.

Формы, методы и периодичность текущего контроля определяет преподаватель.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Описание технологии проведения

Контрольная работа проводится письменно.

Контрольная работа. Пример варианта задания.

Вариант № 1

1. Определить 2 члена разложения для каждого корня следующего уравнения при малых ε: $\mathrm{v}^2+\mathrm{v}-2+0,5\varepsilon(\mathrm{v}^3+3\mathrm{v}^2+5\mathrm{v}+6)=0$.

2. Найти главный член асимптотики при $t\to+\infty$ интеграла $\int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

3. Найти 3 члена асимптотического разложения при $t\to+\infty$ интеграла $\int\limits_t^\infty e^{-x^2}x^{-4}\,dx$.

4. Найти главный член асимптотики при $t\to+\infty$ интеграла $\int\limits_0^1 e^{it\alpha^3}\ln(1+\alpha)\,d\alpha$.

За контрольную работу ставится оценка «зачтено», в случае, если обучающийся выполнил:

- правильно в полном объеме все задания контрольной работы, показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающийся выполнил все задания с небольшими неточностями и показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающий выполнил половину из предложенных заданий правильно, остальные с существенными неточностями и показал удовлетворительное владение навыками полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала.

В остальных случаях обучающемуся ставится за контрольную работу «незачтено».

Перечень практических заданий

1. Найти первые три члена разложений следующих функций при малом ε:

$$\left(1-\frac{3a^2}{8}\varepsilon+\frac{51a^4}{256}\varepsilon^2\right)^{-1};$$

2. Найти первые три члена разложений следующих функций при малом ε:

$\cos\sqrt{1-\varepsilon t}$, $(0\le t\le T)$;

3. Найти первые три члена разложений следующих функций при малом ε:

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\varepsilon+2\varepsilon^2}\ .$$

4. Определить порядок следующих функций при $\varepsilon\to 0$:

$$\ln(1+5\varepsilon);\qquad \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sin\varepsilon};\qquad 1-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\cos\varepsilon\ .$$

5. Расположить функции по порядку убывания при малых ε $(\varepsilon>0)$

$$\varepsilon^2,\ \varepsilon^{\frac{1}{2}},\ 1,\ \varepsilon^{\frac{1}{2}},\ \ln\varepsilon^{-1},\ \varepsilon\ln\varepsilon^{-1},\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}},\ \varepsilon^{\frac{3}{2}};$$

6. Расположить функции по порядку убывания при малых ε $(\varepsilon>0)$

$$\ln(1+\varepsilon),\ \operatorname{ctg}\varepsilon,\ \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}},\ \varepsilon\ln\varepsilon,\ \ln^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\ ;$$

7. Расположить функции по порядку убывания при малых ε $(\varepsilon>0)$

$$e^{-\frac{1}{\varepsilon}},\ \frac{1}{\varepsilon},\ \varepsilon^{\frac{1}{2}},\ \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,\ e^{\frac{1}{\varepsilon}},\ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}},\ \varepsilon^{0{,}0001},\ 5^{\frac{1}{\varepsilon}},\ 5^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

8. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $x^3-(2+\varepsilon)x^2-(1-\varepsilon)x+2+3\varepsilon=0$;

9. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $x^3-(3+\varepsilon)x-2+\varepsilon=0$;

10. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $x^4+(2-3\varepsilon)x^3-(2-\varepsilon)x-1+4\varepsilon=0$;

11. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $\varepsilon\left(u^3+u^2\right)+4u^2-3u-1=0$;

12. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $\varepsilon u^3+u-2=0$;

13. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $\varepsilon u^4 - u^3 + 3u - 2 = 0$;

14. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $\varepsilon u^4 + u^2 - 3u + 2 = 0$;

15. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $x - \frac{\varepsilon}{3x^2} - \frac{3\varepsilon^2}{10x^4} = 0$;

16. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε $1 - \frac{\varepsilon}{3\sqrt{x}} - \frac{21\varepsilon^2}{5x} = 0$.

17. Найти два члена разложения для корней следующих трансцендентных уравнений при больших значениях аргумента $x \operatorname{ctg} x = 1$;

18. Найти два члена разложения для корней следующих трансцендентных уравнений при больших значениях аргумента $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

19. Найти асимптотику при $x \to \infty$ $\int_x^\infty e^{-t} t^x dt$.

20. Найти асимптотику при $x \to \infty$ $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$.

21. Найти асимптотику при $x \to \infty$ $\int_x^\infty e^{-t} t^{-n} dt$.

22. Найти асимптотику при $x \to \infty$ $\int_0^1 \sin \varepsilon t \cdot t^{-1} dt$.

23. Найти асимптотику при $x \to \infty$ $\int_0^x t^{-\frac{3}{4}} e^{-t} dt$.

24. Найти асимптотику при $x \to \infty$ $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$.

25. Найти асимптотику эллиптического интеграла 2 рода при $m \to 0$ $I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m\sin^2\theta d\theta}$.

26. Найти асимптотику при $x \to \infty$ $\int_x^\infty \cos t \cdot t^{-1} dt$.

27. Найти асимптотику при $x \to \infty$ $\int_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{x} dt$.

28. Найти главный член асимптотики при $x \to \infty$ $\int_x^\infty e^{-xt} \ln(1+t) dt$.

29. Найти главный член асимптотики при $x \to \infty$ $\int_0^1 e^{-\frac{x}{t}+t+x} dt$.

30. Найти асимптотику при $\omega \to \infty$ $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\omega + x + x\sqrt{\omega}} dx$.

31. Доказать, что при $t \to \infty$ $\int_0^\infty (1+x)^{-\alpha} e^{itx} dx = it^{-1} + 0(t^{-2})$;

32. Доказать, что при $t \to \infty$ $\int_0^\infty (1+x)^{-\alpha} \sin tx dx = t^{-1} + 0(t^{-2})$;

33. Доказать, что при $t \to \infty$ $\int_0^\infty (1+x)^{-\alpha} \cos tx dx = \alpha t^{-2} + 0(t^{-3})$.

34. Показать, что при $\omega \to \infty$ $\int_1^\infty e^{-\omega x^2} x^{\frac{5}{2}} \ln(1+x) dx \sim \frac{e^{-\omega} \ln 2}{2\omega}$;

35. Показать, что при $\omega \to \infty$ $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2\omega}}{\sqrt{x+x^2}} dx \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{2\omega^{\frac{1}{4}}}$;

36. Показать, что при $\omega \to \infty$ $\int_{-\infty}^\infty e^{-\omega x^2} \ln(2+x^2) dx \sim \frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{\sqrt{\omega}}$;

37. Показать, что при $\omega \to \infty$ $\int_1^2 e^{-\omega\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} e^{-2\omega}$;

38. Показать, что при $\omega \to \infty$ $\int_1^2 \frac{e^{-\omega\left(t+\frac{1}{t}\right)}}{\sqrt{t^2-1}} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2}\omega^{\frac{1}{4}}} e^{-2\omega}$.

39. Показать, что при $\alpha \to \infty$ $\int_0^1 e^{i\alpha t^3} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}}{3\alpha^{\frac{1}{3}}}$;

40. Показать, что при $\alpha \to \infty$ $\int_0^1 \frac{e^{i\alpha t^3}}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{12}}}{3\alpha^{\frac{1}{6}}}$;

41. Показать, что при $\alpha \to \infty$ $$\int_0^1 e^{i\alpha t^3} \ln(1+t)\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}}}{3\alpha^{\frac{2}{3}}}.$$

42. Вычислить асимптотику при $t \to \infty$ интеграла

$$F(t) = \int_0^a e^{-x^{-\alpha}} f(x) \exp\left(-te^{-\frac{1}{x^\alpha}}\right) dx.$$

43. Показать, что при $x \to \infty$ $$R_0(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x};$$

44. Показать, что при $x \to \infty$ $$H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)};$$

45. Показать, что при $x \to \infty$ $$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{t^2-1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$$

46. Показать, что при $x \to \infty$ $$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$$

47. Показать, что при $x \to \infty$

$$\int_{-1}^1 e^{ixt}\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}} dt \sim \left(\frac{2}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\left[x-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right].$$

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Асимптотические методы анализа» проводится в форме зачета

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины «Асимптотические методы анализа» и степень сформированности компетенции.

Вопросы к зачету:

1. Калибровочные функции. Примеры «скорости стремления» функций к нулю.
2. Асимптотические ряды. Пример интеграла $f(\omega) = \int_0^\infty \frac{\omega e^{-x}}{\omega + x}dx$ $(\omega \to \infty)$.
3. Асимптотические разложения и последовательности.
4. Алгебраические уравнения. Примеры построения асимптотических разложений при $\varepsilon \to 0$ корней уравнения $x^2-(3+2\varepsilon)x+2+\varepsilon=0$ и $z^3-z^2=\varepsilon$.

5. Построить разложения при $\varepsilon \to 0$ корней сингулярно возмущенного уравнения $\varepsilon x^2 + x + 1 = 0$. Методика нахождения порядка сингулярности.

6. Построить асимптотические разложения при $\varepsilon \to 0$ корней кубических уравнений $x^3 - (6+\varepsilon)x^2 + (11+2\varepsilon)x - 6 + \varepsilon^2 = 0$ и $x^3 - (4+\varepsilon)x^2 + (5-2\varepsilon)x - 2 + \varepsilon^2 = 0$.

7. Построить асимптотические разложения при $\varepsilon \to 0$ корней сингулярно возмущенного кубического уравнения $\varepsilon x^3 + x + 2 + \varepsilon = 0$.

8. Методика построения асимптотических разложений корней сингулярно возмущенного уравнения высокого порядка
$\varepsilon x^n = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $\varepsilon \to 0$, $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n > m$.

9. Найти асимптотическое представление при $n \to \infty$ корней x_n трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{x}$, где x_n - корень уравнения, удовлетворяющий условию $\pi n - \dfrac{\pi}{2} < x_n < \pi n + \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{N}$.

10. Интегралы Лапласа. Эвристические соображения метода Лапласа.

11. Лемма 1 о простейшей оценке интеграла Лапласа.

12. Лемма (2) Ватсона в случае дифференцируемой функции $f(x)$.

13. Лемма (3) Ватсона в случае непрерывной функции $f(x)$.

14. Найти асимптотическое разложение при $t \to \infty$ интеграла преобразования Лапласа $F(t) = \int_0^\infty f(x)e^{-tx}dx$ при $f(x) \in C^\infty$ при малых x и условии, что интеграл $F(t)$ сходится при некотором $t > 0$.

15. Метод Лапласа. Теорема 1 о вкладе от граничной точки a в случае, когда $S'(a) \neq 0$.

16. Метод Лапласа. Теорема 1 о вкладе от граничной точки a при условии $S'(a) \neq 0$ и пониженных условиях гладкости на $f(x)$ и $S(x)$. Пример построения асимптотического представления при $t \to \infty$ для функции ошибок $\operatorname{Erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}dt$.

17. Лемма 4 о замене переменной интегрирования в интеграл Лапласа.

18. Метод Лапласа. Теорема 3 о вкладе от внутренней невырожденной точки максимума x_0 в случае $S''(x_0) \neq 0$ и теорема 4 о вкладе от граничной точки максимума.

19. Доказать формулу Стирлинга: при $x \to \infty$: $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \cdot e^{-x}x^x(1 + o(1))$ на основе интегрального представления $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt$.

20. Доказать асимптотическое представление при $n \to \infty$ интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \cdot (1 + o(1))$ и на этой основе с использованием табличного равенства $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ получить формулу Валлиса, выражающую число π.

21. Найти асимптотику при $x \to \infty$ функции Бесселя $I_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta$.

22. Найти асимптотику при $x>0,\ n\to+\infty$ полинома Лежандра $P_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\theta)^n\,d\theta$

.

23. Дополнительные стандартные методы. Найти асимптотические разложения

$J(\varepsilon)=\int_0^1\sin(\varepsilon x^2)dx$ при $\varepsilon\to0$; $J(x)=\int_0^x t^{-\frac{3}{4}}e^{-t}dt$ при $x\to+0$;

$J(x)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt$ при $x\to+\infty$.

24. Теорема 6 (аналог леммы Ватсона в случае логарифмической особенности подынтегральной функции).

25. Найти асимптотику при $t\to\infty$ интеграла $F(t)=\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}-tx}dx$.

26. Интегралы Фурье. Лемма Римана-Лебега.

27. Метод стационарной фазы. Теорема 1 об асимптотике интеграла Фурье в случае $S'(x)\neq0,\ x\in[a;\,b]$ и пример построения асимптотического представления при $x\to\infty$ для интеграла $F(x)=\int_x^{\infty}f(t)e^{it}\,dt=-if(x)e^{ix}(1+o(1))$, в случае, когда $f(t)\in C^2([0;\,\infty)),\ f(t)>0,\ f'(t)<0,\ f''(t)>0$ при достаточно больших t, $f^{(j)}(t)=o(1),\ j=0,1;\ f'(t)=o(f(t)),\ t\to+\infty$.

28. Принцип локализации (Лемма 1). Теорема о разбиении единицы (без доказательства). Определения обычной, критической точек, вклада от критической точки. Теорема 2 о принципе локализации.

29. Интегралы Фурье. Теорема 3 о вкладе от граничной критической точки a в случае $S'(a)\neq0$.

30. Интегралы Фурье. Доказать лемму Эрдейи в частном случае $f(x)\equiv1$ при $0\le x\le\delta$.

31. Интегралы Фурье. Доказать лемму Эрдейи в общем случае, считая ее доказанной в частном случае.

32. Интегралы Фурье. Теорема 4 о вкладе от внутренней стационарной точки x_0 в случае $S''(x_0)\neq0$ и пример построения асимптотики функции Бесселя $I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)dx,\ x\to\infty$.

33. Интегралы Фурье. Теорема 5 о вкладе от граничной стационарной точки x_0 в случае $S''(x_0)\neq0$ и пример построения асимптотики при $\nu\to+\infty$ функции Бесселя $I_\nu(\nu)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\pi}\exp(i\nu(\varphi-\sin\varphi))d\varphi-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\nu(t+\mathrm{sh}t))dt$.

34. Интегралы Фурье. Найти асимптотическое представление при $\nu\to+\infty$ $(x>1)$ функции Бесселя вещественного индекса ν:

$$I_\nu(\nu x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[\nu(\varphi-x\sin\varphi)]d\varphi-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\exp[-\nu(t+x\mathrm{sh}t)]dt.$$

35. Идея метода перевала. Линии уровня фазы и линии наискорейшего спуска. Седловые точки.

36. Метод перевала. Построить асимптотику при $t\to+\infty$ интеграла

$$\mathrm{Ai}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\frac{s^3}{3}+ts)\,ds.$$

37. Метод перевала. Построить асимптотику при $a\to\infty$ функции Бесселя первого рода нулевого порядка $I_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{e^{i\alpha z}}{\sqrt{1-z^2}}dz$.

Примерный вариант билета к зачету:

<u>Примерные билеты для промежуточной аттестации</u>

Контрольно-измерительный материал №_1_

1. Определить количество сингулярных корней уравнения $\varepsilon x^4+x^2-(3+\varepsilon^2)x+2+7\varepsilon=0$ при $\varepsilon\to+0$

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	0	2	4	нет правильного ответа

2. Определить порядок убывания при $t\to\infty$ для интеграла $\int\limits_0^1 x^2e^{-tx^3}\ dx$.

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	-1	-1,5	-2	нет правильного ответа

3. Определить порядок убывания при $t\to\infty$ для интеграла $\int\limits_0^1 x^3e^{itx^3}\ dx$.

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	- 1	- 1,5	- 2	нет правильного ответа

Контрольно-измерительный материал №_2_

1. Определить количество регулярных корней уравнения $\varepsilon x^3+x^2-(3+\varepsilon^2)x+2+7\varepsilon=0$ при $\varepsilon\to+0$

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	0	2	3	нет правильного ответа

2. Определить порядок убывания при $t\to\infty$ для интеграла $\int\limits_0^1 x^5e^{-tx^2}\ dx$.

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	-3	-2,5	-2	нет правильного ответа

3. Определить порядок убывания при $t\to\infty$ для интеграла $\int\limits_0^1 x^6e^{itx^4}\ dx$.

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	- 0,75	- 2,5	- 1	нет правильного ответа

Контрольно-измерительный материал №_6_

1. Определить количество сингулярных корней уравнения
$\varepsilon^2x^3+5x^2-(3+\varepsilon^2)x-2+7\varepsilon=0$ при $\varepsilon\to+0$

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	1	2	3	нет правильного ответа

2. Определить порядок убывания при $t \to \infty$ для интеграла $\int_0^1 x^5 e^{-tx^3}\ dx$.

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	-1	-1,5	-2	нет правильного ответа

3. Определить порядок убывания при $t \to \infty$ для интеграла $\int_0^1 x^2 e^{itx^3}\ dx$.

Варианты ответов

Номер ответа	1	2	3	4
Ответ	- 1	- 1,5	- 2	нет правильного ответа

Критерии выставления зачета:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся не владеет основами учебно-программного материала, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий. Как правило, оценка "не зачтено" ставится студентам, которые не могут продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности по окончании вуза без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.	-	**«Не зачтено»**
Обучающийся владеет знаниями основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомый с основной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка **"Зачтено"** выставляется студентам, допустившим погрешности в ответе на зачете и при выполнении практических заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя. Оценка **"Зачтено"** выставляется, если студент знает все определения по контрольно-	Пороговый	**"Зачтено"**

измерительному материалу и может решить хотя бы один практический пример		

На зачете учитываются результаты текущей аттестации.