МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко

19.05.22

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.ДВ.03.01 Методика решения тригонометрических задач повышенного уровня сложности

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета

6. Составители программы: проф., д.ф.-м.н. Глушко А.В.

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол № 0500-03 от 24.03.2022

8. Учебный год: 2025/2026 **Семестр(ы): 8**

9.Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- сформировать компетенции отбора корней в тригонометрических задачах и навыки правильного оформления результатов решения;

- анализировать и обобщать результаты и методики, содержащиеся в алгоритме Евклида, относящемся к теории чисел и использовать их при решении задач повышенной трудности, содержащих пересечение серий решений тригонометрических уравнений, переопределенные системы тригонометрических уравнений, нестандартные тригонометрические уравнения.

Задачи учебной дисциплины:

- сформировать навыки решения тригонометрических задач повышенной сложности и изложить методику их решения;

- сформировать навыки использования алгоритма Евклида для решения тригонометрических задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Методика решения тригонометрических задач повышенного уровня сложности» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений дисциплин по выбору Блока 1.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения в средней школе.

Знание методов изучения решений тригонометрических задач повышенного уровня сложности востребовано при подготовке выпускников школ к экзамену ЕГЭ по математике профильного уровня.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК -2	Умение оформлять результаты научно-исследовательских работ	ПК-2.2	Анализирует и обобщает результаты математических доказательств, сформулированных научных утверждений	Освоил базовые и профессиональные основы изучаемого предмета, основные методы классификации и оценки информационных ресурсов Умеет применять многообразие современных способов решения задач теории возмущений Владеет методами анализа и поиска данных для математической постановки задачи

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — __2__/__72__.

Форма промежуточной аттестации__ Зачет – 8 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			8 семестр
Контактная работа		24	24
в том числе:	12	12	12
	12	12	12
	-	-	-
	-	-	-
Самостоятельная работа		48	48
Промежуточная аттестация			
Итого:		72	72

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1	Повторение	Меры угловых величин. Тригонометрический круг. Радианная мера углов. Тригонометрические функции. Определения, свойства, периодичность, графики. Основные принципы преобразования тригонометрических выражений.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=25714 https://e.lanbook.com/book/9320 https://e.lanbook.com/book/106570 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=25714
		Формулы приведения. Два случая. Метод расстановки знаков в формулах приведения. Формулы преобразования тригонометрических функций сумм (разностей) аргументом. Формулы преобразования сумм (разностей) тригонометрических функций в произведения. Формулы преобразования произведений тригонометрических функций. Формулы двойного угла. Формулы понижения степени. Универсальная тригонометрическая подстановка. Формулы тройного угла. Преобразование произведения косинусов с удваивающимся аргументом. Формулы преобразования тангенса половинного угла. Метод введения дополнительного угла. Использование метода в задачах на ограниченность тригонометрических выражений	
		Понятия обратных тригонометрических функций. Формулы записи решений элементарных тригонометрических уравнений. Модификация формул для использования в задачах с отбором корней. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные тригонометрические уравнения. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к однородным уравнениям.	

2	Отбор корней	Задачи на тригонометрические уравнения, связанные с отбором корней по ограничениям ОДЗ. Метод отбора корней на тригонометрическом круге.	
3	Аналитический отбор корней	Искусственные, внешние и дополнительные ограничения, приводящие к отбору корней в тригонометрических уравнениях	
		Отбор корней, возникающий в задачах на решение систем тригонометрических уравнений. Пересечение серий (аналитическое и на тригонометрическом круге). Переопределенные системы уравнений	
4	Нестандартные тригонометрические уравнения	Использование функциональных методов: ограниченности, монотонности, использование ОДЗ	
5	Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями	Решение уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями	
2. Практические занятия			
1	Повторение	Основные принципы преобразования тригонометрических выражений	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=25714 https://e.lanbook.com/book/9320 https://e.lanbook.com/book/106570 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=25714
		Формулы приведения. Два случая. Метод расстановки знаков в формулах приведения. Формулы преобразования тригонометрических функций сумм (разностей) аргументом. Формулы преобразования сумм (разностей) тригонометрических функций в произведения. Формулы преобразования произведений тригонометрических функций. Формулы двойного угла. Формулы понижения степени. Универсальная тригонометрическая подстановка. Формулы тройного угла	
		Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные тригонометрические уравнения. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к однородным уравнениям. Контрольная работа № 1	
2	Отбор корней	Задачи на тригонометрические уравнения, связанные с отбором корней по ограничениям ОДЗ. Метод отбора корней на тригонометрическом круге.	
3	Аналитический отбор корней	Искусственные, внешние и дополнительные ограничения, приводящие к отбору корней в тригонометрических уравнениях.	
		Отбор корней, возникающий в задачах на решение систем тригонометрических уравнений. Пересечение серий (аналитическое и на тригонометрическом круге). Переопределенные системы уравнений.	
4	Нестандартные тригонометрические уравнения	Использование функциональных методов: ограниченности, монотонности, использование ОДЗ	
5	Уравнения и неравенства с обратными	Решение уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями	

	тригонометриче-скими функциями	Контрольная работа № 2	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Повторение.	2	2	-	8	12
2	Отбор корней.	2	2	-	10	14
3	Аналитический отбор корней	3	3	-	10	16
4	Нестандартные тригонометрические уравнения	3	3	-	10	16
5	Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями	2	2	-	10	14
	Итого:	12	12	-	48	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Методика решения тригонометрических задач повышенного уровня сложности» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

№ п/п	Источник
1	Тригонометрия: теория и практика решения задач : учебное пособие / С.С. Граськин, А.В. Афанасьева, М.Е. Гутнер [и др.] ; под редакцией С.С.

	Граськина. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 325 с. — ISBN 978-5-7038-3281-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/106570

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Золотарёва, Н. Д. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов ; под редакцией М. В. Федотова. — 6-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2021. — 549 с. — ISBN 978-5-93208-501-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/166724
3	Тригонометрия: теория и практика решения задач : учебное пособие / С. С. Граськин, А. В. Афанасьева, М. Е. Гутнер [и др.] ; под редакцией С. С. Граськина. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 325 с. — ISBN 978-5-7038-3281-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/106570
4	Гельфанд, И.М. Тригонометрия : руководство / И.М. Гельфанд, С.М. Львовский, А.Л. Тоом. — 3-е изд., испр. — Москва : МЦНМО, 2008. — 200 с. — ISBN 978-5-94057-391-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/9320

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

№ п/п	Ресурс
1	*http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ*
2	*http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания*
3	http://fipi.ru/ege-i-gve-11/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy - интернет портал, посвященный подготовке к ЕГЭ
4	http://alexlarin.net/ - интернет портал, посвященный подготовке к ЕГЭ

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Гельфанд, И.М. Тригонометрия : руководство / И.М. Гельфанд, С.М. Львовский, А.Л. Тоом. — 3-е изд., испр. — Москва : МЦНМО, 2008. — 200 с. — ISBN 978-5-94057-391-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/9320
2	Тригонометрия: теория и практика решения задач : учебное пособие / С.С. Граськин, А.В. Афанасьева, М.Е. Гутнер [и др.] ; под редакцией С.С. Граськина. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 325 с. — ISBN 978-5-7038-3281-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/106570

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ»

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, Calc, Math, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet Explorer.

-

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория со специализированной мебелью.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.)

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Повторение	ПК-3	ПК-3.1 – ПК-3.3	Домашние задания, работа у доски
2	Отбор корней			Домашние задания, работа у доски
3	Аналитический отбор корней			Домашние задания, работа у доски
	Текущая аттестация			Контрольная работа
	Промежуточная аттестация			Зачет

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашние задания:

По теме 1. Повторение

Задачи:

Доказать тождества.

1. $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)+\sin^4\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)-1}=-\dfrac{1}{2}ctg^2\alpha$.

2. $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$

3. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

4. $2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)-3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)=-1$.

5. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$.

6. $\cos 4\alpha\cdot tg2\alpha-\sin 4\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{tg^2\alpha-1}$.

7. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos 3\alpha+\sin 3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)$.

8. $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi-8\alpha\right)$.

9. $\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+ctg^2\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)=\dfrac{1}{\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}-\cos^2(\alpha+\pi)$.

10. $\cos 75^\circ+ctg60^\circ\cdot\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

11. $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+4\alpha\right)tg(\pi-2\alpha)=\sin(\pi-4\alpha)+\dfrac{2tg\alpha}{tg^2\alpha-1}$.

12. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{1-\cos(\pi-\alpha)-2\sin^2 2\alpha}=2\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)$.

13. $\sin^2\left(\dfrac{7}{8}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{9}{8}\pi-2\alpha\right)=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

14. $\dfrac{1+\sin\alpha-2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

15. $\dfrac{1-ctgx}{\sin x+\cos x}=\dfrac{tg\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$.

16. $\sin^2(\alpha-30^\circ)+\sin^2(\alpha+30^\circ)-\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}$.

17. $\dfrac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\dfrac{5}{4}\pi+\alpha\right)}=tg\left(\alpha-\dfrac{5}{4}\pi\right)$.

18. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

19. 5. Докажите, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$, если известно, что α,β,γ - внутренние углы треугольника.

6. Доказать, что если $\alpha,\beta,\gamma-$внутренние углы треугольника, то справедливо равенство $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$

7. Доказать, что если *A, B, C* - углы треугольника, то $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.

8. Доказать, что функция $f(x)=4\cos^2 x+7\sin x\cdot\cos x+2\sin^2 x-\sqrt{102}$ отрицательна при всех $x\in R$.

9. Доказать, что функция $f(x)=2\sin^2 x-6\cos^2 x-4\sin x\cos x+\sqrt{46}$ положительна при всех $x\in R$.

10. Найдите $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$и $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, если известно, что $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{21}{65}$ и $\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{27}{65},\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi,-\frac{\pi}{2}<\beta<0.$

11. Найти $tg^3\alpha+ctg^3\alpha$, если $tg\alpha+ctg\alpha=m$.

12. Найти $\cos 2\alpha$, если известно, что $2ctg^2\alpha+7ctg\alpha+3=0$ и угол α удовлетворяет неравенством $\frac{3}{2}\pi<\alpha<\frac{7}{4}\pi$.

13. Найти $tg\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x+\cos x=0,2$.

. Решить уравнения

9. $\sin^2 x-8\sin 2x=3\cos^2 x$.

10. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$.

11. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x$.

12. $4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)\cos x+2\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\cos(\pi+x)=1$.

13. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\frac{3}{2}$.

14. $3\sin 2x+2\cos 2x=3$.

15. $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$.

16. $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$.

17. $tg\left(x-15^\circ\right)ctg\left(x+15^\circ\right)=\frac{1}{3}$.

18. $\sin^2 2x+\sin^2 x=\dfrac{9}{16}$.

19. $\sin\left(\pi-3x\right)+4\sin^3\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0$.

20. $\dfrac{2}{1-\cos\left(3\pi-2x\right)}=3\cdot ctg\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-1$.

21. $2ctg^2x\cdot\cos^2 x+4\cos^2 x-ctg^2x-2=0$.

22. $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{3}{2}x-\sin x\cdot\sin 3x-\sin 2x\cdot\sin 3x=0$.

23. $ctg\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)-tg^2x=\left(\cos 2x-1\right)\cos^{-2} x$.

По теме 2. Отбор корней.

Задачи:

1. Решить уравнение $\cos x\sqrt{\mathrm{tg}^2x-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{\mathrm{ctg}^2x-\cos^2 x}=2\sin x.$

2. Решить уравнение $\cos 3x+\cos x=\left(\sin 2x\right($.

3. Решить уравнение $\mathrm{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-9\mathrm{ctg}^2x+1$.

4. Решить уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x}$.

5. Решить уравнение $\sqrt{9-x^2}\left(2\sin 2\pi x+5\cos\pi x\right)=0$;

6. Решить уравнение $\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0$.

7. Решить уравнение $\sqrt{\cos x+\cos 3x}=-\sqrt{2}\cos x$.

8. Решите уравнение $\sin\dfrac{3x}{2}\cdot\sqrt{-x^2+4x-3}=0$ и найдите сумму его решений.

9. Решить уравнение $4(\cos\dfrac{16\pi}{3}\cos 3x)^2+\sin^2 2x+\cos 3x+2\cos^2\dfrac{3x}{2}=0.$

10. Решите уравнение $\mathrm{tg}3x\cdot\sqrt{-x^2+x+2}=0$ и найдите сумму его решений.

11. Решить уравнение $(2\sin\dfrac{17\pi}{6}\cos 6x)^2+\sin^2 4x+4\cos^2 3x-1=0.$

12. Решите уравнение $\cos 2x\cdot\sqrt{-x^2-2x+3}=0$ и найдите сумму его решений.

13. Решить уравнение $2\cos 3x-2\sin^2 2x-\mathrm{tg}^2x=2.$

14. Решите уравнение $\sin 2x\cdot\sqrt{-x^2+2x+3}=0$ и найдите сумму его решений.

15. Решить уравнение $2\sin 6x+2\cos^2 4x-\mathrm{ctg}^2 2x=4$

16. Решить уравнение $\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4}+x)=2\cos\frac{2\pi}{3}-5\operatorname{ctg}x.$

17. Решить уравнение $\operatorname{tg}(2x-\frac{\pi}{3})=\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}+3\operatorname{ctg}2x.$

18. Решить уравнение $\operatorname{tg}(2x+\frac{5\pi}{3})=2\operatorname{ctg}2x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}.$

19. Решить уравнение $2\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})+5\sqrt{3}\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{3})=-7.$

20. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}}(\sin 4x+\sin 2x-2\cos 2x)=0.$

21. При каждом значении параметра а решить уравнение $\sqrt{\sin 3x+\sin x}=\sqrt{-a\sin 2x}.$

22. Решить уравнение $\log_{\operatorname{tg}x}(\sin 4x+\sin 2x+1)=0$.

23. При каждом значении параметра а решить уравнение $\sqrt{\cos 3x-\cos x}=\sqrt{a\sin 2x}.$

24. Решить уравнение $\log_{\operatorname{ctgx}}(3+2\cos 2x+2\cos 4x)=0.$

25. При каждом значении параметра а решить уравнение $\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{a\sin x+1}.$

26. Решить уравнение $\log_{\operatorname{tg}x}(\cos 2x-\cos 4x)=0$.

27. При каждом значении параметра а решить уравнение $\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{a\cos x-1}.$

28. При каких значениях параметра а уравнения $\operatorname{tg}x=1$ и $a\sin 2x+2\cos 2x=a+\sin 4x$ равносильны?

29. При каких значениях параметра а уравнения $\sin x+\cos x=0$ и $a\sin 2x-\sin 4x=2\cos 2x-a$ равносильны?

30. При каких значениях параметра а уравнения $|\sin x|=1$ и $a\cos x=\sin 2x$ равносильны?

31. При каких значениях параметра а уравнения $\cos^2 x=1$ и $a\sin x=\sin 3x$ равносильны?

32. Найти решение уравнения $\sqrt{3}+2\cos\frac{\pi x}{9}=0$, принадлежащее интервалу (8 ; 20).

33. Вычислить $f'(\frac{\pi}{24})$, если $f(x)=\sin^4 2x-\cos^4 2x.$

34. Решить неравенство $\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\le\operatorname{tg}^2 x+2\cdot\operatorname{tg}x-3.$

35. Найти решение уравнения $1+\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{8}=0$, принадлежащее интервалу (3 ; 10).

36. Вычислить $f'(\frac{\pi}{3})$, если $f(x)=\sin 4x\cdot\cos 4x.$

37. Решить неравенство $\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{c\,tg}x-3}\le 1-\operatorname{ctg}^2 x.$

38. Решить уравнение $\sqrt[4]{\frac{1}{4}-2\sin 3x}+\sqrt[4]{\frac{3}{4}+2\sin 3x}=1.$

39. Решить уравнение $\sqrt[4]{15+5\cos^2 2x}-\sqrt[4]{5\sin^2 2x-3}=1.$

40. Решить уравнение $\sqrt[4]{0,5-\cos 2x}+\sqrt[4]{0,5+\cos 2x}=1.$

41. Решить уравнение $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1.$

42. Сколько положительных решений имеет уравнение $\mathrm{tg}(5\pi\cdot 2^{-x})=1$?

43. Сколько положительных решений имеет уравнение $\mathrm{tg}(3\arcsin x)=1$?

44. Решить уравнение $|\sqrt{3}\cos 3x|=\sqrt{2}\cos 2x$.

45. Решить уравнение $\sqrt{2}\cos 2x+|\sqrt{3}\sin 3x|=0.$

46. Решить уравнение $2+2(\sin y+\cos y)\sin x=\cos 2x.$

47. Решить уравнение $(2-\cos 2x)(1+\mathrm{tg}^2 y)=4\sqrt{2}\mathrm{tg}y\sin x.$

48. Решить уравнение $2+2(\sin y+\cos y)\sin x=\cos 2x.$

49. Решить уравнение $(2-\cos 2x)(1+\mathrm{tg}^2 y)=4\sqrt{2}\mathrm{tg}y\sin x.$

50. Найти все решения уравнения $\mathrm{ctg}^2(\frac{173}{2}\pi+3x)+4\cos\frac{x}{3}(1+\cos\frac{x}{3})=\sin x-1,$

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{\sin(9,1\pi)\sin x}$.

51. Решить уравнение $\frac{4\cos 2x}{11\cos^2 2x-8\cos 2x+7\sin^2 2x}+\frac{3\cos 2x}{11\cos^2 2x-10\cos 2x+7\sin^2 2x}=1.$

52. Решить уравнение $\mathrm{tg}x+\sqrt{3\sin x}=0.$

53. Решить уравнение $\mathrm{ctg}\, x+\sqrt{2\cos x}=0.$

54. Решить уравнение $(x+0,5)^2|\sin x|+\sin x=0.$

55. Решить уравнение $\frac{\cos x}{(x+1,5)^2}=|\cos x|.$

56. Решить уравнение $\frac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0.$

57. Решить уравнение $(9-\sin^{-1}\frac{13\pi}{6})\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}(\frac{7\pi}{2}+x)=(2+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3})\frac{1}{\cos x}.$

58. Решить уравнение $(4+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3})\mathrm{tg}\, x+\mathrm{ctg}\, x=-(\frac{9}{2}+\sin^2\frac{17\pi}{4})\frac{1}{\cos x}.$

59. Решить уравнение $(1+\cos^{-1}\frac{7\pi}{3})\sin x+\sin(\frac{15\pi}{2}+x)=\frac{1}{\cos x}.$

60. Решить уравнение $\operatorname{tg} x+(\sin\frac{29\pi}{4})^{-4}\operatorname{ctg} x=\frac{4}{\sin x}.$

61. Решить уравнение $\sin x+2\sqrt{3}\cos x-\cos 2x-2=0.$

62. Найти все пары чисел (x, y), для каждой из которых выполнено равенство

$$4(3\sqrt{4x-x^2}\sin^2(\frac{x+y}{2})+2\cos(x+y))=13+4\cos^2(x+y).$$

63. Найти все пары чисел (x, y), для каждой из которых выполнено равенство

$$12\sqrt{6x-x^2-5}\cos^2(\frac{x-2y}{2})=17+8\cos(x-2y)-4\sin^2(x-2y).$$

64. Найти все пары чисел (x, y), для каждой из которых выполняется равенство

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2}=\sqrt{3+2x-x^2}\cos^2(\frac{x-y}{2})+\frac{\sin^2(x-y)}{2}.$$

65. Решить уравнение $8\cos x+6\sin x-\cos 2x-7=0.$

66. Найти все пары чисел (x, y), для каждой из которых выполнено равенство

$$\sqrt{3-2x-x^2}\sin^2(2x-y)+\cos(4x-2y)=1+\frac{\cos^2(4x-2y)}{2}.$$

По теме 3. Аналитический отбор корней. Нестандартные тригонометрические уравнения Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

1. Найти все решения уравнения $\sin^4 4x+\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 3x-\sin x=4\cos(\frac{x}{2}-\frac{5\pi}{6})\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}),$

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt[6]{6(\sin 5{,}1\pi-\sin 0{,}7\pi)\sin^3 x}.$

2. Найти все решения уравнения $\operatorname{ctg}^2 3x+4\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})(1+\sin\frac{\pi-x}{3})=\cos x-1,$

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{\sin(\sqrt{192}\pi)\cos x}$.

3. Найти все решения уравнения $2\sin(3x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{1+4\sin 4x\cos 2x}$,

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{\cos(2x-\frac{\pi}{6})-1}.$

4. Решить уравнение $5\cos x+4\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-4=0.$

5. Решить уравнение $(5+\sin y)^2\sin^2 x+8\sin y\sin x+40\sin x+8\sin y+16\cos z+40=0.$

6. Решить уравнение $\frac{8}{(1+\cos 2x)(1+\cos z)}+\frac{8}{\cos x}+2+\frac{12}{1+\cos z}+(1+\cos z)(1+\sin y)=0.$

7. Решить уравнение $\dfrac{4}{(1-\cos 2x)(1+\sin z)}+\dfrac{4}{\sin x}+1+\dfrac{6}{1+\sin z}+\dfrac{(1+\sin z)(1+\cos y)}{2}=0.$

8. Решить уравнение $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{5+\cos 2y}{8}+\operatorname{tg} x+1+\dfrac{2\sin 2z}{5+\cos 2y}=0$.

9. Решить уравнение $|1-2\cos x+\cos 2x|=\sin x-2\sin 2x+\sin 3x.$

10. Решить систему уравнений $\begin{cases} |\cos 3x|=\sin y+\cos y \\ 2\sin^2 2x\cos 2x+\dfrac{3}{4}=-\sin 2y \end{cases}.$

11. Решить систему уравнений $\begin{cases} |\sin(3x+\dfrac{\pi}{4})|=\sin y-\cos y \\ \sin 2y+2\sin 2x=\dfrac{3}{4}+2\sin^3 2x \end{cases}.$

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} |\sin 3x|=-\sqrt{2}\sin y \\ \cos 2y+2\cos 2x\sin^2 2x=\dfrac{3}{4} \end{cases}.$

13. Решить систему уравнений $\begin{cases} |\cos(3x+\dfrac{\pi}{4})|=-\sqrt{2}\cos y \\ \cos 2y+2\sin 2x+\dfrac{3}{4}=2\sin^3 2x \end{cases}.$

14. Решить систему уравнений $\begin{cases} (\sin y-\cos x+1)(\operatorname{tg}^2(x+\dfrac{\pi}{6})+\operatorname{tg}^2(y+\dfrac{2\pi}{3}))=0, \\ (\cos x+\sin y)(2+\sin 2y+\cos y)=0. \end{cases}$

15. Вычислить $\operatorname{ctg}(\dfrac{11\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5})+\operatorname{ctg}(\dfrac{11\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5}).$

16. Решить систему уравнений $\begin{cases} (\cos x+\cos y-\sqrt{2})(\operatorname{tg}^2(x+\dfrac{\pi}{4})+\operatorname{ctg}^2(y+\dfrac{\pi}{4}))=0, \\ (\cos x\cos y-\dfrac{1}{2})(\sin y+\sin 2y-2)=0. \end{cases}$

По теме 4. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

1. Сколько положительных решений имеет уравнение $\operatorname{tg}(5\pi\cdot 2^{-x})=1$?

2. Сколько положительных решений имеет уравнение $\operatorname{tg}(3\arcsin x)=1$?

3. Вычислить $7(\operatorname{tg}(\dfrac{7\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{7})+\operatorname{tg}(\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{7})).$

4. Вычислить $\operatorname{ctg}(\dfrac{11\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5})+\operatorname{ctg}(\dfrac{11\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{5}).$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{2-|y|}(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}.$$

6. Найти все решения уравнения $\sqrt{3-\operatorname{tg}^2(\frac{3\pi x}{2})}\sin(\pi x)-\cos(\pi x)=2$, принадлежащие отрезку $[-3;\ 2]$.

7. Решить неравенство $1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}+\arccos(x+|\sin y|)\le 0$.

8. Найти значение:

а) $\arcsin(\sin 3{,}5)+\arccos\left(\cos(-1)\right)$;

б) $\arcsin(\sin 7)+\arccos(\cos 4)$;

в) $\arccos(\cos 5)+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}3)$; г) $\arcsin(\sin 2)+\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}4)$.

9. Вычислить:

а) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

б) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)$;

в) $\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

10. Сколько положительных решений имеет уравнение $\operatorname{tg}(5\pi\cdot 2^{-x})=1$?

11. Сколько положительных решений имеет уравнение $\operatorname{tg}(3\arcsin x)=1$?

12. Вычислить $7(\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{7})+\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{7}))$.

13. Решить уравнение

$$\sqrt{2-|y|}(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}.$$

Контрольная работа

Вариант № 1

1. Доказать, что функция $f(x)=4\cos^2 x+7\sin x\cdot\cos x+2\sin^2 x-\sqrt{102}$ отрицательна при всех $x\in R$.

2. Числа $\sqrt{2}\cos x$; $\sqrt{\cos 2x}$; $0{,}5\cos(x+\pi/4)$ являются членами геометрической прогрессии с номерами k; $k+1$; $k+2$. Найти все значения x и k, если пятый член прогрессии равен $16\sqrt{2}\cdot 3^{-1}5^{-0,5}$.

3. Доказать, что уравнение $\cos(\sin x) = 0,5$ не имеет решений.

4. Решить уравнение $\sqrt{2}\sin(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3})-2\sin(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{6}\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6})-2\cos(\frac{x}{6}+\frac{2\pi}{3}).$

5. Решить систему уравнений $\begin{cases}(\sin y-\cos x+1)(\mathrm{tg}^2(x+\frac{\pi}{6})+\mathrm{tg}^2(y+\frac{2\pi}{3}))=0,\\ (\cos x+\sin y)(2+\sin 2y+\cos y)=0.\end{cases}$

<u>Вариант № 2</u>

1. Доказать, что функция $f(x)=2\sin^2 x-6\cos^2 x-4\sin x\cos x+\sqrt{59}$ положительна при всех $x\in R$.

2. Числа $2^{-0,5}\sin x;\ \sqrt{-\cos 2x};\ 3\cos(x-\pi/4)$ являются членами геометрической прогрессии с номерами $k;\ k+1;\ k+2$. Найти все значения x и k, если четвертый член этой прогрессии равен $4\sqrt{2}\cdot 9^{-1}5^{-0,5}$.

3. Доказать, что уравнение $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2$ не имеет решений.

4. Решить уравнение $\sqrt{2}\sin(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3})-2\sin(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{6}\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6})-2\cos(\frac{x}{6}+\frac{2\pi}{3}).$

5. Решить систему уравнений $\begin{cases}(\cos x+\cos y-\sqrt{2})(\mathrm{tg}^2(x+\frac{\pi}{4})+\mathrm{ctg}^2(y+\frac{\pi}{4}))=0,\\ (\cos x\cos y-\frac{1}{2})(\sin y+\sin 2y-2)=0.\end{cases}$

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, контрольные работы и тесты.

Задание для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены *на оценивание:*

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

<u>Текущий контроль</u> предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных заданий и домашних работ, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях.

Формы, методы и периодичность текущего контроля определяет преподаватель.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «не зачтено».

Требование к выполнению заданий контрольной работы:

В контрольной работе студенту предлагается несколько задач (в зависимости от трудности) из приведенного списка. Задачи подбираются таким образом, чтобы их решение подтвердило владение основными методиками решения тригонометрических задач повышенной сложности. В случае, если задание выполнено более, чем на 60%, выставляется оценка «5,0», в противном случае выставляется оценка от 2,5 до 4,9 в зависимости от уровня написания работы. Оценка 2,5 и выше, считается положительной.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Методика решения тригонометрических задач повышенного уровня сложности» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины «Методика решения тригонометрических задач повышенного уровня сложности»» и степень сформированности компетенции. Критерии выставления оценок по зачету приведены ниже.

Каждый из теоретических вопросов, как правило, сопровождается задачей.

Вопросы к зачету:

1. Меры угловых величин. Тригонометрический круг. Радианная мера углов.

2. Тригонометрические функции. Определения, свойства, периодичность, графики.

3. Основные принципы преобразования тригонометрических выражений.

4. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Формулы приведения. Два случая. Метод расстановки знаков в формулах приведения.

5. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Формулы преобразования тригонометрических функций сумм (разностей) аргументом. Формулы преобразования сумм (разностей) тригонометрических функций в произведения. Формулы преобразования произведений тригонометрических функций.

6. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Формулы двойного угла. Формулы понижения степени. Универсальная тригонометрическая подстановка.

7. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Формулы тройного угла.

8. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Преобразование произведения косинусов с удваивающимся аргументом.

9. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Специальные формулы преобразования тангенса половинного угла.

10. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Метод введения дополнительного угла. Использование метода в задачах на ограниченность тригонометрических выражений.

11. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Задачи на доказательство условных тождеств.

12. Тригонометрические уравнения. Понятия обратных тригонометрических функций. Формулы записи решений элементарных тригонометрических уравнений. Модификация формул для использования в задачах с отбором корней.

13. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные тригонометрические уравнения. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к однородным уравнениям.

14. Линейные тригонометрические уравнения. Опасность применения универсальной тригонометрической подстановки. Альтернативный метод решения.

15. Задачи на тригонометрические уравнения, связанные с отбором корней по ограничениям ОДЗ. Метод отбора корней на тригонометрическом круге.

16. Аналитический метод отбора корней.

17. Искусственные, внешние и дополнительные ограничения, приводящие к отбору корней в тригонометрических уравнениях.

18. Отбор корней, возникающий в задачах на решение систем тригонометрических уравнений. Пересечение серий (аналитическое и на тригонометрическом круге). Переопределенные системы уравнений.

19. Задачи, решаемые методом встречных оценок.

20. Элементарные тригонометрические неравенства. Методы решения с помощью тригонометрического круга и с помощью графика.

21. Тригонометрические неравенства, решаемые с помощью специальной модификации обобщенного метода интервалов.

22. Обратные тригонометрические функции. Уравнения с обратными тригонометрическими функциями.

23. Обратные тригонометрические функции. неравенства с обратными тригонометрическими функциями.

Примерный вариант билета к зачету:

Контрольно-измерительный материал № 3.

1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Формулы тройного угла.

Доказать тождество $16\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = 3$.

2. Задачи, решаемые методом встречных оценок.

Решить уравнение $\sqrt{2-|y|}(5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \dfrac{5\pi^2}{4}$.

Зачет проводится в письменном виде. Критерии оценивания приведены ниже.

Критерии выставления зачета:

Критерии оценивания компетенций
Оценка «незачтено» выставляется обучающимся, не овладевшим методами решения тригонометрических задач повышенной сложности, не усвоившим стандартные подходы к решению подобных задач.
Оценка «зачтено» выставляется обучающимся, овладевшим в полной мере методами решения тригонометрических задач повышенной сложности, усвоившим стандартные подходы к решению подобных задач, и не допустившим ошибки в ходе решения.