

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
математического моделирования



М.Ш. Бурлуцкая

26.06.2022 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.В.ДВ.01.01 Линейное программирование**

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 01.03.04 Прикладная математика
- 2. Профиль подготовки:** Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**  
Кафедра математического моделирования
- 6. Составитель программы:** Карпова Антонина Петровна, к.ф.-м.н.
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим советом математического факультета, протокол № 0500-03 от 24.03.2022
- 8. Учебный год:** 2024/2025                      **Семестр:** 5

**9. Цели и задачи учебной дисциплины:** освоение понятий и результатов линейного программирования; формирование умений и навыков в решении задач; развитие навыков в постановке и решении практических задач. Основными задачами учебной дисциплины являются: - Изучить постановку задачи линейного программирования; - Научиться решать задачи линейного программирования прямым и двойственным симплекс-методом; решать транспортную задачу линейного программирования методом потенциалов; для данной задачи линейного программирования строить двойственную задачу и использовать связь между задачами для отыскания оптимального решения; - Приобрести навыки в постановке и решении практических задач, сводящихся к задачам линейного программирования.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** вариативная часть, дисциплина по выбору. Для освоения дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные по дисциплинам: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Дифференциальные уравнения» и «Функциональный анализ».

Студент должен свободно владеть инструментами математического анализа и линейной алгебры

Методы линейного программирования активно используются в прогнозных расчетах, планировании и организации производственных процессов, а также в в финансовой сфере.

Дисциплина является предшествующей для курсов «Численные методы», «Методы оптимизации».

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

Код	Название компетенции	Коды	Индикаторы	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен выявлять естественно-научную сущность проблем, возникающих при решении инженерных и экономических задач	ПК-1.1  ПК-1.2  ПК-1.3	Обладает базовыми знаниями в области математических наук, программирования и информационных технологий  Умеет собирать, обрабатывать, анализировать результаты исследований, полученных при решении инженерных и экономических задач  Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике	<i>знать:</i> имеющиеся в арсенале информационных технологий ресурсы для обработки и анализа данных, основные теоретические положения задачи линейного программирования;  <i>уметь:</i> использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения профессиональных задач  <i>владеть:</i> навыками работы с данными, полученными в результате практической или научной деятельности специалиста, эффективного использования ресурсов современных глобальных сетей в исследованиях

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.** (в соответствии с учебным планом) - 2зет / 72 зет.

**Форма промежуточной аттестации** (зачет/экзамен) зачет

### 13. Виды учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			5 семестр	№ семестра
Контактная работа		<b>72</b>	<b>72</b>	
в том числе:	лекции	34	34	
	практические			
	лабораторные			
Самостоятельная работа		<b>38</b>	<b>38</b>	
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации (зачет.)				
Итого:		<b>72</b>	<b>72</b>	

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
1.1	Введение.	1. Общая постановка задачи оптимизации. 2. Целевая функция. 3. Допустимое множество. Допустимое решение. 4. Оптимальное решение. Оптимальное множество.
1.2	Математическое и линейное программирование.	1. Постановка задачи математического программирования. 2. Классификация задач математического программирования. 3. Постановка задачи линейного программирования. 4. Примеры задач.
1.3	Постановка задачи линейного программирования.	1. Общая постановка задачи ЛП и различные формы ее записи (числовая, матричная). 2. Стандартная и каноническая формы задачи ЛП.
1.4	Теорема о существовании решения.	1. Теорема о существовании оптимального решения задачи ЛП в случае ограниченности целевой функции.
1.5	Графический метод решения задач ЛП при малом числе неизвестных.	1. Графический метод решения задач ЛП с двумя неизвестными. 2. Линия уровня целевой функции. 3. Алгоритм решения задачи ЛП графическим методом. 4. Сведение задач линейного программирования общего вида к задачам, допускающим решение графическим методом.
1.6	Симплекс-метод решения задачи ЛП общего вида.	1. Симплекс-метод решения задачи ЛП общего вида. 2. Допустимый вид системы ограничений. 3. Допустимый базис. Свободные и базисные неизвестные. Базисное решение.
1.7	Симплексные таблицы.	1. Симплексные таблицы. 2. Алгоритм решения задачи ЛП симплекс-методом. 3. Геометрическая интерпретация симплекс-алгоритма.
1.8	Прямая и двойственная задачи.	1. Постановка взаимно двойственных задач ЛП. 2. Симметричные взаимно двойственные задачи. 3. Экономический смысл двойственности. Основное неравенство для двойственных задач.
1.9	Теоремы двойственности.	1. Основная теорема двойственности и ее следствия. 2. Критерий оптимальности.
1.10	Двойственные задачи.	1. Двойственность в экономических задачах. 2. Общая постановка взаимно двойственных задач.

1.11	Виды двойственных задач.	1. Симметричные двойственные задачи. 2. Несимметричные двойственные задачи. 3. Применение теории двойственности в экономике.
1.12	Постановка закрытой транспортной задачи линейного программирования.	1. Транспортная задача ЛП. 2. Закрытая модель транспортной задачи. 3. Вырожденность в транспортных задачах. 4. Методы построения начального опорного плана транспортной задачи.
1.13	Открытая транспортная задача.	1. Открытая модель транспортной задачи. 2. Применение транспортных моделей в экономических задачах.
1.14	Геометрия линейного программирования.	1. Выпуклое множество. Выпуклая оболочка. 2. Полиэдр, политоп. Полиэдральный конус. Два способа описания полиэдров. 3. Геометрическая интерпретация симплекс-метода.

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Введение.	1	-	-	-	1
2	Математическое и линейное программирование.	1	-	-	3	4
3	Постановка задачи линейного программирования..	2	-	-	3	5
4	Теорема о существовании решения.	2	-	-	3	5
5	Графический метод решения задач ЛП при малом числе неизвестных.	2	-	-	3	5
6	Симплекс-метод решения задачи ЛП общего вида.	3	-	-	3	6
7	Симплексные таблицы.	3	-	-	3	6
8	Прямая и двойственная задачи.	2	-	-	2	4
9	Теоремы двойственности.	3	-	-	3	6
10	Двойственные задачи.	3	-	-	3	6
11	Виды двойственных задач.	3	-	-	3	6
12	Закрытая транспортная задача линейного программирования	3	-	-	3	6
13	Открытая транспортная задача.	3	-	-	3	6
14	Геометрия линейного программирования.	3	-	-	3	6
Итого:		34	-	-	38	72

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение курсовой работы, практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лабораторных занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 38 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 2-14 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение практических заданий по разделам 5,6, 10,12,13.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем для получения допуска к зачету.

При дистанционном обучении возможно создание электронного курса.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

### а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<i>Кийко П.В. Экономико-математические методы и модели / Кийко П.В –М. :Директ-Медиа, 2016.-109с // «Университетская библиотека онлайн»:электронно-библиотечная система. –URL: <a href="http://biblioclub.ru">http://biblioclub.ru</a></i>

### б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Попов А.М. Экономико-математические методы и модели : Учебник / А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М. :Юрайт, 2011. - 479 с.
3	Общий курс высшей математики для экономистов : Учебник для студ. вузов, обуч. по экон. специальностям / Б.М. Рудык, В.И. Ермаков, Р.К. Гринцевичюс и др. ; Под ред. В.И. Ермакова; Рос.экон. акад. им. Г.В. Плеханова. - М. : ИНФРА-М, 2007. - 656 с. : ил., табл. - (Высшее образование).
4	Карпова А.П. Линейное программирование : методические указания и контрольные задания, часть 1 / А.П.Карпова, М.И.Ковалева - Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. - 18 с.
5	<i>Красс М.С. Математика для экономических специальностей : Учебник для студ. вузов, обуч. по экон. специальностям / М. С. Красс. - 4-е изд., испр. - М. : Дело, 2003. - 702, [1] с. : ил. - Библиогр. : с. 686-687.</i>
6	<i>Крейн С.Г. Математическое программирование : Учебное пособие для студ. спец. 1719 - "Экономика и организация лесной пром. и лесного хоз-ва" / С.Г. Крейн. - Воронеж : Изд-во ВГУ, 1983. - 159 с. : ил.</i>

### в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
7	<i>Википедия : свободная энциклопедия : (<a href="http://ru.wikipedia.org">http://ru.wikipedia.org</a>).</i>
8	<i>Поисковые системы Google, Yandex, Rambler.</i>
9	<i>Полнотекстовая база «Университетская библиотека» : образовательный ресурс : &lt;UPL:<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>&gt;.</i>
10	<i>Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета : (<a href="http://www.lib.vsu.ru/">http // www.lib.vsu.ru/</a>).</i>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	<i>Карпова А.П. Линейное программирование : методические указания и контрольные задания, часть 1 / А.П.Карпова, М.И.Ковалева - Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. - 18 с.</i>
2	<i>Красс М.С. Математика для экономических специальностей : Учебник для студ. вузов, обуч. по экон. специальностям / М. С. Красс. - 4-е изд., испр. - М. : Дело, 2003. - 702, [1] с. : ил. - Библиогр. : с. 686-687.</i>

### 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционной платформы «Электронный университет ВГУ»

Лекции читаются с применением Ноутбука и проектора

Необходимое программное обеспечение: Math, LibreOffice 6, Mozilla Firefox, Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows 10 Enterprise 64 bit.

### 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель (проектор, ноутбук, экран, ....)

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины  
Учебные аудитории для проведения лекционных и лабораторных занятий, электронный каталог Зональной научной библиотеки ВГУ (<http://www.lib.vsu.ru>), Необходимо наличие в аудитории меловая доски или доски с маркером, компьютерной поддержки с установленной средой программирования.

### 19. Фонд оценочных средств:

#### Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	1. Введение 5. Графический метод решения задач ЛП при малом числе неизвестных. 7. Симплексные таблицы. 10. Двойственные задачи.	ПК-1	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2
2.	11. Виды двойственных задач. 12. Закрытая транспортная задача линейного программирования 13. Открытая транспортная задача.	ПК-1	ПК-1.2 ПК-1.3	Контрольная работа № 2
3	9. Теоремы двойственности. 4. Теорема о существовании решения.	ПК-1	ПК-1.1 ПК-1.2	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
4	5. Графический метод решения задач ЛП при малом числе неизвестных. 6. Симплекс-метод решения задачи ЛП общего вида. 8. Прямая и двойственная задачи.	ПК-1	ПК-1.1 ПК-1.2	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2
5	12. Закрытая транспортная задача линейного программирования 13. Открытая транспортная задача. 14. Геометрия линейного программирования.	ПК-1	ПК-1.2 ПК-1.3	Контрольная работа № 2
6	2. Математическое и линейное программирование. 3. Постановка задачи линейного программирования.	ПК-1	ПК-1.2	Контрольная работа № 1
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				Перечень вопросов к зачету

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Задание для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены *на оценивание*:

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий можно пользоваться калькулятором, нельзя пользоваться телефоном, ограничение по времени 45 минут

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то у обучающийся обязательно должен иметь компьютер, микрофон, камеру. Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование, то он обязан сообщить

преподавателю об этом за 7 дней. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени (работа длится в течение 45 минут).

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
При выполнении лабораторной или контрольной работы студент продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	Достаточный уровень	Зачтено
При выполнении лабораторной или контрольной работы студент не продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	–	Не зачтено

### Контрольная работа № 1

1. На предприятии имеется сырье видов I, II и III. Из него можно изготовить изделия типов A и B. Запасы сырья на предприятии составляют 40, 34 и 48 единиц соответственно. Изделие типа A дает прибыль 1 у.е, изделие типа B – 3 у.е. расход сырья на изготовление задан матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Составить план выпуска изделий, при котором предприятие получит наибольшую прибыль. Решить графически и симплекс методом.

### Контрольная работа № 2

1. На трех базах  $A_1, A_2, A_3$  имеется однородный груз в количествах 80, 60 и 60 т соответственно. Этот груз требуется привезти в четыре пункта потребления  $B_1, B_2, B_3$  и  $B_4$  соответственно в количествах 45, 35, 80 и 40 единиц. Стоимости перевозки единицы груза от поставщиков к потребителям указаны в матрице  $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ . Необходимо спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

2. Решить задачу линейного программирования с известным опорным планом  $X^0\{x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0\}$  симплексным методом.

$$\begin{cases} f(x) = -2x_3 - x_4 \rightarrow \max \\ x_1 - 2x_5 - x_6 = 2, \\ x_2 - x_5 - 2x_6 = 7, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 16, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 14, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$



## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Линейное программирование» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в середине семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях. Зачет длится 1,5 часа. Во время зачета не разрешается пользоваться тетрадями, учебниками и телефоном.

При проведении зачета учитываются результаты двух контрольных.

### Перечень вопросов к зачету:

1	Общая постановка задачи оптимизации. Целевая функция. Допустимое множество. Допустимое решение. Оптимальное решение. Оптимальное множество.
2	Постановка задачи математического программирования. Классификация задач математического программирования. Постановка задачи линейного программирования.
3	Общая постановка задачи ЛП и различные формы ее записи (числовая, матричная). Стандартная и каноническая формы задачи ЛП.
4	Графический метод решения задач ЛП при малом числе неизвестных. Линия уровня целевой функции.
5	Алгоритм решения задачи ЛП графическим методом. Сведение задач линейного программирования общего вида к задачам, допускающим решение графическим методом.
6	Теорема о существовании оптимального решения задачи ЛП в случае ограниченности целевой функции.
7	Симплекс-метод решения задачи ЛП общего вида. Допустимый вид системы ограничений. Допустимый базис. Свободные и базисные неизвестные. Базисное решение.
8	Симплексные таблицы. Алгоритм решения задачи ЛП симплекс-методом.
9	Прямая и двойственная задачи.
10	Основная теорема двойственности и ее следствия.
11	Критерий оптимальности двойственной задачи.
12	Симметричные и несимметричные двойственные задачи.
13	Транспортная задача ЛП. Открытая и закрытая модель транспортной задачи.
14	Критерий разрешимости транспортной задачи. Методы построения начального опорного плана транспортной задачи.
15.	Геометрическая интерпретация симплекс-метода.

### Перечень практических заданий

1	Решить двумерную задачу линейного программирования графическим методом
2	Применить симплекс метод для решения задач.
3	Решить открытую транспортную задачу
4	Решить закрытую транспортную задачу.
5	Двойственную задачу решить

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие показатели:

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи
- 3) умение работать с алгоритмами методов и информационными ресурсами;
- 4) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов обучения на зачете используется **шкала**: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенции	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным показателям по каждому из вопросов контрольно-измерительного материала. Умение применять на практике методы и средства для решения типовых задач, эффективного использования ресурсов современных глобальных сетей в исследованиях.	<i>Повышенный уровень</i>	Зачтено
Несоответствие ответа обучающегося одному из перечисленных показателей (к одному из вопросов контрольно-измерительного материала) и правильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. ИЛИ Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей (либо двум к одному вопросу, либо по одному к каждому вопросу контрольно-измерительного материала) и правильные ответы на два дополнительных вопроса в пределах программы. В ответе на основные вопросы контрольно-измерительного материала содержатся отдельные пробелы в знании.	<i>Базовый уровень</i>	Зачтено
Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. ИЛИ Несоответствие ответа обучающегося любым трем из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала). В ответе на основные вопросы контрольно-измерительного материала содержатся частичные знания, допускаются существенные ошибки при демонстрации умений применять на практике методы и средства для решения типовых задач.	<i>Пороговый уровень</i>	Зачтено
Несоответствие ответа обучающегося любым четверем из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала). В ответе на основные вопросы контрольно-измерительного материала содержатся отрывочные знания основ, способствующих решению задач профессиональной деятельности, допускаются грубые ошибки при демонстрации умений применять на практике методы для решения типовых задач.	–	Не зачтено

**Форма контрольно-измерительного материала**

УТВЕРЖДАЮ  
Зав. кафедрой математического  
моделирования

\_\_\_\_\_ Бурлуцкая М.И

\_\_\_.\_\_\_.20\_\_

Направление подготовки: 01.03.04 Прикладная математика

Дисциплина: Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

Курс: 3

Форма обучения: очная

Вид аттестации: промежуточная

Вид контроля: зачет

**Контрольно-измерительный материал № 11**

1. Теорема о существовании оптимального решения задачи ЛП в случае ограниченности целевой функции.
2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.
3. Найти решение транспортной задачи.

Преподаватель \_\_\_\_\_ Карпова А.П.