


МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_ системного анализа и управления  
наименование кафедры, отвечающей за реализацию дисциплины  
 \_\_\_\_\_ проф. Задорожний В.Г.  
подпись, расшифровка подписи  
26.05.2023г

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.В.01 Приложения и вычислительные методы спектральной теории

*Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом*

1. Код и наименование направления подготовки/специальности: \_\_\_\_\_  
Компьютерные технологии в задачах математической физики, оптимизации и управления
2. Профиль подготовки/специализация:  
*01.04.02 Прикладная математика и информатика*
3. Квалификация выпускника: *магистр*
4. Форма обучения *очная*
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:  
*кафедра системного анализа и управления*
6. Составители программы: Курбатов Виталий Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_  
*(ФИО, ученая степень, ученое звание)*
7. Рекомендована: \_\_\_\_\_  
*(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола)*  
Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики (протокол №7 от 26.05.2023)
8. Учебный год: 2023/2024 Семестр(ы)/Триместр(ы): 1

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- знакомство с прикладными задачами, решаемыми спектральными методами, стандартными алгоритмами и их реализациями в данной области для формирования умений и навыков проводить работу по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований; обработки, интерпретации, оформлению и представлению профессиональному обществу результаты проведенных исследований; использовании современных математических и компьютерных методов в задачах математической физики, оптимизации и оптимального управления.

*Задачи учебной дисциплины:*

- приобретение навыков в решении спектральных задач компьютерными средствами;
- приобретение навыков в оценке точности и времени работы компьютерных программ;
- приобретение навыков в тестировании собственных разработок;
- формирование навыков выбора метода решения поставленной задачи с учетом имеющихся ресурсов, а также теоретического обобщения научных данных, результатов экспериментов и наблюдений;
- формирование навыков анализа информации для обработки данных, полученных в рамках проведенных исследований;
- получение практических навыков использования современных наукоемких технологий и пакетов прикладных программ для решения задач анализа динамических систем, задач математической физики, оптимизации и оптимального управления;
- приобретение навыков выбора алгоритма и средств его реализации при решении задач управления и оптимизации.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

учебная дисциплина относится к формируемой участниками образовательных отношений части Блока 1. От студентов требуется знание курсов «Алгебры» и «Функционального анализа». Данная дисциплина необходима для глубокого понимания курсов «Дифференциальных уравнений», «Уравнений математической физики» и «Методов вычислений», практические навыки необходимы для прикладных курсов, связанных с дифференциальными уравнениями, и выполнения выпускной работы.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен проводить работы по обработке и анализу научно-технической информации, результатов исследований	ПК-1.3	Выбирает методы решения поставленной задачи с учетом имеющихся ресурсов, а также теоретического обобщения научных данных, результатов экспериментов и наблюдений	Знать: основы спектральной теории и основные вычислительные методы, сферу применения спектральных методов  Уметь: использовать стандартные компьютерные средства и писать собственные программы для решения спектральных задач  Владеть: навыками решения прикладных спектральных задач компьютерными средствами

ПК-3	Способен обрабатывать, интерпретировать, оформлять и представлять профессиональному обществу результаты проведенных исследований.	ПК-3.1	Использует современные методы анализа информации для обработки данных, полученных в рамках проведенных исследований	Знать: основы спектральной теории и основные вычислительные методы, сферу применения спектральных методов  Уметь: использовать стандартные компьютерные средства и писать собственные программы для решения спектральных задач  Владеть: навыками решения прикладных спектральных задач компьютерными средствами
ПК-4	Способен использовать современные математические и компьютерные методы в задачах математической физики, оптимизации и оптимального управления	ПК-4.1	Использует современные наукоемкие технологии и пакеты прикладных программ для решения задач анализа динамических систем, задач математической физики, оптимизации и оптимального управления.	Знать: основы спектральной теории и основные вычислительные методы, сферу применения спектральных методов  Уметь: использовать стандартные компьютерные средства и писать собственные программы для решения спектральных задач  Владеть: навыками решения прикладных спектральных задач компьютерными средствами
		ПК-4.3	Правильно выбирает алгоритм и средства его реализации при решении задач управления и оптимизации.	Знать: основы спектральной теории и основные вычислительные методы, сферу применения спектральных методов  Уметь: использовать стандартные компьютерные средства и писать собственные программы для решения спектральных задач  Владеть: навыками решения прикладных спектральных задач компьютерными средствами

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.—4/144.

### Форма промежуточной аттестации экзамен

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		1	№ семестра	...
Аудиторные занятия	48	48		
в том числе:	лекции	16	16	
	практические	16	16	
	лабораторные	16	16	
Самостоятельная работа	60	60		
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации (экзамен — __ час.)	36	36		
Итого:	144	144		

### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Матричные операции в пакете «Математика»	Умножение матриц. Норма матрицы. Определитель и след. Спектр.	ПВМСТ
1.2	Функции от матриц	Определение функции от матрицы путем подстановки с степенной ряд. Матричная экспонента. Преобразования подобия. Функции от диагональной матрицы. Приложения к построению решения системы диффе-	ПВМСТ

		ренциальных уравнений.	
1.3	Евклидовы пространства	Матрица Грама и биортогональные системы. Ортогонализация Грама–Шмидта. Свойства ортогональных систем. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля.	ПВМСТ
1.4	Нормальные матрицы	Нормальные матрицы. Унитарные матрицы. Унитарное подобие. Эрмитовы матрицы. Построение функций от эрмитовых матриц. Разложение Шура и функции от треугольной матрицы.	ПВМСТ
1.5	Полиномиальная интерполяция	Определение интерполяционного. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Барицентрическая форма многочлена. Примеры узлов и весов. Интерполяционный многочлен в форме Эрмита. Разделенные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона . .	ПВМСТ
1.6	Рациональная интерполяция	Постановка задачи рациональной интерполяции. Остаточный член рациональной интерполяции. Аппроксимация Паде. Интерполяция с заданными полюсами. Наилучшее равномерное приближение.	ПВМСТ
1.7	Вычисление функций от матриц	Вычисление многочлена от матрицы. Вычисление рациональной функции от матрицы. Прикладные примеры функций от матриц. Способы приближенного вычисления аналитических функций от матриц. Уравнение Сильвестра.	ПВМСТ
1.8	Обусловленность	Абсолютные и относительные ошибки. Числа обусловленности отображения. Число обусловленности матрицы. Обусловленность скалярного произведения. Обусловленность собственных. Влияние округлений. Обусловленность функции от матрицы.	ПВМСТ
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Матричные операции в пакете «Математика»	Умножение матриц. Норма матрицы. Определитель и след. Спектр.	ПВМСТ
2.2	Функции от матриц	Определение функции от матрицы путем подстановки с степенной ряд. Матричная экспонента. Преобразования подобия. Функции от диагональной матрицы. Приложения к построению решения системы дифференциальных уравнений.	ПВМСТ
2.3	Евклидовы пространства	Матрица Грама и биортогональные системы. Ортогонализация Грама–Шмидта. Свойства ортогональных систем. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля.	ПВМСТ
2.4	Нормальные матрицы	Нормальные матрицы. Унитарные матрицы. Унитарное подобие. Эрмитовы матрицы. Построение функций от эрмитовых матриц. Разложение Шура и функции от треугольной матрицы.	ПВМСТ
2.5	Полиномиальная интерполяция	Определение интерполяционного. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Барицентрическая форма многочлена. Примеры узлов и весов. Интерполяционный многочлен в форме Эрмита. Разделенные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона . .	ПВМСТ
2.6	Рациональная интерполяция	Постановка задачи рациональной интерполяции. Остаточный член рациональной интерполяции. Аппроксимация Паде. Интерполяция с заданными полюсами. Наилучшее равномерное приближение.	ПВМСТ
2.7	Вычисление функций от матриц	Вычисление многочлена от матрицы. Вычисление рациональной функции от матрицы. Прикладные примеры функций от матриц. Способы при-	ПВМСТ

		ближенного вычисления аналитических функций от матриц. Уравнение Сильвестра.	
2.8	Обусловленность	Абсолютные и относительные ошибки. Числа обусловленности отображения. Число обусловленности матрицы. Обусловленность скалярного произведения. Обусловленность собственных. Влияние округлений. Обусловленность функции от матрицы.	ПВМСТ
<b>3. Лабораторные работы</b>			
2.9	Лабораторная работа 1	Знакомство со структурой пакета «Математика» и его командами.	ПВМСТ
2.10	Лабораторная работа 2	Создание случайных матриц заданного класса. Построение ортогональных и биортогональных базисов.	ПВМСТ
2.11	Лабораторная работа 3	Построение интерполяционных многочленов и рациональных функций. Подстановка в них матриц. Способы проверки результатов и точности вычислений.	ПВМСТ
2.12	Лабораторная работа 4	Компьютерная реализация конкретных прикладных программ.	ПВМСТ

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Матричные операции в пакете «Математика»	2	2	2	7	13
2	Функции от матриц	2	2	2	8	14
3	Евклидовы пространства	2	2	2	7	13
4	Нормальные матрицы	2	2	2	8	14
5	Полиномиальная интерполяция	2	2	2	7	13
6	Рациональная интерполяция	2	2	2	8	14
7	Вычисление функций от матриц	2	2	2	7	13
8	Обусловленность	2	2	2	8	14
	Итого:	16	16	16	60	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Курс предполагает отведение большого числа разделов на самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами данные разделы.

Материал по каждой теме излагается последовательно с использованием ранее введенных определений, обозначений и доказательств. Необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного на занятиях материала.

Желателен просмотр материала по данной учебной дисциплине с опережением лекций с использованием рекомендуемой в данной учебной программе литературы.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учебное пособие / Г. И. Мар-

	чук. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-0892-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/210302">https://e.lanbook.com/book/210302</a> (дата обращения: 14.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Курбатов, В. Г. Вычислительные методы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — 326 с.
3	Меркулова, Н. Н. Методы приближенных вычислений : учебное пособие / Н. Н. Меркулова, М. Д. Михайлов. — 2-е изд. — Томск : ТГУ, [б. г.]. — Часть III — 2011. — 184 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/44922">https://e.lanbook.com/book/44922</a> (дата обращения: 14.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4	Меркулова, Н. Н. Методы приближенных вычислений : учебное пособие / Н. Н. Меркулова, М. Д. Михайлов. — 2-е изд. — Томск : ТГУ, 2014. — 764 с. — ISBN 978-5-94621-420-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/76708">https://e.lanbook.com/book/76708</a> (дата обращения: 14.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Higham, N. J. Functions of matrices: theory and computation / N. J. Higham. — Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. — xx+425 p.
2	Курбатов, В. Г. Основы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Научная книга, 2015. — 122 с.
3	Курбатов, В. Г. Пакет «Математика» в прикладных научных исследованиях : учебное пособие / В. Г. Курбатов, В. Е. Чернов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. — 240 с.
4	Воеводин, В. В. Вычислительная математика и структура алгоритмов : учебное пособие / В. В. Воеводин. — 2-е изд. — Москва : ИНТУИТ, 2016. — 145 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/100738">https://e.lanbook.com/book/100738</a> (дата обращения: 14.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5	Деммель, Д. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель. — М. : Мир, 2001. — 430 с.
6	Голуб, Д. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1.	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a> );
2.	Электронная библиотека технического ВУЗа «Консультант студента» (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://www.studmedlib.ru">https://www.studmedlib.ru</a> )
3.	Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a> )
4.	ПВМСТ / В. Г. Курбатов. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы, онлайн-курсы, ЭУМК

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a> );
2	ПВМСТ / В. Г. Курбатов. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):** Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс ПВМСТ, размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.5.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Учебная аудитория для проведения лекций: специализированная мебель, компьютер (ноутбук), мультимедийное оборудование (проектор, экран).

Учебная аудитория для проведения лабораторных работ: специализированная мебель, персональные компьютеры для индивидуальной работы с возможностью подключения к сети «Интернет», мультимедийное оборудование (проектор, экран). ОС Windows10, интернет-браузер (GoogleChrome, Mozilla Firefox), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами, таблицами (MS Office, МойОфис, LibreOffice), ПО Matlab, ПО Scilab, ПО Mathematica.

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Раздел 1. Матричные операции в пакете «Математика» Раздел 2. Функции от матриц Раздел 3. Евклидовы пространства Раздел 4. Полиномиальная интерполяция Раздел 5. Рациональная интерполяция Раздел 6. Вычисление функций от матриц Раздел 7. Интеграл Лебега Раздел 8. Обусловленность	ПК-1, ПК-3, ПК-4	ПК-1.3, ПК-3.1, ПК-4.1, ПК4.3.	<i>Лабораторные работы</i>
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				<i>Перечень вопросов см. ниже.</i>

**20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

**20.1. Текущий контроль успеваемости**

**П.1:** Контроль текущей успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: домашние задания, лабораторные работы.

Задания для лабораторных работ перечислены в учебном пособии [2], см. п. 15, а также продублированы в электронном ресурсе ПВМСТ.

*Описание технологии проведения собеседования по лабораторным работам*  
Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины организовано в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

*Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания*

**Оценка «зачтено»** выставляется, если обучающийся предъявляет работающие компьютерные решения большинства заданий лабораторных работ и показывает понимание реализуемых алгоритмов в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

**Оценка «незачтено»** выставляется, если обучающийся не в состоянии объяснить алгоритмы и запрограммировать более 1/3 всех заданий; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

**П.2:Перечень вопросов для проведения тестирования по дисциплине «Приложения и вычислительные методы спектральной теории»**

### Вопросы с вариантами ответов

Критерий оценивания	Шкала оценок
Верный ответ	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

1. Оператор  $A: L \rightarrow M$  называют линейным, если

а) он удовлетворяет следующим условиям: 1)  $A(x + y) = Ax + Ay$  для всех  $x, y \in L$ ;

2)  $A(\alpha x) = \alpha Ax$  для любого числа  $\alpha$  и любого  $x \in L$ .

б) он действует между линейными пространствами, т.е. пространства  $L$  и  $M$  линейны

в) он биективен

г) он обратим

Ответ: а)

2. Оператор  $A: L \rightarrow M$  называют инъективным, если

а) для любых векторов  $x_1, x_2 \in L$  из  $x_1 \neq x_2$  следует, что  $Ax_1 \neq Ax_2$

б) для любого  $y \in M$  существует  $x \in L$  такой, что  $Ax = y$

в) он переводит равные векторы в равные

г) он не является биективным

Ответ: а)

3. Оператор  $A: L \rightarrow M$  называют сюръективным, если

а) для любого  $y \in M$  существует  $x \in L$  такой, что  $Ax = y$

б) для любых векторов  $x_1, x_2 \in L$  из  $x_1 \neq x_2$  следует, что  $Ax_1 \neq Ax_2$

в) он переводит равные векторы в равные

г) он не является биективным

Ответ: а)



4. Для обратного к произведению двух обратимых операторов справедлива формула

а)  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

б)  $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

в)  $(AB)^{-1} = B^{-1} - A^{-1}$

г)  $(AB)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

Ответ: а)

5. Для любого линейного оператора  $A: L \rightarrow M$  справедливо равенство

а)  $\dim \text{Ker} A + \dim \text{Ran} A = \dim L$

б)  $\dim \text{Ker} A = 0$

в)  $\dim \text{Ker} A = \dim L$

г)  $\dim \text{Ran} A = \dim M$

Ответ: а)

6. Сопряженно транспонированную (эрмитово сопряженную) к матрице  $A$  обозначают символом

а)  $A^H$  или  $A^*$

б)  $A'$

в)  $A^{-1}$

г)  $A^T$

Ответ: а)

7. Матрицей перестановок называют квадратную матрицу, у которой

а) в каждой строке и в каждом столбце имеется ровно один элемент, отличный от нуля, и он равен единице

б) строки заменены столбцами, столбцы – строками

в) переставлены некоторые строки

г) переставлены некоторые столбцы

Ответ: а)

8. По какой формуле определяется норма линейного оператора?

а)  $\|A\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$

б)  $\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$

в)  $\|A\| = \sum_{j=1}^n |a_{jj}|$

г)  $\|A\| = \sup_{z \neq 0} \|Az\|$

Ответ: а)

9. По какой формуле преобразуется матрица линейного оператора при замене базиса?

а)  $A_{g \rightarrow g} = T A_{f \rightarrow f} T^{-1}$

б)  $A_{g \rightarrow g} = T A_{f \rightarrow f} T^H$

в)  $A_{g \rightarrow g} = T A_{f \rightarrow f} T$

г)  $A_{g \rightarrow g} = T^{-1} A_{f \rightarrow f} T^{-1}$

Ответ: а)

10. Какое число называют следом квадратной матрицы  $A$ ?

а)  $\text{tr } A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$

б)  $\text{tr } A = \sum_{j=1}^n |a_{jj}|$

в)  $\text{tr } A = \sum_{j=1}^n |a_{jj}|^2$

г)  $\text{tr } A = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{jj}|^2}$

Ответ: а)

11. Что называют спектром квадратной матрицы  $A$ ?

а) множество всех ее собственных значений

б) функцию  $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$

в) множество векторов  $h$ , удовлетворяющих уравнению  $Ah = \lambda h$

г) множество чисел, стоящих на главной диагонали

Ответ: а)

12. Какая из приводимых ниже формул является определением аналитической функции  $f(A)$  квадратной матрицы  $A$ ?

а)  $f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz$

б)  $f(A) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$

в)  $f(A) = \det(\lambda I - A)$

г)  $f(A) = \text{tr}(\lambda I - A)$

Ответ: а)

### Вопросы с кратким текстовым ответом

Критерий оценивания	Шкала оценок
Должен быть сформулирован ответ из указанных вариантов (один или несколько) или аналогичные по сути ответы с альтернативными терминами и определениями	2 балла
Неверный ответ	0 баллов

1. Пусть  $z_i w_j$  – столбцы. Какой размер имеет матрица  $w^H z$ ?

Ответ:  $1 \times 1$

2. Пусть  $z_i w_j$  – столбцы высоты  $n$ . Какой размер имеет матрица  $z w^H$ ?

Ответ:  $n \times n$

3. Как связаны спектры подобных матриц?

Ответ: равны (совпадают)

4. Как связаны характеристические многочлены подобных матриц?

Ответ: равны (совпадают)

5. Может ли контур иметь самопересечения?

Ответ: нет

6. Как называют матрицу, внедиагональные элементы которой равны нулю?

Ответ: диагональной (матрицей)

### Вопросы с вариантами ответов

Критерий оценивания	Шкала оценок
Верный ответ	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

1. Когда матрицы  $A$  и  $D$  называют подобными?

а) если существует такая обратимая матрица  $T$ , что  $D = TAT^{-1}$

б) если  $A$  и  $D$  имеют одинаковый спектр

в) если  $A$  и  $D$  коммутируют

г) если  $A$  и  $D$  получаются друг из друга путем перестановки строк или столбцов

Ответ: а)

2. Матрица  $A$  является диагональной, причем на диагонали стоят числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Как выглядит матрица  $f(A)$ ?

а) матрица  $f(A)$  является диагональной, на диагонали стоят числа

$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ .

б) матрица  $f(A)$  является единичной

в) матрица  $f(A)$  является состоит из чисел  $f(a_{ij})$ , где  $a_{ij}$  пробегает множество всех элементов матрицы

г) матрица  $f(A)$  является подобной матрице  $A$ ; матрица, осуществляющее подобие, зависит от функции  $f$

Ответ: а)

3. Как определяется матрица Грама системы векторов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ?

а) она состоит из всевозможных скалярных произведений  $\langle f_i, f_j \rangle$

б) она составлена из координат этих векторов, записанных в виде строк

в) она составлена из координат этих векторов, записанных в виде столбцов

г) она состоит из слов True и False в зависимости от того, выражается очередной вектор через предыдущие или нет

Ответ: а)

4. Для чего предназначен алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта?

а) для преобразования системы векторов в ортонормированную систему

б) для вычисления матрицы Грама

в) для проверки ортогональности системы векторов

г) для разложения вектора по ортогональному базису

Ответ: а)

5. По какой из приводимых ниже формул вычисляются коэффициенты разложения вектора  $x$  по ортонормированному базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ?

а)  $c_k = \langle x, e_k \rangle$

б)  $c_k = \langle x, e_k \rangle e_k$

в)  $c_k = x - c_k$

г)  $x = \sum_{k=1}^n c_k e_k$

Ответ: а)

6. Как выглядит тождество Парсеваля для счетного ортонормированного базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ ?

а)  $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2 = \|x\|^2$

б)  $\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2$

в)  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

г)  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Ответ: а)

7. Из чего состоит ортогональное дополнение к подпространству Мевклидова пространства  $E$ ?

а) из векторов, ортогональных всем векторам из  $M$

б) из векторов подпространства  $M$ , подвергнутых процедуре ортогонализации

в) из векторов, каждый из которых ортогонален хотя бы одному вектору из  $M$

г) из линейных функционалов, определенных на  $M$

Ответ: а)

8. Какие матрицы  $G$  называют нормальными?

а) удовлетворяющие тождеству  $GG^H = G^H G$

б) удовлетворяющие тождеству  $G^H = G$

в) удовлетворяющие тождеству  $GG^H G = G$

г) удовлетворяющие тождеству  $GG^H = G^H G = I$

Ответ: а)

8. Какие матрицы  $G$  называют унитарными?

а) удовлетворяющие тождеству  $GG^H = G^H G = I$

- б) удовлетворяющие тождеству  $G^H = G$
  - в) удовлетворяющие тождеству  $GG^H G = G$
  - г) удовлетворяющие тождеству  $GG^H = G^H G$
- Ответ: а)

8. Какие матрицы  $G$  называют эрмитовыми или самосопряженными?

- а) удовлетворяющие тождеству  $G^H = G$
  - б) удовлетворяющие тождеству  $GG^H = G^H G$
  - в) удовлетворяющие тождеству  $GG^H G = G$
  - г) удовлетворяющие тождеству  $GG^H = G^H G = I$
- Ответ: а)

11. Когда матрицы  $A$  и  $D$  называют унитарно подобными?

- а) если существует такая унитарная матрица  $U$ , что  $D = UAU^{-1}$
- б) если  $A$  и  $D$  имеют одинаковое число обусловленности
- в) если  $A$  и  $D$  коммутируют
- г) если  $A$  и  $D$  имеют одинаковый спектр

12. Каким из перечисленных ниже свойств обладает спектр эрмитовой матрицы?

- а) он состоит из действительных чисел
  - б) он состоит из положительных чисел
  - в) он состоит из неотрицательных чисел
  - г) он состоит из чисто мнимых чисел
- Ответ: а)

### Вопросы с кратким текстовым ответом

Критерий оценивания	Шкала оценок
Должен быть сформулирован ответ из указанных вариантов (один или несколько) или аналогичные по сути ответы с альтернативными терминами и определениями	2 балла
Неверный ответ	0 баллов

2 – верный ответ

0 – неверный ответ

1. Как называют преобразование матрицы, при котором строки записывают как столбцы, а столбцы – как строки?

Ответ: транспонированием

2. Как называют подпространство линейного пространства, которое линейный оператор переводит в себя?

Ответ: инвариантное подпространство

3. Как связаны определители подобных матриц?

Ответ: равны (совпадают)

4. Как называют линейное пространство, на котором задано скалярное произведение?

Ответ: евклидовым

5. Как называют произведение числа строк матрицы на число ее столбцов?

Ответ: размером матрицы

6. Как называют функцию, являющуюся отношением двух многочленов?

Ответ: рациональной функцией

### Вопросы с вариантами ответов

Критерий оценивания	Шкала оценок
Верный ответ	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

1. Каким из перечисленных свойств обладает спектр унитарной матрицы?

а) он состоит из чисел, равных по модулю единице

б) он состоит из положительных чисел

в) он состоит из действительных чисел

г) он состоит из число мнимых чисел

Ответ: а)

2. Что называют разложением Холецкого положительной матрицы  $A$ ?

а) представление в виде  $A = U^H U$ , где  $U$  – треугольная матрица с положительными числами на диагонали

б) представление в виде  $A = T D T^{-1}$ , где  $T$  – обратимая матрица

в) представление в виде  $A = U D U^{-1}$ , где  $U$  – унитарная матрица

г) представление в виде  $A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - D)^{-1} dz$

Ответ: а)

3. Что называют сингулярным разложением матрицы  $A$ ?

а) представление в виде  $A = U D V^H$ , где  $U$  и  $V$  – унитарные матрицы, а  $D$  – диагональная

б) представление в виде  $A = U^H U$ , где  $U$  – треугольная матрица с положительными числами на диагонали

в) представление в виде  $A = U D U^{-1}$ , где  $U$  – унитарная матрица, а  $D$  – треугольная

г) представление в виде  $A = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(z)(zI - D)^{-1} dz$

Ответ: а)

4. Как выглядит интерполяционный многочлен функции  $f$  в форме Лагранжа?

а)  $p(z) = \sum_{k=1}^n f(z_k) l_k(z)$ , где  $l_k$  – фундаментальные многочлены

б)  $p(z) = \sum_{k=0}^n c_k z_k$

в)  $p(z) = \sum_{k=1}^n c_k (z - z_k)$

г)  $p(z) = \sum_{k=0}^n c_k (z - z_k)^k$

Ответ: а)

5. Как определяется аппроксимация Паде степени  $L/M$  в окрестности точки  $z_0$  функции  $f$ ?

а) это рациональная функция  $r$  степени  $L/M$ , обладающая свойством  $f(z) = r(z) + O((z - z_0)^{L+M+1})$  при  $z \rightarrow z_0$ .

б) это рациональная функция  $r$  со степенями числителя и знаменателя соответственно  $L$  и  $M$ , в которой как числитель, так и знаменатель, приближают  $f$

в) это отношение двух многочленов Тейлора в окрестности точки  $z_0$  функции  $f$ , степеней  $L$  и  $M$  соответственно

г) это рациональная функция, имеющая  $L$  нулей и  $M$  полюсов

Ответ: а)

6. Через какую функцию от матрицы выражается решение системы линейных дифференциальных уравнений  $y'(t) = Ay(t)$ ?

а) через экспоненциальную функцию  $e^{At}$

б) через логарифмическую функцию

в) через гамма – функцию

г) через степенную функцию

Ответ: а)

7. Как выглядит матричное уравнение Сильвестра?

а)  $AY + YB = C$

б)  $y'(t) = Ay(t)$

в)  $\det(\lambda I - A) = 0$

г)  $A = U^H U$

Ответ: а)

8. Как выглядит квадратичное матричное уравнение Риккати?

а)  $A^H X + XA + XRX + Q = 0$

б)  $y'(t) = Ay(t)$

в)  $\det(\lambda I - A) = 0$

г)  $AY + YB = C$

Ответ: а)

9. Что называют числом обусловленности матрицы A?

а)  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

б)  $\kappa(A) = \|A\| / \|A^{-1}\|$

в)  $\kappa(A) = \|A\| + \|A^{-1}\|$

г)  $\kappa(A) = \|A\| - \|A^{-1}\|$

Ответ: а)

10. Что называют разложением Шура матрицы A?

а) представление в виде  $A = UBU^H$ , где U – унитарная матрица, а B – треугольная

б) представление в виде  $A = U^H U$ , где U – треугольная матрица с положительными числами на диагонали

в) представление в виде  $A = UU^{-1}$ , где U – унитарная матрица

г) представление в виде  $A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(zI - D)^{-1} dz$

Ответ: а)

### Вопросы с кратким текстовым ответом

Критерий оценивания	Шкала оценок
Должен быть сформулирован ответ из указанных вариантов (один или несколько) или аналогичные по сути ответы с альтернативными терминами и определениями	2 балла
Неверный ответ	0 баллов

2 – верный ответ

0 – неверный ответ

1. Пусть A – квадратная матрица. Чему равен предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n$ ?

Ответ:  $e^A$  (экспоненциальной функции от A)

2. Можно ли построить интерполяционный многочлен в форме Ньютона по кратным узлам интерполяции?

Ответ: да

3. Чему равен определитель Грама линейно зависимой системы векторов?

Ответ: нулю

4. Можно ли в разрывную функцию сигнум подставлять хоть какие-то квадратные матрицы?

Ответ: да

*Описание технологии проведения тестирования:*



Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ», адрес курса — <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=18370>. Тест составляется из материалов ФОСа, формируется системой автоматически путём добавления случайных 10 вопросов, количество которых соответствует имеющимся образцам билетов. Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 30 минут». Критерий оценивания: **Оценка «зачтено»** выставляется, если обучающийся правильно ответил более, чем на половину тестов.

## 20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по экзаменационным билетам к экзамену.

### Перечень вопросов к экзамену

1. Линейные пространства. Линейные операторы. Линейная зависимость и независимость. Нормы. Прямые суммы и разложение единицы.
2. Векторы и матрицы. Матрица линейного оператора. Норма матрицы. Замена базиса.
3. Определитель и след. Матрица перестановок. Блочные матрицы.
4. Спектр и характеристический многочлен. Спектральный радиус.
5. Функции от матриц.
6. Матричная экспонента.
7. Спектральные проекторы.
8. Преобразование подобия. Матрицы простой структуры.
9. Бескоординатная форма теоремы Жордана.
10. Евклидовы пространства. Матрица Грама и биортогональные системы.
11. Ортогонализация Грама–Шмидта. Свойства ортогональных систем.
12. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля. Существование ортонормированного базиса.
13. Гильбертовы пространства. Ортогональное дополнение.
14. Сопряженный оператор.
15. Инвариантные подпространства. Нормальные матрицы.
16. Унитарные матрицы. Унитарное подобие.
17. Эрмитовы матрицы.
18. Разложение Шура. QR-разложение.
19. QR-алгоритм.
20. Разложение Холецкого.
22. Сингулярное разложение.
23. Определение интерполяционного многочлена. Матрица Вандермонда.
24. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
25. Интерполяционный многочлен в форме Эрмита.
26. Разделенные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.
27. Постановка задачи некротной рациональной интерполяции.
28. Задача кратной рациональной интерполяции.
29. Остаточный член рациональной интерполяции.
30. Аппроксимация Паде.
31. Наилучшее равномерное приближение
32. Функции от треугольной матрицы.
33. Вычисление многочлена от матрицы.
34. Вычисление рациональной функции от матрицы.

35. Прикладные примеры функций от матриц.
36. Способы приближенного вычисления функций от матриц.
37. Точные представления матричной экспоненты.
38. Уравнение Сильвестра.
39. Квадратное уравнение.
40. Уравнение Риккати.

Образец билета к экзамену

1. Матричная экспонента.
2. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
3. Вычисление рациональной функции от матрицы.

*Описание технологии проведения экзамена*

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

*Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания*

**Оценка «отлично»** выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, содержащегося в основных и дополнительных рекомендованных литературных источниках, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы, за умение анализировать изучаемые явления в их взаимосвязи и диалектическом развитии, применять теоретические положения при решении практических задач; обучающийся подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «хорошо»** выставляется за твердое знание основного (программного) материала, включая расчеты (при необходимости), за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы, за умение применять теоретические положения для решения практических задач; обучающийся демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «удовлетворительно»** выставляется за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала, за слабое применение теоретических положений при решении практических задач; обучающийся подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

**Оценка «неудовлетворительно»** выставляется за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в расчетах, за незнание основных понятий дисциплины; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Задания раздела 20.1, п. 2 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных знаний по результатам освоения данной дисциплины.