

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**  
Заведующий кафедрой  
математического моделирования



М.Ш. Бурлуцкая

25.05.2023г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.В.11 Математические модели физических процессов**

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 01.03.01 Математика
- 2. Профиль подготовки:**  
Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
- 3. Квалификация выпускника:** Бакалавр
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**  
Кафедра математического моделирования
- 6. Составитель программы:** Орлов Владимир Петрович, д.ф.-м.н., профессор
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим советом математического факультета, протокол № 0500-06 от 25.05.2023
- 8. Учебный год:** 2026/2027                      **Семестр:** 8

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

### Цели изучения дисциплины:

- освоение студентами основных понятий и методов описания математических моделей физических процессов в терминах дифференциальных уравнений с частными производными;

- расширение знаний обучающихся о современных математических моделях, описывающих физические процессы в жидких средах.

### Задачи учебной дисциплины:

- изучение теоретических основ моделирования процессов в жидких средах

- овладение практическими навыками использования векторного и тензорного анализа для построения математических моделей гидродинамики

**10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:** учебная дисциплина «Математические модели физических процессов» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

Теория математических моделей физических процессов лежит в основе математического моделирования конкретных задач в различных областях техники, механики строительства. Курс опирается на основные физические законы, дисциплины «Дифференциальные уравнения» и «Математический анализ». Дисциплина является предшествующей для курсов «Информационная безопасность», «Дополнительные главы теории гармонических функций» и др.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Коды	Индикаторы	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способность сбора, обработки, анализа и исследований в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	ПК-1.1	анализирует информацию с целью составления адекватной математической модели изучаемого объекта	<b>Знать:</b> основные методы обработки, анализа и исследования в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики; <b>Уметь:</b> собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики; <b>Владеть:</b> опытом научно-исследовательской деятельности в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики.
		ПК-1.2	Применяет классические методы исследования математических моделей в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	
		ПК-1.3	Использует методы исследования уравнений в частных производных и уравнений математической физики с целью анализа качественных свойств решений составленных математических моделей	

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 2 /72**

**Форма промежуточной аттестации – зачет**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам

		8 семестр	
	Аудиторные занятия	38	38
в том числе:	лекции	12	12
	практические	26	26
	лабораторные	0	0
	Самостоятельная работа	34	34
	Форма промежуточной аттестации	0	0
	<b>Итого:</b>	<b>72</b>	<b>72</b>

### 13.1. Содержание дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Описание движения жидкостей	Определения и основные понятия. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения жидкостей. Эйлеровы и Лагранжевы координаты. Формулы перехода. Виды жидкостей.	Moodle: URL: <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668</a>
1.2	Элементы механики	Тензор напряжений. Тензор скоростей деформаций. Тензор деформаций. Реологические соотношения. Уравнение неразрывности. Классификация сплошных сред.	Moodle: URL: <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668</a>
1.3	Уравнения движения жидкостей	Уравнения движения идеальной жидкости. Уравнения движения вязкой жидкости. Плоское безвихревое движение. Функция тока. Потенциал скорости. Комплексная скорость и комплексный потенциал. Примеры комплексных потенциалов. Источники и стоки. Вихреисточники.	Moodle: URL: <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668</a>
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Описание движения жидкостей	Определения и основные понятия. Подходы Эйлера и Лагранжа описания движения жидкостей. Эйлеровы и Лагранжевы координаты. Формулы перехода. Виды жидкостей.	Moodle: URL: <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668</a>
2.2	Элементы механики	Тензор напряжений. Тензор скоростей деформаций. Тензор деформаций. Реологические соотношения. Уравнение неразрывности. Классификация сплошных сред.	Moodle: URL: <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668</a>
2.3	Уравнения движения жидкостей	Уравнения движения идеальной жидкости. Уравнения движения вязкой жидкости. Плоское безвихревое движение. Функция тока. Потенциал скорости. Комплексная скорость и комплексный потенциал. Примеры комплексных потенциалов. Источники и стоки. Вихреисточники.	Moodle: URL: <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668</a>

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная	Всего

			ие	е	работа	
1	Описание движения жидкостей	4	8	0	11	23
2	Элементы механики	4	9	0	11	24
3	Уравнения движения жидкостей	4	9	0	12	25
	<b>Итого:</b>	<b>12</b>	<b>26</b>	<b>0</b>	<b>34</b>	<b>72</b>

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются следующие виды учебной работы: лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Математические модели физических процессов» обучающимся следует внимательно слушать и тщательно конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольных и лабораторных работ) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

При подготовке к занятиям всех видов рекомендуется пользоваться интернет-курсом на образовательной платформе «Электронный университет ВГУ»: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668> .

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

## а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 112 с.
2	Звягин В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, М.В. Турбин. - М.: КРАСАНД, 2012. - 416 с.
3	Ландау Л.Д. Теоретическая физика: В 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т. 6 : Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц ; под ред. Л.П. Питаевского. - Изд. 5-е, стер. - 2003. - 731 с.: ил. - Предм. указ.: с. 730-731.
4	Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебник для студ. вузов, обуч. по специальности 010500 «Механика» / Л.Г. Лойцянский. - Изд. 7-е, испр. – М.: Дрофа, 2003. - 840 с.: ил. - (Классики отечественной науки) (Высшее образование). - Имен., предм. указ.: с. 831-840.
6	Рассел Дж. Уравнения Навье-Стокса / Дж. Рассел, Р. Кон. – Изд-во VSD, 2013. - 104 с.

## б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
7	Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2011. - / <a href="https://www.studmed.ru/ladyzhenskaya-oa-matematicheskie-voprosy-dinamiki-vyazkoy-neszhimaemoy-zhidkosti_a3cdf092831.html">https://www.studmed.ru/ladyzhenskaya-oa-matematicheskie-voprosy-dinamiki-vyazkoy-neszhimaemoy-zhidkosti_a3cdf092831.html</a> .
8	Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения / В.В.Мазалов. - СПб.: Лань, 2010. - 446 с.
9	Темам Р. Уравнения Навье-Стокса: Теория и численный анализ / Р. Темам; пер. с англ. В.А. Новикова, А.М. Франка; под ред. Б.Г. Кузнецова, Н.Н. Яненко. - М.: Мир, 1981. - 407, [1] с.: ил.

## в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
10	Википедия : свободная энциклопедия : ( <a href="http://ru.wikipedia.org">http://ru.wikipedia.org</a> ).
11	Поисковые системы Google, Yandex, Rambler.
12	Полнотекстовая база «Университетская библиотека»: образовательный ресурс: <URL: <a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a> >.
13	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета : ( <a href="http://www.lib.vsu.ru/">http // www.lib.vsu.ru/</a> ).
14	Электронный курс <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668</a>

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы**

№ п/п	Источник
1	Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. 2011. - <a href="https://www.studmed.ru/ladyzhenskaya-oa-matematicheskie-voprosy-dinamiki-vyazkoy-neszhimaemoy-zhidkosti_a3cdf092831.html">https://www.studmed.ru/ladyzhenskaya-oa-matematicheskie-voprosy-dinamiki-vyazkoy-neszhimaemoy-zhidkosti_a3cdf092831.html</a> .
2	Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения / В.В.Мазалов. - СПб.: Лань, 2010. - 446 с.
3	Темам Р. Уравнения Навье-Стокса: Теория и численный анализ / Р. Темам; пер. с англ. В.А. Новикова, А.М. Франка; под ред. Б.Г. Кузнецова, Н.Н. Яненко. - М.: Мир, 1981. - 407, [1] с.: ил.

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9668> .

Перечень необходимого программного обеспечения: MicrosoftWindowsServer 2008, LibreOffice 6, браузер MozillaFirefox, Maxima.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория: специализированная мебель.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Описание движения жидкостей	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольная работа №1
2	Элементы механики	ОПК-1	ОПК-1.2	Контрольная работа №2
3	Уравнения движения жидкостей	ОПК-1	ОПК-1.3	Контрольная работа №2
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет с оценкой				Перечень вопросов зачета

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью контрольных работ.

#### Контрольная работа № 1 (вариант 1)

Вычислить для заданных полей скоростей:

- 1) градиент;
- 2) дивергенцию поля скоростей;
- 3) ротор поля.

#### Контрольная работа № 1 (вариант 2)

Вычислить для заданных полей скоростей:

- 1) тензор скоростей деформации;
- 2) дивергенцию тензора

#### Контрольная работа № 2 (вариант 1)

Построение решений системы уравнений идеальной жидкости в простейших случаях.

#### Контрольная работа № 2 (вариант 2)

Построение полей скоростей и траекторий движения для различных потенциалов.

#### Критерии оценки выполнения контрольных работ:

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся продемонстрировал знание необходимого для выполнения контрольной работы теоретического материала, показал владение практическими навыками и умение решать конкретную задачу в соответствии с поставленной целью.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающийся продемонстрировал знание необходимого для выполнения контрольной работы теоретического материала, показал владение практическими навыками и умение решать конкретную задачу в

соответствии с поставленной целью, но при этом были допущены незначительные неточности теоретического или практического плана.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент допустил существенную ошибку, связанную с незнанием теории или отсутствием необходимых умений и навыков для выполнения конкретной практической работы или допустил вычислительные ошибки в задачах обработки данных, но при этом правильно ответил на дополнительные вопросы, связанных с близкой тематикой.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся допустил несколько существенных ошибок, связанных с незнанием теории или отсутствием необходимых умений и навыков для выполнения конкретной практической работы или допустил вычислительные ошибки в задачах обработки данных.

## 20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется в форме собеседования с помощью ниже приведенных оценочных средств (перечень вопросов к зачету). Студентам задается два теоретических вопроса.

Для оценивания результатов обучения на зачете используется **шкала**: «зачтено», «не зачтено». Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения:

Критерии оценивания	Шкала оценок
Ответ соответствует перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками.	«Зачтено»
Ответ не соответствует ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.	«Не зачтено»

№ п/п	Перечень вопросов к зачету
1	Определения и основные понятия.
2	Эйлеров и Лагранжев подходы описания движения жидкостей.
3	Эйлеровы и Лагранжевы координаты.
4	Формулы перехода.
5	Виды жидкостей.
6	Тензор напряжений.
7	Тензор скоростей деформаций.
8	Тензор деформаций.
9	Реологические соотношения.
10	Уравнение неразрывности.
11	Классификация сплошных сред.
12	Уравнения движения идеальной жидкости.
13	Уравнения движения вязкой жидкости.
14	Плоское безвихревое движение. Функция тока. Потенциал скорости.
15	Комплексная скорость и комплексный потенциал. Примеры комплексных потенциалов.
16	Основные операторы векторного анализа и их свойства.
17	Источники и стоки. Вихреисточники.

### Форма контрольно-измерительного материала (зачета с оценкой)

1. Тензор напряжений.
2. Основные операторы векторного анализа и их свойства.

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### Перечень заданий для оценки сформированности компетенции:

##### Тестовые вопросы

1. Найти  $\operatorname{div} v(x)$  для  $v(x)=(x_1, x_2, x_3)$   
 $\operatorname{div} v(x)=3$  - правильный ответ

2. Найти  $\operatorname{grad} p(x)$  для  $p(x)=x_1+x_2+x_3$   
 $(1,1,1)$  Правильный ответ

3. Найти  $v'(t)$  для  $v(t)= (t,t,t)$   
 $(1,1,1)$  Правильный ответ

4. Существует ли  $p(x)$  такая, что  $\operatorname{grad} p(x)=(x_2, -x_1)$   
 1. да  
 2. нет - правильный ответ

5. Нормаль к поверхности  $x_1+x_2+x_3=1$  равна  
 1.  $(0,0,1)$   
 2.  $(1/3, 1/3, 1/3)$  - правильный ответ  
 3.  $(0, 1, 0)$   
 4.  $(1, 0, 0)$

6. Пусть  $A$  – оператор Лапласа. Выберите верное утверждение:  
 1.  $A(x_1^2+ x_2^2 +x_3^2)=0$   
 2.  $A(x_1^2+ x_2^2 +x_3^2)=6$  - правильный ответ  
 3.  $A(x_1^2+ x_2^2 +x_3^2)= x_1+ x_2 +x_3$

7. Выберите верное утверждение:  
 1. тензор напряжений это матрица - правильный ответ  
 2. тензор напряжений это вектор

8. найти матрицу Якоби для вектор-функции  $v(x)=(x_1, x_2, x_3)$   
 Правильный ответ: единичная матрица

9. тензор скоростей деформации для поля скоростей  $v(x)=(x_1, x_2, x_3)$   
 1. единичная матрица - правильный ответ  
 2. кососимметричная матрица  
 3. ортогональная матрица

10. поток вектора  $v(x)=(0,0,1)$  через поверхность -  $S=\{x: 0<x_1<1, 0<x_2<1, x_3=0\}$  с нормалью  $(0,0,1)$  равен...  
 1 - правильный ответ



**Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:**

## I. Тестовые задания.

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- за каждый верный ответ ставится 1 балл, при этом за каждый неверный ответ вычитается 1 балл;
- 0 баллов — не выбрано ни одного верного ответа.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

## II. Расчетные задачи.

1) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.