

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**  
Заведующий кафедрой  
математического моделирования



М.Ш. Бурлуцкая

25.05.2023г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.О.09 Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов**

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 01.04.04 Прикладная математика
- 2. Профиль подготовки:** Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач
- 3. Квалификация выпускника:** Магистр
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**  
Кафедра математического моделирования
- 6. Составитель программы:** Царев Сергей Львович, к.ф.-м.н.
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим советом математического факультета, протокол № 0500-06 от 25.05.2023
- 8. Учебный год:** 2023/2024                      **Семестр:** 1

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются: освоение вариационных методов исследования нелинейных систем.

Задачи учебной дисциплины:

- освоение фундамента теории особенностей гладких функций;
- освоение фундамента теории фредгольмовых отображений и фредгольмовых функционалов;
- закрепление знаний по теории линейных нормированных пространств;
- расширение горизонта знаний в области математического моделирования.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов» относится к обязательной части Блока 1 Дисциплины (модули).

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-2	Способен разрабатывать и развивать математические методы моделирования объектов, процессов и систем в области профессиональной деятельности	ОПК-2.1	Знает и использует основные методы и приемы построения математических моделей	<b>Знать:</b> основные методы и приемы построения математических моделей; <b>Уметь:</b> создавать и исследовать подобные математические модели и разрабатывать теории и методы для их описания; <b>Владеть:</b> навыками построения математических моделей, выделяет нужные структуры изучаемых процессов.
		ОПК-2.2	Владеет навыками построения математических моделей, выделяет нужные структуры изучаемых процессов	
		ОПК-2.3	Имеет практический опыт создания и исследования подобных математических моделей и разработки теорий и методов для их описания	

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 3/108

Форма промежуточной аттестации: зачет

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			1 семестр	
Контактная работа		32	32	
в том числе:	лекции	16	16	
	практические	16	16	
	лабораторные	0	0	
	курсовая работа	0	0	
	контрольные работы	0	0	
Самостоятельная работа		76	76	
Промежуточная аттестация		0	0	

Итого:	108	108	
--------	-----	-----	--

### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Понижение размерности в конечномерных вариационных задачах	1. Лемма о расщеплении особенности. 2. Простейшие особенности гладких функций. 3. Редуцирующая схема Пуанкаре и её обобщения. 4. Бифуркации экстремалей из точек минимума с особенностью многомерной сборки.	
1.2	Конечномерные редукции фредгольмовых функционалов	1. Фредгольмовы отображения банаховых пространств и фредгольмовы функционалы. 2. Натуральные механические системы. 3. Интегрируемые редуцирующие схемы.	
1.3	Топологическое сравнение редуцирующих схем	1. Гомотопический признак. 2. Линейные редуцирующие системы. 3. Локальная эквивалентность ключевых функций. 4. Эквивариантная теория. 5. Обобщенная система Дуффинга.	
1.4	Избранные приложения	1. Редукция Морса–Ботта для кирхгофова стержня. 2. Бифуркации равновесных форм упругой пластины. 3. Вариационная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. 4. Фазовые переходы в сегнетоэлектрических кристаллах.	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Понижение размерности в конечномерных вариационных задачах	1. Лемма о расщеплении особенности. 2. Простейшие особенности гладких функций. 3. Редуцирующая схема Пуанкаре и её обобщения. 4. Бифуркации экстремалей из точек минимума с особенностью многомерной сборки.	
2.2	Конечномерные редукции фредгольмовых функционалов	1. Фредгольмовы отображения банаховых пространств и фредгольмовы функционалы. 2. Натуральные механические системы. 3. Интегрируемые редуцирующие схемы.	
2.3	Топологическое сравнение редуцирующих схем	1. Гомотопический признак. 2. Линейные редуцирующие системы. 3. Локальная эквивалентность ключевых функций. 4. Эквивариантная теория. 5. Обобщенная система Дуффинга.	
2.4	Избранные приложения	1. Редукция Морса–Ботта для кирхгофова стержня. 2. Бифуркации равновесных форм упругой пластины. 3. Вариационная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. 4. Фазовые переходы в сегнетоэлектрических кристаллах.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практич.	Лабор.	Самост. работа	Всего

1	Понижение размерности в конечномерных вариационных задачах	4	4		20	28
2	Конечномерные редукции фредгольмовых функционалов	4	4		20	28
3	Топологическое сравнение редуцирующих схем	4	4		16	24
4	Избранные приложения	4	4		20	28
	<b>Итого:</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>0</b>	<b>76</b>	<b>72</b>

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 76 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов» предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам дисциплины с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение лабораторных заданий по поиску необходимых для работы в аудитории материалов в Интернете.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольных и практических работ) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

В случае необходимости перехода на дистанционный режим обучения используется электронный курс «Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов»: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=16495>. Там же размещены необходимые для усвоения курса материалы.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Гукенхеймер, Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2002. — 559 с.
2	Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев. — Функциональный анализ, СМФН, 12, МАИ, М., 2004, С. 3–140.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Ван, Д. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу. — М. : МЦНМО, 2005. — 415 с.
4	Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. — М. : Наука, 1969. — 527 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
5	<a href="http://www.dxdy.ru">http://www.dxdy.ru</a> — Научный форум.
6	<a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> — электронный каталог ЗНБ ВГУ
7	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
7	Баврин И. И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике. — М., 2020. — URL: <a href="https://www.mathedu.ru/text/bavrin_nachala_analiza_v_estestvoznanii_i_ekonomike_2000/p0/">https://www.mathedu.ru/text/bavrin_nachala_analiza_v_estestvoznanii_i_ekonomike_2000/p0/</a>

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:**

№ п/п	Источник
1	Постон, Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт ; Пер. с англ. А.В. Чернавского. — М. : Мир, 1980.— 606 с.
2	Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. Кн. 1 / Р. Гилмор ; Пер. с англ. Ю.П. Гупало и А.А. Пионтковского. — М. : Мир, 1984. — 350 с.
3	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru>).

Перечень необходимого программного обеспечения: Win10pro или Linux, Microsoft Office, LibreOffice 6, Calc, Microsoft Visual Studio, Microsoft Visual C++, Foxit Reader, браузер MozillaFirefox, Opera или Internet.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория: специализированная мебель.

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Понижение размерности в конечномерных вариационных задачах	ОПК-2	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3	Контрольные домашние задания
2	Конечномерные редукции фредгольмовых функционалов	ОПК-2	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3	Контрольные домашние задания
3	Топологическое сравнение	ОПК-2	ОПК-2.1	Контрольные

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
	редуцирующих схем		ОПК-2.2 ОПК-2.3	домашние задания
4	Избранные приложения	ОПК-2	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3	Контрольные домашние задания
Промежуточная аттестация Форма контроля – зачет				Перечень вопросов к зачету

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: устных опросов, проверки домашних заданий.

#### Контрольное домашнее задание к теме 1

Найти морсовскую форму в нуле для функции

$$V(x_1, x_2, x_3) = 1 - \cos x_1 + x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2$$

#### Контрольное домашнее задание к теме 2

Найти ядро второго дифференциала в точке  $x = 0$  функционала

$$V: W_2^1[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) = \int_0^{\pi} (\dot{x}^2(t) - 9\pi^2 x(t)) dt$$

#### Контрольное домашнее задание к теме 3

Доказать, что у двух ключевых функций одного и того же функционала, построенных в глобальных редуцирующих схемах, совпадает число локальных минимумов.

#### Контрольное домашнее задание к теме 4

Выписать bif-расклады для функции

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 + 7x_1^2x_2^2$$

Для оценивания текущего контроля успеваемости используются следующие **показатели**:

1. знание основных понятий и методов;
2. умение применять полученные знания и навыки для решения задач, проводить анализ полученных решений;
3. владение математическим аппаратом и современными методами теории катастроф;
4. знание имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач;
5. умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач;
6. владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.

**Шкала оценок:**

Зачтено: Выполнение заданий соответствует перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками.

Не зачтено: Ответы не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

**20.2. Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется в форме собеседования по экзаменационным билетам/вопросам с помощью нижеприведенных оценочных средств (перечень вопросов к зачету).

В билет включаются теоретический вопрос и задача.

**Перечень вопросов к зачету:**

№п/п	Вопросы
1.	Лемма о расщеплении особенности.
2.	Простейшие особенности гладких функций.
3.	Редуцирующая схема Пуанкаре и её обобщения.
4.	Бифуркации экстремалей из точек минимума особенность многомерной сборки.
5.	Фредгольмовы отображения банаховых пространств и фредгольмовы функционалы.
6.	Натуральные механические системы.
7.	Интегрируемые редуцирующие схемы.
8.	Гомотопический признак.
9.	Линейные редуцирующие системы.
10.	Локальная эквивалентность ключевых функций.
11.	Эквивариантные схемы редукции.
12.	Обобщенная система Дуффинга.
13.	Редукция Морса–Ботта для кирхгофова стержня.
14.	Бифуркации равновесных форм упругой пластины.
15.	Вариационная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.
16.	Фазовые переходы в сегнетоэлектрических кристаллах.

**Примерный перечень задач:**

1. Найти морсовскую форму в нуле для функции

$$V(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_2x_3 + 4x_3^2$$

2. Найти ядро второго дифференциала в точке  $x = 0$  функционала

$$V: W_2^1[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) = \int_0^\pi (\dot{x}^2(t) - 9\pi^2 x(t)) dt$$

3. Доказать, что у двух ключевых функций одного и того же функционала, построенных в глобальных редуцирующих схемах, совпадает число локальных максимумов.

4. Выписать bif-расклады для функции

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 + 3x_1^2 x_2^2$$

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие **показатели**:

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи
- 3) умение работать с алгоритмами методов и информационными ресурсами.

Для оценивания результатов зачета используется **шкала**: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания	Шкала оценок
Ответ соответствует перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками.	«Зачтено»
Ответ не соответствует ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.	«Не зачтено»



### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### Перечень заданий для оценки сформированности компетенции:

1. Линейный оператор  $d/dt : C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$  НЕ является непрерывным;  
компактным;  
обратимым -- правильный ответ.
  
2. Найдите размерность ядра линейного оператора  $d/dt : C^2[0,1] \rightarrow C[0,1]$ .
  1. 0
  2. 1 -- правильный ответ
  3. 2
  4.  $\infty$
  
3. Найдите коразмерность образа линейного оператора  $d/dt : C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$ .
  1. 0 -- правильный ответ
  2. 1
  3. 2
  4.  $\infty$
  
4. Является ли фредгольмовым оператор вложения  $J: C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ,  $Jx=x$ ? Если да, укажите его фредгольмов индекс.
  1. 0
  2. 1
  3. -1
  4. Оператор не является фредгольмовым. -- правильный ответ
  
5. Пространства  $E$  и  $F$  конечномерны,  $A : E \rightarrow F$  --- линейный оператор. Его фредгольмов индекс равен...

1. 0

2.  $\dim A - \dim B$  --- правильный ответ

3.  $\dim B - \dim A$

4.  $\dim A + \dim B$

6. Фредгольмов индекс оператора  $d^2/dt^2 : C^2[0,1] \rightarrow C[0,1]$  равен \_\_\_\_ . (Ответ: 2).

7. Фредгольмов индекс линейного изоморфизма равен \_\_\_\_ . (Ответ: 0).

8. Расположите утверждения в порядке от самого логически слабого до самого логически сильного.

1. Линейный оператор ограничен.

2. Линейный оператор фредгольмов.

3. Линейный оператор имеет нулевой фредгольмов индекс.

Правильный ответ: 123.

9.  $E$  -- банахово пространство. Линейные операторы  $A, B : E \rightarrow E$  ограничены, причём  $\dim \text{Ker } A = 0$ ,  $\text{codim Im } A = 1$ ,  $\dim \text{Ker } B = 14$ ,  $\text{codim Im } B = 4$ . Расположите следующие линейные операторы в порядке возрастания фредгольмовых индексов.

1. A

2.  $A^2$

3. B

4. AB

Правильный ответ: 2143.

10. Пусть  $H$  -- гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Фредгольмов индекс функционала  $V : H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V(x) = \langle x, x \rangle$  равен \_\_\_\_ . (Ответ: 0).

### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

I. Тестовые задания.

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- за каждый верный ответ ставится 1 балл, при этом за каждый неверный ответ вычитается 1 балл;
- 0 баллов — не выбрано ни одного верного ответа.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

## II. Расчетные задачи.

1) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.