

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ *системного анализа и управления* \_\_\_\_\_

*наименование кафедры, отвечающей за реализацию дисциплины*



\_\_\_\_\_ *Задорожний В.Г.*

*подпись, расшифровка подписи*

29.05.2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

\_\_\_ **Б1.О.19 Дифференциальные уравнения** \_\_\_\_\_

*Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом*

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

\_\_\_ *01.03.02 прикладная математика и информатика* \_\_\_\_\_

**2. Профиль подготовки/специализация:** \_\_\_

*Базовый блок дисциплин*

**3. Квалификация выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

*кафедра системного анализа и управления*

**6. Составители программы:** Задорожний Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., проф.,

Кабанцова Лариса Юрьевна, к.ф.-м.н., \_\_\_\_\_

*(ФИО, ученая степень, ученое звание)*

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики (протокол №7 от 26.05.2023)

\_\_\_\_\_ *(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,*

\_\_\_\_\_ *отметки о продлении вносятся вручную)*

**8. Учебный год:** 2024/2025

**Семестр(ы):** 3,4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- сформировать у студентов современные теоретические знания в области обыкновенных дифференциальных уравнений и практические навыки в решении и исследовании основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений, познакомить студентов с начальными навыками математического моделирования для формирования умений и навыков по использованию фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности; по применению и модифицированию математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Задачи учебной дисциплины:

- обучение студентов применению на практике методов построения математических моделей в виде дифференциальных уравнений;
- освоение основных методов решения дифференциальных уравнений;
- обучение основным положениям теории: устойчивость, существование решений, качественные свойства решений;
- формирование базовых знаний и навыков решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей по основным разделам дифференциальных уравнений, относящейся к базовым дисциплинам математики;
- формирование практических навыков выделения основных направлений модификации математической модели на основе требований к решению конкретной прикладной задачи, а также навыков оценки качества модели.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** Учебная дисциплина относится к обязательной части блока 1. От студентов требуется знание производных, умение вычислять элементарные интегралы, знакомство с основными положениями линейной алгебры. Данная дисциплина является предшествующей для таких курсов как уравнения математической физики, методы оптимизации.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Демонстрирует знания, относящиеся к базовым дисциплинам математики, информатики и естественных наук.	<p><i>Знать:</i> основные понятия теории дифференциальных уравнений, типы и стандартные формы записи основных дифференциальных уравнений, методы решения основных дифференциальных уравнений.</p> <p><i>Уметь:</i> интегрировать дифференциальные уравнения первого и высших порядков; исследовать на устойчивость решения дифференциальных уравнений;</p> <p><i>Владеть:</i> методами решения обыкновенные дифференциальные уравнений; математическим аппаратом, необходимым для изучения других фундаментальных дисциплин, а также для работы с современной научно-технической литературой;</p>

ПК-3	Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.2	На основе требований к решению конкретной прикладной задачи выделяет основные направления модификации математической модели, осуществляет оценку качества модели.	<p><i>Знать:</i> области применения дифференциальных уравнений как инструмента математического описания естественно-научной картины мира; математические модели дифференциальных уравнений, используемые для решения задач в области профессиональной деятельности.</p> <p><i>Уметь:</i> применять дифференциальные уравнения для моделирования физических процессов, использовать средства дифференциальных уравнений для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования и пользоваться при необходимости математической литературой.</p> <p><i>Владеть:</i> методами построения математической модели типовых профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов.</p>
------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.**(в соответствии с учебным планом) —   8   /  288 .

**Форма промежуточной аттестации**(зачет/экзамен) \_\_\_\_\_ экзамен \_\_\_\_\_

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			3 семестра	4 семестра	...
Аудиторные занятия		128	64	64	
в том числе:	лекции	64	32	32	
	практические	64	32	32	
	лабораторные				
Самостоятельная работа		88	44	44	
в том числе: курсовая работа (проект)					
Форма промежуточной аттестации (экзамен – <u>  </u> час.)		72	36	36	
Итого:		288	144	144	

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка	Математическое моделирование процессов дифференциальными уравнениями. Геометрическая интерпретация. Решение основных типов уравнений методами замены переменных.	Дифференциальные уравнения(об)
1.2	Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами	Решение уравнений с постоянными коэффициентами. Устойчивые многочлены. Уравнения со специальной правой частью. Резонанс. Признак Рауса - Гурвица устойчивости многочленов.	Дифференциальные уравнения(об)

1.3	Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с переменными коэффициентами	Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа. Краевая задача	Дифференциальные уравнения(об)
1.4	Системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами	Фундаментальные матрицы. Определитель Вронского. Матричная экспонента. Решение линейных систем с постоянными коэффициентами. Теория Флоке-Ляпунова.	Дифференциальные уравнения(об)
1.5	Устойчивость решений дифференциальных уравнений	Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений. Первый и второй методы Ляпунова исследования на устойчивость. Матричное уравнение Ляпунова. Фазовая плоскость.	Дифференциальные уравнения(об)
1.6	Качественные свойства решений нелинейных систем дифференциальных уравнений	Теоремы существования и единственности (Пикара и Пеано). Теоремы о дифференциальных и интегральных неравенствах. Непрерывная и гладкая зависимость решений от параметров.	Дифференциальные уравнения(об)
1.7	Квазилинейные дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных	Первые интегралы и их свойства. Дифференциальные уравнения для первых интегралов и их решение.	Дифференциальные уравнения(об)
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка	Решение дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения и приводящиеся к ним, линейные уравнения, уравнения Бернулли, уравнения Риккати, уравнения в полных дифференциалах, уравнения не разрешенные относительно производной	Дифференциальные уравнения_01.03.02
2.2	Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами	Построение ФСР в случае простых, комплексных, кратных корней характеристического уравнения. Построение частного решения неоднородного уравнения со специальной правой частью. Метод вариации произвольных постоянных	Дифференциальные уравнения_01.03.02
2.3	Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с переменными коэффициентами	Понижение порядка. Нахождение решения с помощью формулы Остроградского-Лиулля	Дифференциальные уравнения_01.03.02
2.4	Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	Построение ФСР в случае простых и кратных корней. Построение частного решения системы со специальной правой частью. Метод вариации произвольных постоянных	Дифференциальные уравнения_01.03.02
2.5	Устойчивость решений дифференциальных уравнений	Проверка на устойчивость по определению Ляпунова. Устойчивость линейных систем. Устойчивость по первому приближению. Критерий Рауса-Гурвица. Особые точки и фазовые траектории	Дифференциальные уравнения_01.03.02
2.7	Квазилинейные дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных	Дифференциальные уравнения для первых интегралов и их решение.	Дифференциальные уравнения_01.03.02

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Элементарная теория интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка	10	16	0	18	44
2	Качественная теория ДУ	4	0	0	8	12
3	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка	18	16	0	22	56
4	Линейные системы	15	18	0	18	51
5	Устойчивость	17	14	0	22	53
	Итого:	64	64	0	88	216

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Текущая СРС направлена на углубление и закрепление знаний студента, развитие практических умений и включает:

- работа с лекционным материалом, поиск и обзор литературы и электронных источников информации по индивидуально заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий;
- изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим и семинарским занятиям;
- опережающая самостоятельная работа;
- подготовка к контрольной работе, к экзамену.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Жабко, А. П. Дифференциальные уравнения и устойчивость : учебник / А. П. Жабко, Е. Д. Котина, О. Н. Чижова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-1759-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/211928">https://e.lanbook.com/book/211928</a> (дата обращения: 11.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Трухан, А. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их решения. Ряды. Элементы вариационного исчисления : учебное пособие для вузов / А. А. Трухан, Т. В. Огородникова. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 268 с. — ISBN 978-5-8114-6421-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/147233">https://e.lanbook.com/book/147233</a> (дата обращения: 11.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. — Изд. 5-е. — Москва : Либроком : URSS, 2013. — 235 с.
4	Боровских А.В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для академического бакалавриата : [для студ. вузов, обуч. по естественнонауч. направлениям] : в 2 ч. / А.В. Боровских, А.И. Перов. — Ч. 1. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2017. — 326 с.
5	Боровских А.В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для академического бакалавриата : [для студ. вузов, обуч. по естественнонауч. направлениям] : в 2 ч. /

	А.В. Боровских, А.И. Перов .— Ч. 2 .— 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2017. — 274 с.
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. — Режим доступа: <a href="http://www.ru/lib.vsu.ru">http://www.ru/lib.vsu.ru</a>
2	Жабко, А. П. Дифференциальные уравнения и устойчивость : учебник / А. П. Жабко, Е. Д. Котина, О. Н. Чижова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-1759-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/211928">https://e.lanbook.com/book/211928</a> — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3	Трухан, А. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их решения. Ряды. Элементы вариационного исчисления : учебное пособие для вузов / А. А. Трухан, Т. В. Огородникова. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 268 с. — ISBN 978-5-8114-6421-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/147233">https://e.lanbook.com/book/147233</a> — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4	Дифференциальные уравнения(об) / В.Г. Задорожний. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .
5	Дифференциальные уравнения_01.03.02 / Л.Ю. Кабанцова. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. — Режим доступа: <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a>
2	Белоусова Е.П. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : методические указания для вузов : [для студ. 2-го курса специальностей «Механика и математическое моделирование» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии» факультета ПММ] / Е.П. Белоусова, Т.И. Смагина ; Воронеж. Гос. Ун-т .— Электрон. Текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл .— <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m19-30.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m19-30.pdf</a> >.
3	Олешкевич, А. А. Дифференциальные уравнения в физике, биофизике и биологии : учебное пособие / А. А. Олешкевич, О. А. Кишкинова, Ю. Л. Гордеева. — Москва : МГАВМиБ им. К.И. Скрябина, 2022. — 164 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/256550">https://e.lanbook.com/book/256550</a> (дата обращения: 11.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4	Практикум по дисциплине «Дифференциальные уравнения» : учебное пособие / А. Д. Мижидон, В. Д. Гармаев, С. С. Гармаева, В. В. Чимитова. — Улан-Удэ : ВСГУТУ, 2022. — 152 с. — ISBN 978-5-907599-57-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/333008">https://e.lanbook.com/book/333008</a> (дата обращения: 11.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5	Дифференциальные уравнения(об) / В.Г. Задорожний. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .
6	Дифференциальные уравнения_01.03.02 / Л.Ю. Кабанцова. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курсы «ОДУ» и «Дифференциальные уравнения(об)», размещенные на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Аудитории, позволяющие проводить лекционные и практические занятия, оснащенные учебной мебелью, доской меловой.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Раздел 1. Элементарная теория интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка	ОПК-1	ОПК-1.1	<i>Собеседования по темам, контрольная 1, контрольная 2, контрольная 3, контрольная 4</i>
	Раздел 2. Качественная теория ДУ Раздел 3. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 4. Линейные системы Раздел 5. Устойчивость	ОПК-3	ОПК-3.2	
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				<i>Перечень вопросов см. ниже.</i>

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

**Перечень вопросов для собеседования по дисциплине «Дифференциальные уравнения»**

#### Раздел 1. Элементарная теория интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка

1. Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Какие ещё дифференциальные уравнения, кроме обыкновенного, вы знаете?
3. Что такое дифференциальное уравнение, разрешённое относительно старшей производной?
4. Что такое порядок дифференциального уравнения?
5. Дать определение решения дифференциального уравнения.
6. Дать определение интегральной кривой.
7. Что такое поле направлений?
8. В чём заключается геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка?
9. Дать определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.
10. Что такое однородное линейное уравнение?
11. Какое уравнение называется неоднородным линейным уравнением?
12. Как решается линейное уравнение первого порядка?  
Дать определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
13. Привести метод решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
14. Сформулировать задачу Коши для уравнения с разделяющимися переменными.
15. Дайте определение уравнения в полных дифференциалах.
16. Дать определение решения уравнения в полных дифференциалах.
17. Что такое интегрирующий множитель?
18. Вывести уравнение для нахождения интегрирующего множителя.
19. Выписать уравнения для интегрирующего множителя, зависящего от  $x$ ; только от  $y$ .

## **Раздел 2. Качественная теория ДУ**

1. Сформулировать и доказать теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения первого порядка. Почему эту теорему называют глобальной?
2. Привести пример не единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

## **Раздел 3. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка**

1. Дать определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.
2. Сформулировать задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами
3. Записать линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами в операторной форме.
4. Что такое характеристическое уравнение?
5. Сформулировать теорему об общем решении в случае простых корней характеристического уравнения.
6. Сформулировать теорему об общем вещественном решении линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными вещественными коэффициентами.
7. Сформулировать и доказать теорему об общем решении в случае кратных корней характеристического уравнения.
8. Дать определение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
9. Дать определение квазимногочлена.
10. Показать, что общее решение неоднородного линейного уравнения есть сумма общего решения однородного линейного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.
11. Сформулировать теорему о виде частного решения в случае, когда правая часть - квазимногочлен.
12. Описать метод комплексных амплитуд для решения линейных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами.
13. Что такое явление резонанса? Дать математическое определение резонанса.
14. Дать определение уравнения Эйлера.
15. С помощью какой замены уравнение Эйлера сводится к уравнению с постоянными коэффициентами?
16. Сформулировать краевую задачу для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.
17. Дать определение функции Грина и сформулировать её свойства.
18. Сформулируйте и докажите критерий разрешимости неоднородной краевой задачи для уравнения 2-го порядка.

## **Раздел 4. Линейные системы**

1. Дать определение линейной нормальной однородной системы с постоянными коэффициентами.
2. Сформулировать и доказать теорему об общем решении в случае простых собственных значений.
3. Сформулировать и доказать теорему об общем решении в случае кратных собственных значений.
4. Дать определение ФСР линейной системы
5. Дать определение определителя Вронского для линейной системы дифференциальных уравнений.
6. Сформулировать и доказать формулу Лиувилля.
7. Дать определение фундаментальной матрицы.
8. Сформулировать и доказать свойства фундаментальной матрицы.
9. Сформулировать и доказать теорему о решении задачи Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений.

## **Раздел 5. Устойчивость**

1. Дать определение устойчивости произвольного решения задачи Коши.
2. Геометрическая трактовка понятия устойчивости.
3. Дать определение асимптотической устойчивости произвольного решения задачи Коши.



4. Дать определение устойчивости нулевого решения.
5. Дать определение асимптотической устойчивости нулевого решения.
6. Сформулировать спектральный признак устойчивости линейной системы с постоянной матрицей.
7. Сформулировать спектральный признак асимптотической устойчивости линейной системы с постоянной матрицей.
8. Сформулировать спектральный признак устойчивости линейной системы с постоянной матрицей.
9. Сформулировать спектральный признак неустойчивости линейной системы с постоянной матрицей.
10. Сформулировать критерий Рауса-Гурвица.
11. Сформулировать теорему Ляпунова об исследовании по первому приближению положений равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений.
12. При каких значениях собственных значений линейная система с постоянной матрицей имеет особую точку узел?
13. Нарисовать фазовый портрет типа узел.
14. При каких значениях собственных значений линейная система с постоянной матрицей имеет особую точку фокус?
15. Нарисовать фазовый портрет типа фокус.
16. При каких значениях собственных значений линейная система с постоянной матрицей имеет особую точку седло?
17. Нарисовать фазовый портрет типа седло.
18. При каких значениях собственных значений линейная система с постоянной матрицей имеет особую точку центр?
19. Нарисовать фазовый портрет типа центр.

#### *Описание технологии проведения*

Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.

#### *Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)*

**Оценка «5» (отлично)** выставляется, если обучающийся показывает всесторонние и глубокие знания программного материала, знание основной и дополнительной литературы; последовательно и четко отвечает на вопросы билета и дополнительные вопросы; уверенно ориентируется в проблемных ситуациях; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании программного материала; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «4» (хорошо)** выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала, основной и дополнительной литературы; дает полные ответы на теоретические вопросы, допуская некоторые неточности; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «3» (удовлетворительно)** выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; при ответе на вопросы не допускает грубых ошибок, но испытывает затруднения в последовательности их изложения; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

**Оценка «2» (неудовлетворительно)** выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по разделу; не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускает грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на задаваемые преподавателем вопросы или затрудняется с ответом; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

### Контрольная работа №1(пример варианта)

---

1.  $\dot{x}e^{-t} + x^2 - 2xe^t = 1 - e^{2t}$
2.  $(t^2 - x^2 + x)dt + t(2x - 1)dx = 0$
3.  $t\dot{x} - x = t \frac{\sin}{\cos} \left( \frac{x}{t} \right)$
4.  $x = 2t\dot{x} + x^2\dot{x}^3$

### Контрольная работа №2 (пример варианта)

---

1. Составить функцию Грина для краевой задачи  $t\ddot{x} - \dot{x} = f(t); \quad \dot{x}(1) = 0, x(2) = 0$ , где  $a_0(t) = t$
2. Решить дифференциальное уравнение  $t\ddot{x} - (2t + 1)\dot{x} + 2x = 0$ , частное решение имеет вид  $x_1(t) = e^{2t}$
3. Решить линейную неоднородную систему методом вариации произвольных постоянных  $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^{tt^{-1}} + te^{-t}$ .
4. Методом неопределенных коэффициентов найти решение уравнения  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = te^{2t}$ .

### Контрольная работа №3 (пример варианта)

---

1. Решить линейную неоднородную систему методом вариации произвольных постоянных

$$\begin{cases} \dot{x} = y + tg^2t - 1, \\ \dot{y} = -x + tgt. \end{cases}$$

2. Решить линейную неоднородную систему методом неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z - t + 2, \\ \dot{y} = -x + 1, \\ \dot{z} = x + y - z - t + 1. \end{cases}$$

3. Вычислить  $e^A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

### Контрольная работа №4 (пример варианта)

---

1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову исследовать на устойчивость решение уравнения

$$\dot{x} = t(x - 1), \quad x(1) = 2.$$

2. Исследовать на устойчивость по первому приближению все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 1 \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y) \end{cases}$$

3. При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  будет асимптотически устойчиво нулевое решение уравнения

$$y''' + 3y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

4. Определить характер особой точки и исследовать поведение фазовых траекторий

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

*Описание технологии проведения:*

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде написания письменной работы. Ограничение по времени на работу — 1 час 35 минут»

*Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)*

**Оценка «отлично»** выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы; выполнил все задания и задачи полностью без ошибок и недочетов; строго соблюдает требования при оформлении работы; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «хорошо»** выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; выполнил все задания и задачи полностью, но при наличии в их решении не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов; строго соблюдает требования при оформлении работы; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «удовлетворительно»** выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций; выполнил не менее 2/3 всех предложенных заданий и задач или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочетов, при наличии четырех-пяти недочетов; допускает незначительные ошибки при оформлении работы; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

**Оценка «неудовлетворительно»** выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине; если число ошибок и недочетов в работе превысило норму для оценки 3 или обучающийся выполнил правильно менее 2/3 всех заданий и задач; допускает грубые ошибки при оформлении работы; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

**Перечень вопросов к экзамену 3 семестр.**

1. Основные понятия: дифференциальное уравнение, решение, общее решение, общий интеграл, геометрическая интерпретация, задача Коши, изоклины.
2. Теорема существования и единственности для скалярного уравнения. Пример не единственности.
3. Задача о распаде радиоактивного вещества.
4. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородное уравнение.
5. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.
6. Уравнение Бернулли.
7. Уравнение Риккати.
8. Уравнение в полных дифференциалах (определение, общий интеграл).
9. Необходимое и достаточное условие для того чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах.
10. Интегрирующий множитель.
11. Система дифференциальных уравнений, решение, общее решение.
12. Комплексные решения. Теорема существования и единственности для систем дифференциальных уравнений.
13. Теоремы существования и единственности для уравнения  $n$ -го порядка и для линейных систем дифференциальных уравнений.
14. Функция  $e^z$  и ее свойства.
15. Линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Свойства многочленов символа  $p$ .
16. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней).
17. Необходимые и достаточные условия для того чтобы число  $\lambda$  было  $k$  кратным корнем многочлена.
18. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами (случай кратных корней).
19. Выделение вещественных решений. Математический маятник.
20. Устойчивые многочлены. Оценка решений с устойчивым характеристическим многочленом.
21. Устойчивость многочленов 1 и 2 -го порядков. Необходимое условие устойчивости вещественного многочлена.
22. Критерий Рауса-Гурвица. Устойчивость многочлена третьего порядка.
23. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Структура общего решения. Квазиполином, структура общего решения с правой частью в виде квазиполинома.
24. Частные решения уравнения со специальной правой частью.
25. Метод комплексных амплитуд.
26. Линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Линейное однородное уравнение и его свойства. Линейная зависимость функций.
27. Определитель Вронского и его применение для определения линейной зависимости решений линейных дифференциальных уравнений.
28. Фундаментальная система решений и ее свойства.
29. Восстановление линейного дифференциального уравнения по его фундаментальной системе. Формула Остроградского-Лиувилля.
30. Понижение порядка дифференциального уравнения.
31. Метод вариации произвольных постоянных.
32. Двухточечная краевая задача и ее преобразования.
33. Построение функции Грина и вывод ее свойств.
34. Необходимое и достаточное условие существования функции Грина. Задача о собственных значениях краевой задачи.
35.  $\varepsilon$  - решения. Существование  $\varepsilon$  - решений. Ломаные Эйлера.
36. Теорема Пеано. Теорема единственности решения.

## Перечень вопросов к экзамену 4 семестра

1. Линейная система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, формы записи. Теорема существования и единственности. (без доказательства).
2. Линейная однородная система, два свойства. Фундаментальная система решений ее существование и общее решение ЛО системы ДУ.
3. Определитель Вронского и его свойства.
4. Формула Лиувилля.
5. Матричное ДУ и его связь с векторным ДУ.
6. Фундаментальная матрица. Свойства фундаментальных матриц.
7. Сопряженное ДУ. Фундаментальная матрица сопряженного ДУ.
8. Формула для решения задачи Коши линейной неоднородной системы ДУ.
9. Тождество Лагранжа.
10. Сходимость матричных последовательностей и рядов. Признак Вейерштрасса о равномерной сходимости матричного ряда.
11. Матричная экспонента и ее свойства.
12. Решение ЛСДУ с постоянными коэффициентами в случае простых собственных значений.
13. Решение ЛСДУ с постоянными коэффициентами в общем случае.
14. Выделение вещественных решений. Формула для решения задачи Коши ЛНСДУ с постоянными коэффициентами.
15. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.
16. Оценка нормы матричной экспоненты.
17. Две геометрические интерпретации ДУ.
18. Понятие устойчивости и асимптотической устойчивости решений по Ляпунову.
19. Устойчивость линейных систем ДУ.
20. Устойчивость Линейных систем ДУ с постоянными коэффициентами.
21. Асимптотическая устойчивость Линейных систем ДУ с постоянными коэффициентами.
22. Фазовая плоскость ЛСДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, узел, седло.
23. Случай комплексных собственных значений, фокус, центр.
24. Вырожденные случаи.
25. Фазовая плоскость для линейного дифференциального уравнения второго порядка.
26. Функции Ляпунова, производная в силу системы ДУ и ее смысл.
27. Теорема Ляпунова об устойчивости.
28. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
29. Теорема Ляпунова о неустойчивости.
30. Матричное уравнение Ляпунова.
31. Функция Ляпунова для линейной системы ДУ с постоянными коэффициентами.
32. Исследование на устойчивость по первому приближению.
33. Теорема о дифференциальных неравенствах.
34. Теорема об интегральных неравенствах.
35. Лемма Гронуолла-Беллмана.
36. Теорема существования и единственности (Пикара).
37. Продолжение решений.
38. Теорема существования и единственности для линейных систем ДУ.
39. Непрерывная зависимость решений от начальных данных и параметров.
40. Дифференцируемость решений по параметру.
41. Дифференцируемость решений по времени.
42. Первые интегралы и их свойства.
43. Гамильтонова система ДУ и ее первый интеграл. Симметричная форма записи систем ДУ.
44. Метод Пикара, разложение решений по степеням малого параметра.
45. Разложение решений по степеням независимой переменной, уравнения Бесселя.
46. Квазилинейные ДУ в частных производных первого порядка.
47. Решение квазилинейных ДУ в частных производных первого порядка.
48. Логарифм матрицы и его существование.
49. Теорема Флоке-Ляпунова.
50. Приводимость ЛСДУ с периодическими коэффициентами. Матрица монодромии, мультипликаторы. Существование периодических решений.

### Описание технологии проведения

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

### Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

**Оценка “отлично”** ставится, если студент строго обосновывает свой ответ на вопросы билета, правильно отвечает на дополнительные вопросы, умеет грамотно объяснить решение задачи, владеет методами интегрирования дифференциальных уравнений и систем, методами решения разностных уравнений, знает доказательства теорем, умеет строить математические модели с помощью дифференциальных уравнений.

**Оценка “хорошо”** ставится, если студент демонстрирует полное усвоение материала, предусмотренного программой, грамотно отвечает на вопросы билета и дополнительные вопросы. Умеет решать большую часть задач, предусмотренных программой курса. Допускаются неточности второстепенного значения при ответе на дополнительные вопросы.

**Оценка “удовлетворительно”** ставится, если студент усвоил материала, предусмотренный программой курса. На вопросы билета дает ответы в целом правильные, но они являются неполными. Умеет решать большую часть задач, предусмотренных программой курса, но допускает неточности при объяснении решения.

**Оценка “неудовлетворительно”** ставится, если студент не может ответить грамотно на вопросы билета, затрудняется при решении задач, предусмотренных программой курса. На дополнительные вопросы отказывается отвечать.

## 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-1.1 Демонстрирует знания, относящиеся к базовым дисциплинам математики, информатики и естественных наук.

### Вопросы с вариантами ответов

1. Общим решением некоторого дифференциального уравнения является функция  $y = cx^3$ , тогда частным решением этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $y(1) = 3$ , является

- а)  $y = 2x$
- б)  $y = cx^3$
- в)  $y = x + c$
- г)  $y = 3x^3$
- д)  $y = x^3$

Ответ: г)

2. Укажите частное решение дифференциального уравнения  $xy' = 1$

- а)  $y = \ln|x| + c$
- б)  $y = \ln|x + c|$
- в)  $y = \ln|x|$
- г)  $y = ce^x$
- д)  $y = 2\ln|x|$
- е)  $y = \ln|x + 1|$

Ответ: в)

3. Уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  является характеристическим уравнением дифференциального уравнения

а)  $y'' - 2y' + 1 = 0$ ,

б)  $y'' - 2y' + y = 0$ ,

в)  $y'' - 2y' = 0$ ,

г)  $y''' - 2y'' - y = x$ .

Ответ: б)

4. Установите соответствие между линейным однородным дифференциальным уравнением и общим решением

1.  $y'' + 2y' + y = 0$

2.  $y'' - 2y' = 0$

3.  $y'' - 2y = 0$

Общие решения

1.  $y_{00} = e^{-x}(c_1 + c_2x)$

2.  $y_{00} = c_1 \sin \sqrt{2}x + c_2 \cos \sqrt{2}x$

3.  $y_{00} = c_1 + c_2 e^{2x}$

Ответ: 1-1, 2-3, 3-2

#### Вопросы с кратким текстовым ответом

1. При каком значении параметра  $n$  функция  $y = e^{nx}(c_1 + c_2x)$  является общим решением дифференциального уравнения  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .

Ответ: 3

*ОПК-3.2 На основе требований к решению конкретной прикладной задачи выделяет основные направления модификации математической модели, осуществляет оценку качества модели*

#### Вопросы с вариантами ответов

1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений укажите уравнение с разделяющимися переменными

а)  $2xyy' - y^2 + x = 0$ ,

б)  $y' + y \cos x = 0$ ,

в)  $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$ ,

г)  $xy' = y(1 + \ln x - \ln y)$

д)  $xy'' = y'$

Ответ: б)

2. Укажите тип дифференциального уравнения  $(2x + 1)y' + y = x$

а) с разделяющимися переменными

б) линейное

в) однородное

г) Бернулли

д) в полных дифференциалах

е) другой тип

Ответ: б)

3. Укажите общее решение дифференциального уравнения  $xy' = 1$

- а)  $y = \ln|x| + c$
- б)  $y = \ln|x + c|$
- в)  $y = \ln|x|$
- г)  $y = ce^x$
- д)  $y = 2\ln|x|$
- е)  $y = \ln|x + 1|$

Ответ: а)

4. Укажите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- а)  $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$
- б)  $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$
- в)  $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
- г)  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$
- д)  $y = c_1e^{2x}$
- е) другой вариант

Ответ: а)

5. Среди приведенных дифференциальных уравнений укажите ВСЕ, порядок которых можно понизить подстановкой  $y' = z(x)$

- а)  $y'' = y' + x$
- б)  $y'' = y' + y$
- в)  $y''y'y = y^2 + 1$
- г)  $y''y'x = x^2 + 1$
- д)  $y'y = 2$

Ответ: а), г)

6. Для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4y = 10$$
 укажите вид его частного решения с неопределенными коэффициентами

- а)  $\bar{y} = Ax + B$
- б)  $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$
- в)  $\bar{y} = 10x$
- г)  $\bar{y} = A$
- д)  $\bar{y} = x + 10$
- е)  $\bar{y} = Ax$
- ж) другой вариант

Ответ: г)



### Вопросы с кратким текстовым ответом

1. При каком значении параметра  $a$  уравнение  $\lambda^2 + a\lambda = 0$  является характеристическим уравнением дифференциального уравнения  $y'' + 7y' = 0$ .

Ответ: 7

2. Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего начальному условию, называется .....

Ответ: задачей Коши / задача Коши

#### *Описание технологии проведения:*

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 50 минут

#### *Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:*

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности) :

1 балл – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень

2 балла – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**