

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
Системного анализа и управления



___Задорожний В.Г.
29.05.2023_г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.08 Вариационные методы и случайные процессы в задачах управления

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.03.02 Прикладная математика и информатика

2. Профиль подготовки/специализация: *Динамические системы и управление*

3. Квалификация (степень) выпускника: *__бакалавр*

4. Форма обучения: *очная*

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Системного анализа и управления

6. Составители программы: *_Задорожний Владимир Григорьевич, доктор физ. мат. наук, профессор*

7. Рекомендована: *_ Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики (протокол №07 от 26.05.2023) _____*
(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: *_2026/2027*

Семестр(-ы): *8*

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- знакомство с математическими моделями задач со случайными возмущениями и обучение использованию вычислительных средств в их исследовании для формирования умений и навыков использования современных математических и компьютерных методов в задачах анализа динамических систем, оптимизации и оптимального управления.

Задачи учебной дисциплины:

- обучение аналитическим методам нахождения моментных функций решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами;
- обучение численным методам нахождения статистических характеристик случайных процессов;
- формирование практических навыков использования современных технологий и пакетов прикладных программ для решения задач анализа динамических систем, оптимизации и оптимального управления;
- формирование навыков и умений осуществления правильного выбора алгоритма и средств его реализации при решении задач управления и оптимизации.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: (цикл, к которому относится дисциплина, требования к входным знаниям, умениям и компетенциям, дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей)

Базовый цикл. Вариативная дисциплина. Требуется уверенное владение техникой дифференцирования и интегрирования. Требуется овладение основами функционального анализа, теории вероятностей, дифференциальных уравнений и численными методами.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-4	Способен использовать современные математические и компьютерные методы в задачах анализа динамических систем, оптимизации и оптимального управления	ПК-4.1	Использует современные технологии и пакеты прикладных программ для решения задач анализа динамических систем, оптимизации и оптимального управления.	<i>Знать:</i> Основные законы физики. Смысл производных и дифференциалов Математические модели электрических цепей. <i>Уметь:</i> Строить математические модели. Моделировать процессы в электрических цепях. Анализировать смысл решений дифференциальных уравнений. <i>Владеть:</i> методами построения дифференциальных моделей, методами исследования устойчивости процессов.
		ПК-4.3	Правильно выбирает алгоритм и средства его реализации при решении задач управления и оптимизации.	<i>Знать:</i> алгоритмы для решения задач управления и оптимизации <i>Уметь:</i> правильно осуществлять выбор алгоритмов и средств их реализации при решении задач управления и оптимизации <i>Владеть:</i> средствами реализации алгоритмов для решения задач управления и оптимизации

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) —
 3 / _108_.

Форма промежуточной аттестации(зачет/экзамен) зачет с оценкой

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра 7	№ семестра	...
Аудиторные занятия	48	48		
в том числе:	лекции	16	16	
	практические	16	16	
	лабораторные	16	16	
Самостоятельная работа	60	60		
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час. / экзамен – __ час.)				
Итого:	108	108		

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Вариационное дифференцирование	Техника вариационного дифференцирования Уравнения с обычными и вариационными производными	ВМСПеЗУ_01.03.02
1.2	Нахождение статистических характеристик решений уравнений со случайными коэффициентами	Нахождение математического ожидания решений ДУ. Нахождение вторых моментных функций решений ДУ	
1.3	Численные методы нахождения статистических характеристик	Разностная схема для нахождения математического ожидания решения ДУ второго порядка. Алгоритм и программа нахождения математического ожидания решения.	
1.4	Вариационное интегрирование	Техника вариационного интегрирования. Обратная задача вариационного исчисления.	
2. Практические занятия			
2.1	Вычисление вариационных производных		ВМСПеЗУ_01.03.02
2.2	Решение уравнений с вариационными производными	Нахождение математического ожидания решений ДУ. Нахождение вторых моментных функций решений ДУ	
2.4	Вычисление вариационных интегралов	Техника вариационного интегрирования. Обратная задача вариационного исчисления.	
3. Лабораторные занятия			
3.1	Вычисление математического ожидания решения дифференциального уравнения		ВМСПеЗУ_01.03.02
3.2	Решение уравнений с вариационными производ-		

	<i>НЫМИ</i>	
3.3	<i>Нахождение математического ожидания разностными методами</i>	
3.4	<i>Решение обратной задачи вариационного исчисления</i>	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	<i>Вариационное дифференцирование</i>	4	4	2	15	25
2	<i>Нахождение статистических характеристик решений уравнений со случайными коэффициентами</i>	4	4	4	15	27
3	<i>Численные методы нахождения статистических характеристик</i>	4	4	6	20	34
4	<i>Вариационное интегрирование</i>	4	4	4	10	22
	Итого:	16	16	16	60	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

Рекомендуется использовать методические работы В.Г Задорожного

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<i>Ширяев, А. Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений / А. Н. Ширяев. — 2-е изд. — Москва : МЦНМО, 2014. — 144 с. — ISBN 978-5-4439-0247-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/71819 (дата обращения: 28.07.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.</i>
2	<i>Гюнтер, Н. М. Курс вариационного исчисления : учебное пособие / Н. М. Гюнтер. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-0893-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167736 (дата обращения: 30.11.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	<i>Задорожный В.Г. Методы вариационного анализа/ В.Г. Задорожный, М.-Ижевск, РХД, 2006. — 316 с.</i>
4	<i>Дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами : учебное пособие для вузов /</i>

	В.Г. Задорожний ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012 .— 97 с. <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-206.pdf >.
5	Дифференциальные уравнения первого порядка с частными производными : учебное пособие для вузов / В.Г. Задорожний ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017 .— 28 с. <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-198.pdf >.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
6.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: https://lib.vsu.ru
7	Дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами : учебное пособие для вузов / В.Г. Задорожний ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012 .— 97 с. <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-206.pdf >.
8	Дифференциальные уравнения первого порядка с частными производными : учебное пособие для вузов / В.Г. Задорожний ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017 .— 28 с. <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-198.pdf >.
9	Вариационные методы и случайные процессы в задачах управления 01.03.02/ . — В.Г. Задорожний. - Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.moodle.ru .

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами : учебное пособие для вузов / В.Г. Задорожний ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012 .— 97 с. <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-206.pdf >.
2	Дифференциальные уравнения первого порядка с частными производными : учебное пособие для вузов / В.Г. Задорожний ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017 .— 28 с. <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-198.pdf >.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Вариационные методы и случайные процессы в задачах управления 01.03.02», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель, персональные компьютеры для индивидуальной работы с возможностью подключения к сети «Интернет» ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Chrome, Яндекс.Браузер, Mozilla Firefox), ПО Intellij IDEA Community Edition, Anaconda, Maxima, пакет прикладных программ Matlab

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	<i>Вариационное дифференцирование</i>	ПК-4	ПК-4.1. ПК-4.3,	<i>Собеседования по темам</i>
2.	<i>Нахождение статистических характеристик решений уравнений со случайными коэффициентами</i>	ПК-4,	ПК-4.1. ПК-4.3,	<i>Собеседования по темам контрольная</i>
3	<i>Численные методы нахождения статистических характеристик</i>	ПК-4	ПК-4.1. ПК-4.3,	<i>Собеседования по темам контрольная</i>
4	<i>Вариационное интегрирование</i>			<i>Собеседования по темам контрольная</i>
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет с оценкой				<i>Перечень вопросов см. ниже.</i>

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Перечень практических заданий

Создать программу и найти математическое ожидание решения задачи Коши на отрезке $[0, 2\pi]$

$$x'' + \varepsilon x' + \sin(n + t)x = \cos 2t,$$

$$x(0) = 1,$$

$$x'(0) = \frac{1}{n}.$$

Здесь n - номер по списку группы, известна характеристическая функция случайной величины ε

$$\varphi_{\varepsilon}(z) = \exp(i \cos(n + t) - \frac{1}{2n} z^2).$$

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень вопросов к зачету и порядок формирования КИМ

1. Основные понятия. Банахово пространство, линейный ограниченный, непрерывный оператор. (Примеры).
2. Вариационная производная. Вариационная производная квадратичного функционала.
3. Вариационная производная функционалов вариационного исчисления.
4. Свойства вариационных производных.
5. Дифференцирование сложных функционалов. (Примеры).
6. Основные понятия теории вероятностей.

7. Случайный процесс и его характеристики.
8. Гауссов случайный процесс и его характеристики.
9. Простейшее уравнение со случайными коэффициентами, переход к детерминированной задаче.
10. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в частных производных.
11. Решение линейного однородного уравнения с обычной и вариационной производными.
12. Решение линейного неоднородного уравнения с обычной и вариационной производными.
13. Решение вспомогательного детерминированного уравнения для простейшей задачи.
14. Нахождение математического ожидания решения простейшей задачи. Частные случаи.
15. Математическое ожидание решения простейшей задачи с гауссовым случайным коэффициентом.
16. Задача нахождения второй моментной функции решения простейшей задачи, переход к детерминированной задаче.
17. Решение вспомогательной детерминированной задачи.
18. Формула для второй моментной функции решения простейшей задачи.
19. Вторая смешанная функция для решения простейшей задачи.
20. Вторая смешанная функция для случая независимых случайных коэффициентов.
21. Разностная схема для численного нахождения математического ожидания решения ДУ второго порядка.
22. Обратная задача вариационного исчисления.
23. Интегрирующий множитель.
24. Вариационный интеграл.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

Описание технологии проведения. Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание основных определений, примеров и формулировок теорем;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение решать задачи вычислительного характера;
- 4) умение обосновывать (доказывать) основные факты теории.

Для оценивания результатов обучения на зачете с оценкой используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Полное соответствие ответа обучающегося на контрольно-измерительный материал всем перечисленным критериям</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал соответствует первым трем критериям.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<i>Ответ обучающегося на контрольно-измерительный материал соответствует первым двум критериям.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
<i>Ответ не соответствует первым двум критериям.</i>	<i>–</i>	<i>Неудовлетворительно</i>

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ПК-4 Способен использовать современные математические и компьютерные методы в задачах анализа динамических систем, оптимизации и оптимального управления

Вопросы с вариантами ответов

1. Равенство нулю вариационной производной в точке является

- А) достаточным условием слабого минимума функционала
- Б) достаточным условием сильного минимума функционала
- В) необходимым условием минимума функционала
- Г) необходимым и достаточным условием минимума функционала

Ответ: В)

2. Вариационной производной функционала $I: C[0,1] \rightarrow R, I(x) = \int_0^1 x(t) \sin t \, dt$, является

- А) $\cos t$
- Б) $\sin t$
- В) $-\cos t$
- Г) $-\sin t$

Ответ: Б)

3. Укажите правильное обозначение вариационной производной

- А) $\frac{\delta I(x)}{\delta x(t)}$
- Б) $\frac{\delta I(x)}{\partial x(t)}$
- В) $\frac{\delta I(x)}{\partial x}$
- Г) $\frac{\delta I(x)}{\delta x(t)}$

Ответ: Г)

4. Сумма вариационных производных равна

- А) вариационной производной от суммы функционалов
- Б) разности вариационных производных от функционалов
- В) сумме вариационных интегралов от функционалов
- Г) разности вариационных интегралов от функционалов

Ответ: А)

5. Пусть функционалы I_1, I_2 имеют вариационные производные тогда $\frac{\delta}{\delta x(t)} (I_1 I_2)$ равно

- А) $\frac{\delta}{\delta x(t)} (I_1(x)) I_2 \times I_1 \frac{\delta}{\delta x(t)} (I_2(x))$
- Б) $\frac{\delta}{\delta x(t)} (I_1(x)) I_2 + I_1 \frac{\delta}{\delta x(t)} (I_2(x))$

- В) $\frac{\delta}{\delta x(t)} (I_1(x)) I_2 - I_1 \frac{\delta}{\delta x(t)} (I_2(x))$
 Г) $\frac{\delta}{\delta x(t)} (I_1(x)) I_2 + 2I_1 \frac{\delta}{\delta x(t)} (I_2(x))$

Ответ: Б)

6. Пусть $E[\varepsilon]$ -- математическое ожидание случайной величины ε и $\varphi(z) = E[\exp(i\varepsilon z)]$ -- характеристическая функция для ε , тогда

- А) $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = iE[\varepsilon]$
 Б) $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -iE[\varepsilon]$
 В) $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = E[\varepsilon]$
 Г) $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -E[\varepsilon]$

Ответ: А)

7. Пусть $E[\varepsilon(t)]$ -- математическое ожидание случайного процесса $\varepsilon(t)$ и $\varphi(z) = E[\exp(i \int_a^b \varepsilon(t) z(t) dt)]$ -- характеристический функционал для ε , тогда

- А) $\frac{\delta \varphi(z)}{\delta z(t)} \Big|_{z=0} = E[\varepsilon(t)]$
 Б) $\frac{\delta \varphi(z)}{\delta z(t)} \Big|_{z=0} = -E[\varepsilon(t)]$
 В) $\frac{\delta \varphi(z)}{\delta z(t)} \Big|_{z=0} = -i E[\varepsilon(t)]$
 Г) $\frac{\delta \varphi(z)}{\delta z(t)} \Big|_{z=0} = i E[\varepsilon(t)]$

Ответ: Г)

Вопросы с кратким текстовым ответом

8. Пусть $E[\varepsilon]$ -- математическое ожидание случайной величины ε и $\varphi(z) = E[\exp(i\varepsilon z)]$ -- характеристическая функция для ε , тогда

- А) $\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = iE^2[\varepsilon]$
 Б) $\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -E^2[\varepsilon]$
 В) $\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = E[\varepsilon^2]$
 Г) $\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -E[\varepsilon^2]$

Ответ: Г) $\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -E[\varepsilon^2]$

9. Пусть $E[\varepsilon(t)]$ -- математическое ожидание случайного процесса $\varepsilon(t)$ и $\varphi(z) = E[\exp(i \int_a^b \varepsilon(t) z(t) dt)]$ -- характеристический функционал для ε , тогда

- А) $\frac{\delta^2 \varphi(z)}{\delta z(t) \delta z(\tau)} \Big|_{z=0} = E^2[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)]$
 Б) $\frac{\delta^2 \varphi(z)}{\delta z(t) \delta z(\tau)} \Big|_{z=0} = -iE^2[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)]$
 В) $\frac{\delta^2 \varphi(z)}{\delta z(t) \delta z(\tau)} \Big|_{z=0} = -iE[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)]$
 Г) $\frac{\delta^2 \varphi(z)}{\delta z(t) \delta z(\tau)} \Big|_{z=0} = -E[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)]$

Ответ: Г) $\frac{\delta^2 \varphi(z)}{\delta z(t) \delta z(\tau)} \Big|_{z=0} = -E[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)]$

10. Пусть $\varphi(u) = \exp(i \int_0^1 u(t) \cos t dt)$ тогда

- А) $\frac{\delta \varphi(u)}{\delta u(t)} = \exp(i \int_0^1 u(t) \cos t dt) \cos t$
 Б) $\frac{\delta \varphi(u)}{\delta u(t)} = -\exp(i \int_0^1 u(t) \cos t dt) \sin t$
 В) $\frac{\delta \varphi(u)}{\delta u(t)} = i \exp(i \int_0^1 u(t) \cos t dt) \cos t$
 Г) $\frac{\delta \varphi(u)}{\delta u(t)} = -i \exp(i \int_0^1 u(t) \cos t dt) \cos t$

Ответ: В) $\frac{\delta \varphi(u)}{\delta u(t)} = i \exp(i \int_0^1 u(t) \cos t dt) \cos t$

Описание технологии проведения:

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 50 минут

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности) :

1 балл – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень

2 балла – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).