

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.



25.05.2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.21 Математические модели механических систем

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 01.03.01 математика
- 2. Профиль подготовки:** дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма образования:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составители программы:** Прядко Ирина Николаевна, к.ф.-м.н.
- 7. Рекомендована:** научно-методическим советом математического факультета, протокол от 25.05.2023, № 0500-06
- 8. Учебный год:** 2025–2026 **Семестр(ы):** шестой

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели изучения дисциплины:

- ознакомление обучающихся с методами математического моделирования и анализа механических систем, применение математических методов к описанию движения и исследованию механических систем, овладение методами классической и аналитической механики.

Задачи учебной дисциплины:

- изучение основных положений и особенностей математического моделирования;
 - изучение методов построения математических моделей механических систем;
 - умение составлять и анализировать математические модели в разных областях приложений.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к обязательной части блока Б1.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса

«Математические модели механических систем»:

- теоретическая механика (динамика точки);
- математический анализ (производная и дифференциал функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные);
- аналитическая геометрия (действия с векторами, линии и поверхности второго порядка);
- дифференциальные уравнения (дифференциальные уравнения первого порядка, линейные дифференциальные уравнения и системы);
- линейная алгебра (матрицы, определители).

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Применяет базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук	Знать: базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук Уметь: использовать базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук Владеть навыками математического и статистического моделирования при построении моделей физических процессов и явлений и использовать их в профессиональной деятельности
		ОПК-1.2	Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Знать: методы решения задач в области математических и (или) естественных наук. Уметь оценивать и формулировать актуальные и значимые проблемы математики. Владеть: способностью оценивать и формулировать актуальные задачи профессиональной деятельности, принимать правильное решение на основе теоретических знаний
		ОПК-1.3	Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических	Знать: методы решения задач профессиональной деятельности. Уметь: анализировать и применять навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

			ских знаний	Владеть навыками решения задач профессиональной деятельности
ОПК-2	Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естественных науках, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1	Оценивает основные принципы математических моделей	Знать: основные принципы математических моделей. Уметь: применять на практике принципы построения математических моделей. Владеть: основными принципами построения математических моделей
		ОПК-2.2	Выбирает необходимые методы исследования, модифицирует существующие и разрабатывает новые методы, исходя из задач конкретного исследования	Знать: задачи, возникающие в ходе научно исследовательской деятельности. Уметь: выбирать необходимые методы исследования. Владеть: умением модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования
		ОПК-2.3	Применяет полученные результаты, представляет итоги проделанной работы	Знать: область применения полученных результатов. Уметь: анализировать и осмысливать полученные результаты, представлять итоги проделанной работы. Владеть: анализом полученных результатов

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 2/72.

Форма промежуточной аттестации: зачет.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
Аудиторные занятия		34	34
в том числе:	лекции		
	практические	34	34
	лабораторные		
Самостоятельная работа		38	38
в том числе: курсовая работа (проект)			
Форма промежуточной аттестации (экзамен – __ час.)			
Итого:		72	72

13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1.	Динамика системы точек.	Центр масс системы материальных точек. Теорема об импульсе системы и о движении центра масс. Теорема об изменении кинетического момента системы. Вращение твердого тела вокруг оси. Теорема об изменении кинетической

		энергии системы материальных точек.	
2	Аналитическая механика и задача Кеплера.	Законы Кеплера. Уравнения Лагранжа второго рода.	

13.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Лабораторные	Практические	Самостоятельная работа	
1	Динамика системы точек	0	0	18	20	38
2	Аналитическая механика	0	0	16	18	34
Итого:		0	0	34	38	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в проведении практических занятий. При изучении курса «Математические модели механических систем» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждого практического занятия студентам рекомендуется подробно разобрать теоретический материал, разобрать примеры, решенные на занятии.
2. Приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.

Вопросы практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (6 семестр – зачет).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. — СПб. [и др.] : Лань, 2006. — 447 с. (и все предыдущие издания)
2.	Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики : учебное пособие для вузов / Н. Н. Бухгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Часть 1 : Основной

	курс теоретической механики — 2021. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-7957-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/169804
3.	Прядко И.Н.. Кинематика [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / И. Н. Прядко, Т. Ю. Сапронова .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021 .

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
4.	Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 10-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021 — Том 2 : Динамика — 2021. — 640 с. — ISBN 978-5-8114-1021-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168475
5	Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учебное пособие / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 5-е изд., стер. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Том 1 : Механика — 2007. — 224 с. — ISBN 978-5-9221-0819-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/223

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
6.	Электронно-библиотечная система "Лань"
7	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online"
8.	Образовательный портал "Электронный университет ВГУ"

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. — СПб. [и др.] : Лань, 2006 .— 447 с. . (и все предыдущие издания)
2.	Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики : Учебник для гос ун-тов / Н.Н. Бухгольц; В переработке и с дополнениями С.М. Тарга. — Ч.2: Динамика системы материальных точек .— М.: Наука, 1972 .— 332с. . (и все предыдущие издания)
3.	Сборник задач по теоретической механике : Учебное пособие для студентов вузов / [Н.А. Бражниченко, В.Л. Кан, Б.Л. Минцберг и др.] ; под ред. Н.А. Бражниченко.— М. : Высшая школа, 1986 .— 479 с. . (и все предыдущие издания)

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Практическое занятие. Также при реализации учебной дисциплины, используются дистанционные образовательные технологии (курс на сайте edu.vsu.ru). При проведении занятий в дистанционном режиме обучения используются информационные и технические ресурсы Образовательного портала «Электронный университет ВГУ».

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория: специализированная мебель

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Динамика точки.	ОПК-1 ОПК-2	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-2.1,	Домашнее задание, контрольная работа
2.	Динамика систем точек.	ОПК-1 ОПК-2	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Домашнее задание, контрольная работа
3.	Аналитическая механика.	ОПК-1 ОПК-2	ОПК-1.1, ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Домашнее задание, контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				<i>Практическое задание</i>

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: проверка домашнего задания, контрольная работа

Пример контрольной работы

- Вариант** Найти главный вектор внешних сил, действующих на систему, состоящую из трех точек А, В, С с массами 5кг, 3 кг, 1 кг, соответственно, если

$$r_A = \begin{pmatrix} t \\ e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}, r_B = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 7t^3 \end{pmatrix}, r_C = \begin{pmatrix} 3t \\ -e^{2t} \\ -14 \cos 3t \end{pmatrix}.$$

- В шахте на глубине 100 м каждую минуту накапливается 4,5 мг воды. Какой мощности насос требуется для откачивания этой воды?
- Упавший на Землю метеорит массы 39 кг углубился в почву на 1,875 м. Вычислено, что почва в месте падения метеорита оказывает проникающему в нее телу сопротивление $5 \cdot 10^5$ Н. С какой скоростью метеорит достиг поверхности Земли? С какой высоты он должен был упасть без начальной скорости, чтобы у поверхности Земли приобрести указанную скорость? Считаем силу тяжести постоянной и пренебрегаем сопротивлением воздуха
- Тяжелая бусинка движется по гладкой проволоке, форма которой задается формулой $y = (x - 1)^2$; ось y направлена вертикально вверх. Найти уравнение движения бусинки, функцию Лагранжа и общий вид малых колебаний вблизи положения равновесия.
- Дано кольцо массы 6кг, внутренний радиус 10см, внешний 70 см. Найти момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и отстоящей от его центра на расстоянии 30 см.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Обучающийся в полной мере владеет теоретическими основами дисциплины, умеет связать теорию с практикой, доказывать теоремы и решать задачи, владеет математическим аппаратом при решении задач, осуществляет проверку адекватности моделей, анализирует результаты, оценивает надежность и качество функционирования</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Зачтено</i>
<i>Обучающийся владеет теоретическими основами дисциплины; в целом, умеет связать теорию с практикой, умеет доказывать теоремы и решать задачи, но допускает незначительные ошибки, неточности, владеет математическим аппаратом при решении задач, осуществляет проверку адекватности моделей, анализирует результаты</i>	<i>Базовый уровень</i>	
<i>Обучающийся частично владеет теоретическими основами дисциплины, допускает существенные ошибки при решении задач, не умеет связать теорию с практикой.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	
<i>Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.</i>	–	<i>Не Зачтено</i>

20.2 Промежуточная аттестация

Зачет выставляется по результатам контрольной работы.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Материальная точка движется по кривой $f(x)$ в плоскости Oxy . Тогда число степеней свободы этой точки равно:

- 1
- 2
- 3
- 4

Ответ: 1.

2. Импульс тела:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$mV = F$$

Ответ: 3

Решение: Импульс тела $\vec{p} = m\vec{v}$

3. Импульс системы из двух материальных точек А и В с известными массами m_A и m_B и радиус-векторами r_{OA} и r_{OB} находится как:

1. $p = m_A m_B$
2. $p = m_A r_{OA} + m_B r_{OB}$
3. $p = m_A v_A + m_B v_B$
4. $p = m_A r_{OA}^2 + m_B r_{OB}^2$

Ответ: 3.

Решение: $p = m_A \dot{r}_{OA} + m_B \dot{r}_{OB} = m_A v_A + m_B v_B$.

4. Два спутника одного и того же центрального тела имеют одинаковые периоды обращения, но разные по форме орбиты. Можно ли утверждать, что орбиты имеют одинаковые площади?

1. можно
2. нельзя

Ответ: нельзя

Решение: нельзя, так в этом случае, по третьему закону Кеплера, большие полуоси орбит спутников совпадают; но так как орбиты имеют разную форму, малые полуоси различны. Отсюда площади орбит различны.

5. Два спутника одного и того же центрального тела имеют одинаковые периоды обращения. Могут ли их орбиты иметь разную форму?

1. могут
2. нет

Ответ: могут

Решение: в этом случае, по третьему закону Кеплера, большие полуоси орбит спутников совпадают; но малые полуоси могут быть различны. Отсюда орбиты могут иметь разную форму.

6. Небесное тело движется под действием «ньютоновой» силы, определяемой законом всемирного тяготения, причем кинетический момент тела (принимаемого за точку) отличен от нуля. Какую форму имеет орбита этого тела ?

- а) Орбита имеет форму эллипса.
- б) Орбита имеет форму параболы.
- в) Орбита может иметь форму любого невырожденного конического сечения.

Ответ: в) Орбита может иметь форму любого невырожденного конического сечения.

Решение. Уравнение орбиты имеет вид $\rho = \frac{P}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$. В зависимости от значения экс-

центриситета ε , это уравнение задает эллипс, параболу или ветвь гиперболы.

7. При движении материальной точки в центральном поле:

- а) скорость точки постоянна,
- б) ускорение точки постоянно,
- в) секторная скорость точки постоянна.

Ответ: в) секторная скорость точки постоянна.

Решение: см. доказательство второго закона Кеплера.

8. Из трех приведенных ниже утверждений выберите истинное :

- а) периоды обращения планет вокруг Солнца пропорциональны большим полуосям их орбит,
- б) квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит,
- в) кубы периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны квадратам больших полуосей их орбит.

Ответ: б) квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит,

Решение: см. третий закон Кеплера.

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Вставьте пропущенное слово в теорему о движении центра масс: Центр масс системы материальных точек движется так, как будто в нем сосредоточена вся [...] системы и на него действуют все внешние силы.

Ответ: масса.

Решение: Центр масс системы материальных точек движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы m и на него действуют все внешние силы F .

2. Найдите проекцию момента силы $F = (1, 0, 2)^T$ относительно центра O (начала координат) на ось Oy , если сила приложена к точке $A(2, 1, 3)$.

(В ответе указать только число)

Ответ: -1

Решение:
$$M = r_{OA} \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad M_y = -1$$

3. Найдите проекцию импульса системы из двух материальных точек A и B на ось Oy в момент времени $t = 1$ (сек), если известны массы и радиус-векторы этих точек: $m_A = 2$ кг, $m_B = 3$ кг, $r_{OA}(t) = (2t + 1, 0, -t)^T$, $r_{OB}(t) = (t^2, t, 1)^T$.

(В ответе указать только число)

Ответ: 3

Решение: $v_A(t) = \dot{r}_{OA}(t) = (2, 0, -1)^T$, $v_B(t) = \dot{r}_{OB}(t) = (2t, 1, 0)^T$,

$$p(1) = m_A \cdot v_A(1) + m_B \cdot v_B(1) = (10, 3, -2)^T, \quad p_y(1) = 3.$$

4. Максимальная угловая скорость спутника больше минимальной в 16 раз. Во сколько раз максимальное удаление спутника от центрального тела больше минимального.

Ответ: 4

Решение: $\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} = \frac{\rho_{max}^2}{\rho_{min}^2} = 16$, откуда $\rho_{max}^2 = 16\rho_{min}^2$

5. Если эксцентриситет орбиты спутника равен $\frac{1}{3}$, то во сколько раз максимальное

удаление спутника от центрального тела больше минимального?

Ответ: 2

$$\text{Решение: } \frac{\rho_{max}^2}{\rho_{min}^2} = \frac{\left(\frac{p}{1-\varepsilon}\right)^2}{\left(\frac{p}{1+\varepsilon}\right)^2} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = 4$$

6. Третий закон Кеплера можно записать как

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Где T - [...] обращения планеты и a – большая полуось орбиты планеты.

Вставьте пропущенное слово.

Ответ: период.

Решение: формулировка третьего закона Кеплера звучит так: Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит. Пропущенное слово – период.

7. Максимальное удаление спутника от центрального тела в 10 раз больше минимального. Во сколько раз максимальная угловая скорость больше минимальной?

Ответ: 100

$$\text{Решение: } \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} = \frac{\rho_{max}^2}{\rho_{min}^2} = 100$$

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов – указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).