

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и операторных уравнений



Каменский М.И.  
25.05.23г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.27 Математические модели механических систем**

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки.
- 2. Профиль подготовки:** Математическое и компьютерное моделирование, Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составители программы:** Сидельникова Софья Юрьевна, преподаватель, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений.
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета, протокол № 0500-06 от 25.05.2023г.
- 8. Учебный год:** 2025–2026 **Семестр:** шестой

### 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- ознакомление студентов с методами математического моделирования и анализа механических систем.

*Задачи учебной дисциплины:*

- применение математических методов к описанию движения и исследованию механических систем;  
- овладение методами классической и аналитической механики.

### 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к обязательной части блока 1. Дисциплина(модули).

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса

«Математические модели механических систем»:

– теоретическая механика (динамика точки и системы точек, аналитическая механика);  
– математический анализ (производная и дифференциал функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные);  
– аналитическая геометрия (действия с векторами, линии и поверхности второго порядка);  
– дифференциальные уравнения (дифференциальные уравнения первого порядка, линейные дифференциальные уравнения и системы);  
– линейная алгебра (матрицы, определители).

### 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической стати-	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: содержание процессов самоорганизации и самообразования, их особенностей и технологий реализации, исходя из целей совершенствования профессиональной деятельности. Уметь: планировать цели и устанавливать приоритеты при выборе способов принятия решений с учетом условий, средств, личностных возможностей и временной перспективы достижения; осуществления деятельности. Владеть: приемами саморегуляции эмоциональных и функциональных состояний при выполнении профессиональной деятельности; технологиями организации процесса самообразования; приемами целеполагания во временной перспективе, способами планирования, организации, самоконтроля и самооценки деятельности.
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания в	Знать: основные понятия разделов дисциплины, методы анализа и доказательств

стики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности		области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности	основных утверждений; Уметь: применять аппарат дискретной математики в решении практических задач; Владеть: навыками анализа и исследования конкретных задач.
	ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: основные понятия разделов дисциплины, методы анализа и решения задач Уметь: Находить необходимый научный материал по дискретной математике для корректного создания математической модели практических задач Владеть: навыками моделирования конкретных задач с помощью средств дискретной математики для последующего их исследования численными методами.

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 2/72.

Форма промежуточной аттестации: зачет.

## 13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам
		6-й семестр
Аудиторные занятия	34	34
в том числе:	лекции	
	практические	34
	лабораторные	
Самостоятельная работа	38	38
в том числе: курсовая работа(проект)		
Форма промежуточной аттестации (экзамен – час.)		
Итого:	72	72

### 13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
<b>2. Практические занятия</b>		
1	Динамика точки.	Свободные колебания материальной точки. Вынужденные колебания материальной точки. Импульс и кинетический момент материальной точки. Работа и мощность. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.
2	Динамика системы точек.	Центр масс системы материальных точек. Теорема об импульсе системы и о движении центра масс. Теорема об изменении кинетического момента системы. Вращение твердого тела вокруг оси. Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек.
3	Аналитическая механика.	Уравнения Лагранжа второго рода.
<b>3. Лабораторные занятия</b>		

### 13.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Динамика точки	0	12		12	24
2	Динамика системы точек	0	12		14	26
3	Аналитическая механика	0	10		12	22
Итого:		0	34		38	72

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в проведении практических занятий. На практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. При изучении курса обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждого практического занятия студентам рекомендуется подробно разобрать теоретический материал, разобрать примеры, решенные на занятии.
2. Перед практическим занятием обязательно повторить теоретический материал. Еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.
3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки.

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	<b>Мещерский И.В.</b> Задачи по теоретической механике : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. — СПб. [и др.] : Лань, 2006 .— 447 с.
2.	<b>Айзерман М.А.</b> Классическая механика : [учебное пособие] / М. А. Айзерман .— М. : Физматлит, 2005 .— 378 с.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3.	<b>Арнольд В.И.</b> Математические аспекты классической и небесной механики / В.И. Арнольд, В.В.Козлов, А.И.Нейштадт. — М. : УРСС, 2002 .— 414 с.
4.	<b>Бухгольц Н.Н.</b> Основной курс теоретической механики : Учебник для гос ун-тов / Н.Н. Бухгольц; В переработке и с дополнениями С.М. Тарга. — Ч.2: Динамика системы материальных точек .— М.: Наука, 1972 .— 332с.
5.	Сборник задач по теоретической механике : Учебное пособие для студентов втузов / [Н.А. Бражниченко, В.Л. Кан, Б.Л. Минцберг и др.] ; под ред. Н.А. Бражниченко.— М. : Высшая школа, 1986 .— 479 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
6.	<b>Бухгольц Н.Н.</b> Основной курс теоретической механики : Учебник для гос. ун-тов / Н.Н. Бухгольц; В переработке и с дополнениями С.М. Тарга. — Ч.1: Кинематика, статика, динамика материальной точки .— М. : Наука, 1972 .— 467с., <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/books/b7103.djvu">http://www.lib.vsu.ru/elib/books/b7103.djvu</a> >
7.	Прядко И.Н., Садовский Б.Н. Динамика 1 (конспект лекций). <URL: <a href="http://bsadovskiy.ru/include/6/6-6.pdf?1297791427">http://bsadovskiy.ru/include/6/6-6.pdf?1297791427</a> >.
8.	Прядко И.Н., Садовский Б.Н. Динамика 2 (конспект лекций). <URL: <a href="http://bsadovskiy.ru/include/6/6-7.pdf?1368508951">http://bsadovskiy.ru/include/6/6-7.pdf?1368508951</a> >.

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	<b>Мещерский И.В.</b> Задачи по теоретической механике : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. — СПб. [и др.] : Лань, 2006 .— 447 с.
2.	<b>Бухгольц Н.Н.</b> Основной курс теоретической механики : Учебник для гос ун-тов / Н.Н. Бухгольц; В переработке и с дополнениями С.М. Тарга. — Ч.2: Динамика системы материальных точек .— М.: Наука, 1972 .— 332с.
3.	Сборник задач по теоретической механике : Учебное пособие для студентов втузов / [Н.А. Бражниченко, В.Л. Кан, Б.Л. Минцберг и др.] ; под ред. Н.А. Бражниченко.— М. : Высшая школа, 1986 .— 479 с.

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Практическое занятие. Также при реализации учебной дисциплины, используются дистанционные образовательные технологии (курс на сайте edu.vsu.ru). При проведении занятий в дистанционном режиме обучения используются информационные и технические ресурсы Образовательного портала «Электронный университет ВГУ».

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория: специализированная мебель

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Динамика точки.	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3,	Домашнее задание, контрольная работа

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
2.	Динамика систем точек.	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашнее задание, контрольная работа
3.	Аналитическая механика.	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашнее задание, контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				<i>Перечень вопросов К зачету</i>

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: домашнее задание, контрольная работа

**Вариант 1**

1. Груз массой 100 г подвесили к концу недеформированной пружины и отпустили без начальной скорости. Длина недеформированной пружины равна 45 см, а при равновесии груза на пружине ее длина равна 65 см. Найти: 1) уравнение движения груза; 2) амплитуду и период колебаний.
2. Материальная точка движется под действием силы всемирного тяготения по эллиптической орбите, причем известно, что максимальное значение угловой скорости равно  $\omega_1$ , минимальное –  $\omega_2$ , а минимальное значение расстояния от движущейся точки до фокуса (центра поля) равно  $\rho_1$ . Найти: 1) константу  $c = |r \times v|$ , 2) большую полуось  $a$  орбиты, 3) абсолютную величину скорости точки в тот момент времени, когда угловая скорость минимальна.

**Вариант 2**

1. Груз массой 100 г движется по гладкой горизонтальной прямой под действием пружины и магнитной силы величины 0,98 Н, направленной на растяжение пружины. В начальный момент пружина не деформирована и ее длина равна 55 см, а груз отпущен с нулевой скоростью. В положении равновесия длина пружины равна 75 см. Найти: 1) уравнение движения груза; 2) амплитуду и период колебаний.
2. Материальная точка движется под действием силы всемирного тяготения по эллиптической орбите, причем известно, что максимальное значение угловой скорости равно  $\omega_1$ , максимальное значение расстояния от движущейся точки до фокуса (центра поля) равно  $\rho_2$ , большая полуось орбиты равна  $a$ . Найти: 1) константу  $c = \rho^2 \dot{\phi}$ , 2) минимальное значение угловой скорости, 3) абсолютную величину скорости точки в тот момент времени, когда угловая скорость минимальна.

### 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: *собеседование по билетам зачета.*

Билеты к зачету формируются из заданий аналогичных задания контрольных работ.

**Вариант 1**

1. Тяжелая бусинка движется по гладкой проволоке под действием силы тяжести. Форма проволоки описывается уравнениями  $y = x^2 - x$ ,  $z = 0$  (ось  $Oy$  направлена вертикально вверх). Составить уравнение движения бусинки (уравнение Лагранжа 2-го рода).

2. Материальная точка  $A$  массы  $60 \text{ г}$  в плоскости  $Oxy$  движется по кривой  $y = tg x$  по закону  $x(t) = \pi t$  см. Материальная точка  $B$  массы  $50 \text{ г}$  соединена с точкой  $A$  невесомым стержнем длины  $40 \text{ см}$  и также движется в плоскости  $Oxy$ , причем угол  $\varphi = \angle(\vec{e}_x, \vec{AB})_n$  изменяется по закону  $\varphi(t) = \pi(t^2 + t)$  рад. Найти импульс системы  $\{A, B\}$  в момент времени  $t_1 = 1 \text{ с}$ .

3. На горизонтальной платформе длины  $8 \text{ м}$  находятся три человека: первый (массы  $70 \text{ кг}$ ) стоит на левом конце платформы, второй (массы  $80 \text{ кг}$ ) – на правом, а третий (массы  $50 \text{ кг}$ ) – ровно посередине. В каком направлении и на какое расстояние должен был переместиться третий человек, если первые два поменялись местами, а сама платформа осталась в прежнем положении?

**Вариант 2** 1. Тяжелая бусинка движется по гладкой проволоке под действием силы тяжести. Форма проволоки описывается уравнениями  $z = \cos^2 x$ ,  $y = 0$  (ось  $Oz$  направлена вертикально вверх). Составить уравнение движения бусинки (уравнение Лагранжа 2-го рода).

2. Материальная точка  $A$  массы  $50 \text{ г}$  в плоскости  $Oxy$  движется по кривой  $y = x^3$  по закону  $x(t) = e^t$  см. Материальная точка  $B$  массы  $20 \text{ г}$  соединена с точкой  $A$  невесомым стержнем длины  $30 \text{ см}$  и также движется в плоскости  $Oxy$ , причем угол  $\varphi = \angle(\vec{e}_x, \vec{AB})_n$  изменяется по закону  $\varphi(t) = \frac{\pi t^2}{2}$  рад. Найти импульс системы

$\{A, B\}$  в момент времени  $t_1 = 1 \text{ с}$ .

3. На горизонтальной платформе длины  $12 \text{ м}$  и массы  $3000 \text{ кг}$  находятся три человека: первый (массы  $50 \text{ кг}$ ) стоит на левом конце платформы, второй (массы  $100 \text{ кг}$ ) – на правом, а третий (массы  $60 \text{ кг}$ ) – ровно посередине. В каком направлении и на какое расстояние переместится платформа, если первые два человека поменяются местами, а третий станет рядом с первым?

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков. КИМ содержит два теоретических вопроса и одно практическое задание.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Обучающийся в полной мере владеет теоретическими основами дисциплины, умеет связать теорию с практикой, доказывать теоремы и решать задачи, владеет математическим аппаратом при решении задач, осуществляет проверку адекватности моделей, анализирует результаты, оценивает надежность и качество функционирования</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Зачтено</i>
<i>Обучающийся владеет теоретическими основами дисциплины; в целом, умеет связать теорию с практикой, умеет доказывать теоремы и решать задачи, но допускает незначительные ошибки, неточности, владеет математическим аппаратом при решении задач, осуществляет проверку адекватности моделей, анализирует результаты</i>	<i>Базовый уровень</i>	
<i>Обучающийся частично владеет теоретическими основами дисциплины, допускает существенные ошибки при решении задач, не умеет связать теорию с практикой.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	
<i>Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.</i>	–	<i>Не Зачтено</i>

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1) закрытые задания (тестовые):

1. Материальная точка движется под действием известной силы. Из перечисленных характеристик движущейся точки для определения кинетической энергии точки необходимы:

- A) масса
- B) скорость
- C) ускорение
- D) сила

Варианты ответов:

- 1. A и B
- 2. A и D
- 3. A и C
- 4. A, C и D

Ответ: 1

Решение: формула для вычисления кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$ , поэтому нужно выбрать массу и скорость.

2. Второй закон Ньютона имеет следующую формулировку:

- 1. существуют такие системы отсчета, в которых свободные тела движутся прямолинейно и равномерно.
- 2. сила есть произведение массы на ускорение.
- 3. силы в природе возникают симметричными парами.
- 4. два тела взаимодействуют друг на друга с силами, равными по модулю, но противоположными по направлению.

Ответ: 2

Решение: Второй закон Ньютона имеет следующую формулировку: сила есть произведение массы на ускорение.

3. Второй закон Ньютона:

- 1.  $\vec{F} = m\vec{a}$
- 2.  $\vec{F} = m\vec{g}$
- 3.  $P = mv$
- 4.  $mV = F$

Ответ: 1

Решение: Второй закон Ньютона:  $\vec{F} = m\vec{a}$

4. Материальная точка двигается по кривой  $f(x)$  в плоскости  $Oxy$ . Тогда число степеней свободы этой точки равно:

- 1. 1
- 2. 2



3. 3

4. 4

Ответ: 1

Решение: положение точки можно однозначно определить координатой  $x$ . Отсюда число степеней свободы равно 1.

5. Импульс тела:

1.  $\vec{F} = m\vec{a}$

2.  $\vec{F} = m\vec{g}$

3.  $\vec{p} = m\vec{v}$

4.  $mV = F$

Ответ: 3

Решение: Импульс тела  $\vec{p} = m\vec{v}$ 2) открытые задания:

1. Максимальное удаление спутника от центрального тела в 10 раз больше минимального. Во сколько раз максимальная угловая скорость больше минимальной?

Ответ: 100

Решение:  $\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} = \frac{\rho_{max}^2}{\rho_{min}^2} = 100$

2. Если эксцентриситет орбиты спутника равен  $\frac{1}{3}$ , то во сколько раз его наибольшая угловая скорость больше минимальной?

Ответ: 4

Решение:  $\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} = \frac{\rho_{max}^2}{\rho_{min}^2} = \frac{\left(\frac{p}{1-\varepsilon}\right)^2}{\left(\frac{p}{1+\varepsilon}\right)^2} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = 4$

3. Чему равно ускорение в  $\text{м/с}^2$ , сообщаемое телу массой 20 кг силой 120Н?

Ответ: 6

Решение:  $a = \frac{F}{m} = \frac{120}{20} = 6$

4. Третий закон Кеплера можно записать как

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Где  $T$ -период обращения планеты и  $a$  – большая [...] орбиты планеты.

Вставьте пропущенное слово.

Ответ: полуось.

Решение: формулировка третьего закона Кеплера звучит так: Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит. Пропущенное слово – полуось.

5. Вставьте пропущенное слово в теорему об изменении импульса системы: Центр масс системы материальных точек движется так, как будто в нем сосредоточена вся [...] системы и на него действуют все внешние силы.

Ответ: масса

Решение: Центр масс системы материальных точек движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы  $m$  и на него действуют все внешние силы  $F$ .

### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

#### 1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

#### 2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

#### 3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

#### 4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

#### 5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**