

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**  
Заведующий кафедрой  
математического моделирования  
М.Ш. Бурлуцкая  
25.05.2023 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.О.21 Математическое моделирование: вариационные и стохастические принципы**

**1. Код и наименование направления подготовки:**

01.03.04 Прикладная математика

**2. Профиль подготовки:**

Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

**3. Квалификация выпускника:** Бакалавр

**4. Форма обучения:** Очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

Кафедра математического моделирования

**6. Составитель программы:** Пенкин Олег Михайлович, д.ф.-м. наук, профессор.

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом математического факультета, протокол № 0500-06 от 25.05.2023

**8. Учебный год:** 2025/2026

**Семестр:** 6

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- изучение основных понятий, приемов и методов математического моделирования и рассмотрение современных технологий построения и исследования математических моделей различных сложных технических систем (в том числе и с участием человека).

*Задачи учебной дисциплины:*

- выработать практические навыки декомпозиции, абстрагирования при решении задач в различных областях профессиональной деятельности.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Математическое моделирование: вариационные и стохастические принципы Математическое моделирование: вариационные и стохастические принципы» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. Дисциплины (модули).

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять знание фундаментальной математики и естественнонаучных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук.  Уметь: использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.  Владеть: навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности	
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	
ОПК-2	Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских	ОПК-2.1	Владеет навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач	Знать: математические методы и модели.  Уметь: осуществлять проверку адекватности математических моделей.

	и проектных задач математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надежность и качество функционирования систем	ОПК-2.2	Осуществляет проверку адекватности математических моделей	Владеть навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач.
		ОПК-2.3	Анализирует результаты и оценивает надежность и качество функционирования систем	

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. —3/108.**

**Форма промежуточной аттестации: зачет.**

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			3 семестр	
Контактная работа		48	48	
в том числе:	лекции	16	16	
	практические	32	32	
	лабораторные	0	0	
	курсовая работа			
	контрольные работы			
Самостоятельная работа		60	60	
Промежуточная аттестация				
Итого:		<b>108</b>	<b>108</b>	

#### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			

1.1	Построение моделей на основе принципов равновесия,	Вывод уравнений малых перемещений механических систем - струн, мембран, сеток струн и стратифицированных структур, под действием внешних нагрузок, а также уравнений колебаний этих систем.	
1.2	Построение моделей на основе вариационных принципов.	Некоторые вариационные принципы механики (принцип Лагранжа, принцип Гамильтона и др.) и их применение к выводу уравнений равновесия под действием внешних нагрузок и уравнений колебаний.	
1.3	Применение случайных процессов к моделированию.	Построение случайных процессов для решения краевых задач для волнового уравнения и уравнения Лапласа, а также для их стратифицированных аналогов	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Построение моделей на основе принципов равновесия,	Решение задач на вывод уравнения равновесия струны и мембраны, а также их колебаний при различных способах их закрепления.	
2.2	Построение моделей на основе вариационных принципов.	Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для различных механических систем: струн, мембран, струнных сеток, стратифицированных структур.	
2.3	Применение случайных процессов к моделированию.	Построение случайных процессов для решения различных задач, связанных с равновесием и колебаниями различных механических систем. Организация соответствующих вычислений на компьютере.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Вывод уравнений малых перемещений струн из принципа равновесия.	2	4	-	6	12
2	Вывод уравнения малых перемещений мембраны из принципа	2	4	-	6	12
3	Вывод уравнения равновесия сеток из струн. Краевые задачи на графах.	2	4	-	8	14
4	Вывод уравнения Эйлера - Лагранжа в простейшей вариационной задаче	2	4	-	8	14
5	Применение принципа Лагранжа к выводу уравнений равновесия струны.	2	4	-	8	14
6	Применение принципа Лагранжа к выводу уравнений равновесия и колебаний мембраны.	2	4	-	8	14
7	Построение случайных процессов для эллиптических и гиперболических уравнений	2	4	-	8	14

8	Построение случайных процессов для моделирования стратифицированных сред.	2	4	-	8	14
	<b>Итого:</b>	<b>16</b>	<b>32</b>	<b>-</b>	<b>60</b>	<b>108</b>

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 60 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Математическое моделирование: вариационные и стохастические принципы» предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам дисциплины с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение практических заданий, поиск необходимых для работы материалов в Интернете.

Особое внимание обучающихся направляется на освоение необходимого в дальнейшем математического аппарата.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольных и самостоятельных работ) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

В случае необходимости перехода на дистанционный режим обучения используется электронный курс «Математическое моделирование: вариационные и стохастические принципы» на портале «Электронный университет ВГУ»: <https://edu.vsu.ru>.

Там же размещены необходимые для усвоения курса материалы.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. Физматлит, 2004
2	Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. ГИТТЛ, 1951
3	Коралов Л.Б., Синай Я.Г. Теория вероятностей и случайные процессы. МЦНМО, 2013

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике, Мир. 1967
2	К.В. Гардинер. Стохастические методы в естественных науках. Мир. 1986
3	М. Кац. Вероятность и смежные вопросы физики. Мир. 1965

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	Сайт математического факультета ВГУ. Раздел, на котором размещены методические издания: <a href="https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937">https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937</a> .
2	ЭБС «Университетская библиотека онлайн».
3	Электронный каталог ЗНБ ВГУ : <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> .
4	Электронный университет ВГУ: <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=19958">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=19958</a> .

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете.

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru>).

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации; специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно-правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

Перечень необходимого программного обеспечения:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop>),

Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/>)

LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/>)

Foxit Reader, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Вывод уравнений малых перемещений струн из принципа равновесия.	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Перечень вопросов, практические задания.
2	Вывод уравнения малых перемещений мембраны из принципа		ОПК-1.2, ОПК-1.3	Перечень вопросов, практические задания.
3	Вывод уравнения равновесия сеток из струн. Краевые задачи на графах.		ОПК-1.2, ОПК-1.3	Перечень вопросов, практические задания.
4	Вывод уравнения Эйлера - Лагранжа в простейшей вариационной задаче	ОПК-1, ОПК-2	ОПК-1.3, ОПК-2.1	Перечень вопросов, практические задания.
5	Применение принципа Лагранжа к выводу уравнений равновесия струны.		ОПК-2.2	Перечень вопросов, практические задания.
6	Применение принципа Лагранжа к выводу уравнений равновесия и колебаний мембраны.		ОПК-2.1, ОПК-2.2	Перечень вопросов, практические задания.
7	Построение случайных процессов для эллиптических и гиперболических уравнений		ОПК-2.1, ОПК-2.2	Перечень вопросов, практические задания.
8	Построение случайных процессов для моделирования стратифицированных сред.		ОПК-2.2, ОПК-2.3	Перечень вопросов, практические задания.
Промежуточная аттестация Форма контроля – зачет				Перечень вопросов к зачету

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: устных опросов, проверки домашних заданий, самостоятельных работ, контрольной работы.

Для оценивания текущего контроля успеваемости и оценивания самостоятельной работы используются следующие **показатели**:

- 1) знание основных понятий и методов;
- 2) умение применять полученные знания и навыки для решения задач, проводить анализ полученных решений;

- 3) владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.

**Шкала оценок:**

Зачтено: Выполнение заданий соответствует перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками.

Не зачтено: Ответы не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

**20.2. Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется в форме собеседования по билетам с помощью нижеприведенных оценочных средств (перечень вопросов к зачету).

В билет включаются теоретический вопрос и задача из примерного перечня задач для контрольной работы.

В случае посещения обучающимся всех аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активной работы на них, успешного выполнения элементов текущей аттестации (самостоятельные работы), оценка за промежуточную аттестацию может быть выставлена по результатам текущих аттестаций.

**Перечень вопросов к зачету:**

1. Вывод уравнений малых перемещений струн из принципа равновесия.
2. Вывод уравнения малых перемещений мембраны из принципа
3. Вывод уравнения равновесия сеток из струн. Краевые задачи на графах.
4. Вывод уравнения Эйлера - Лагранжа в простейшей вариационной задаче
5. Применение принципа Лагранжа к выводу уравнений равновесия струны.
6. Применение принципа Лагранжа к выводу уравнений равновесия и колебаний мембраны.
7. Построение случайных процессов для эллиптических и гиперболических уравнений
8. Построение случайных процессов для моделирования стратифицированных сред.

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие **показатели:**

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи;
- 3) умение работать с алгоритмами методов и информационными ресурсами;
- 4) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов на зачете используется **шкала:** «зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:



Критерии оценивания	Шкала оценок
Выполнение заданий соответствует перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками.	«Зачтено»
Ответ не соответствует ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или отсутствие их.	«Не зачтено»

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### Перечень заданий для оценки сформированности компетенции:

##### Вопрос 1

Какое из предложенных понятий не является этапом математического моделирования

1. Математическая модель
2. Алгоритм численного решения
3. Программная реализация
4. Патентный поиск и изучение литературы (*правильный ответ*)

##### Вопрос 2

Какая из представленных моделей является «жесткой»

1.  $\frac{dy}{dt} = kf(t, y), k = const$  (*правильный ответ*)
2.  $\frac{dy}{dt} = k(t)y(t), k = -t$
3.  $\frac{dy}{dt} = k(y)f(t, y), k = y$
4.  $\frac{dy}{dt} = k(t)f(t, y), k = -t, f(t, y) = y$

##### Вопрос 3

Какая модель имеет решением экспоненциальную функцию

1. Уравнение Ферхюльста (логистическое уравнение)
2. Мальтузианская модель роста (*правильный ответ*)
3. Модель Ланкастера (борьба двух противников)
4. Модель Лотка-Вольтерра (хищник-жертва)

**Вопрос 4**

Укажите раздел физики, в котором не встречается уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ :

1. Задачи механики
2. Задачи теплопроводности
3. Электростатика
4. Гидравлика
5. Нет правильного ответа (*правильный ответ*)

**Вопрос 5**

Что из перечисленного не может являться математической моделью

1. Линейное уравнение
2. Обыкновенное дифференциальное уравнение
3. Уравнение в частных производных
4. Искусственные нейронные сети
5. Нет правильного ответа (*правильный ответ*)

### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

#### I. Тестовые задания.

##### 1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

##### 2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- за каждый верный ответ ставится 1 балл, при этом за каждый неверный ответ вычитается 1 балл;
- 0 баллов — не выбрано ни одного верного ответа.

##### 3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

##### 4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

#### II. Расчетные задачи.

##### 1) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;

- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**

•