МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко

16.04.24

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.28 Методика решения задач с параметрами при подготовке к ЕГЭ профильного уровня

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета

6. Составители программы: проф., д.ф.-м.н. Глушко А.В.

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол № 0500-03 от 28.03.2024

(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: 2027/2028 **Семестр(ы): 7**

9.Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- сформировать способность использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики;
- выявить и довести до обучающегося основные теоретические предпосылки, составляющие теорию решения задач с параметрами высокого уровня сложности с применением основных понятий, категорий педагогики, психологии и методики преподавания; современных методик реализации образовательного процесса;
- сформулировать понятие критического значения параметра и его применения к решению задач с параметрами.

Задачи учебной дисциплины:
- сформировать навыки использования специальных методов решения задач с параметрами (критические значения параметра, расположение корней квадратного трехчлена, использование удобной точки, использование симметрий алгебраических выражений, 2 метода построения графических образов); и сформулировать методику обучения их применению;
- на основе решения большого количества задач повышенной сложности закрепить стандартные методы решения задач с параметрами и довести понимание методики основных методов решения до достаточного уровня.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Методика решения задач с параметрами при подготовке к ЕГЭ профильного уровня» относится к Блоку 1 Обязательной части.

Для её успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения в средней школе.

Знание методов изучения решений задач с параметрами востребовано при подготовке выпускников школ к экзамену ЕГЭ по математике профильного уровня.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-3	Способность к решению задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	ОПК-3.1	Анализирует многообразие современных способов решения задач в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: основные понятия, категории педагогики и методики преподавания Уметь: Организовывать образовательный процесс с учетом современных методик решения задач с параметрами Владеть: методами классификации задач с параметрами и методикой использования критических значений параметра,
		ОПК-3.2	Выбирает оптимальный способ исследования задач аналитического характера в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: общеизвестные методики и стандартные приемы решения задач с параметрами Уметь: анализировать постановку задачи для определения подходящего метода решения Владеть: навыками поиска необходимой информации в профессиональных базах данных для решения поставленных задач

		ОПК-3.3	Применяет выбранный метод исследования к решению задачи в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: методы анализа постановок задач для определения способа решения Уметь: использовать информацию по обширным базам данных, содержащих типовые решения задач Владеть: методиками поиска, сбора и обработки информации, системным подходом для решения поставленных задач

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — __2__/__72___.

Форма промежуточной аттестации__Зачет – 7 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			7 семестр
Контактная работа		28	28
в том числе:	лекции	14	14
	практические	14	14
	лабораторные	-	-
	курсовая работа	-	-
	контрольные работы	-	-
Самостоятельная работа		44	44
Промежуточная аттестация		-	-
Итого:		**72**	**72**

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
		1. Лекции	
1.1	Введение	. Историческая справка. Связь с программированием процедур.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24794 https://alexlarin.net/param.html https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/zadachi-s-parametrami-na-ege-po-matematike/
		Эвристические рассуждения. Выявление классификаторов	
1.2	Основные теоретические положения.	Понятие точки вырождения, точки кратности. Определение критического значения параметра. Определения допустимого и недопустимого значений параметров.	
		Понятие ОДЗ «в терминах параметров». Два типа постановок задач с параметрами.	
1.3	Стандартные методы	Линейные и дробно-линейные уравнения и неравенства с параметрами в задачах первого и второго типа постановок.	
		Задачи с параметром для квадратичных уравнений и неравенств. Методы ответа на пять стандартных вопросов, возникающих в задачах о расположении корней квадратного трехчлена.	

		Иррациональные и трансцендентные уравнения и неравенства с параметрами. Методы их равносильного сведения к задачам о расположении корней квадратного трехчлена.	https://e.lanbook.com/book/106570
		Задачи с параметрами и модулями.	https://e.lanbook.com/journal/issue/294826
		Задачи с параметрами, решаемые методом интервалов.	
1.4	. Методы поиска необходимых условий на параметры в задачах 2 типа постановки	Метод «удобной точки».	
		Использование симметрий выражений типа четность/нечетность.	
		Использование перестановочных симметрий выражений для систем уравнений с параметром.	
1.5	Построение графического образа задачи с параметром	В плоскости *Oxa*.	
		В плоскости *Oxy*.	
2. Практические занятия			
1.1	Введение	. Эвристические рассуждения. Выявление классификаторов	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24794
1.2	Основные теоретические положения.	Понятие точки вырождения, точки кратности. Определение критического значения параметра. Определения допустимого и недопустимого значений параметров.	https://alexlarin.net/param.html
1.3	Стандартные методы	Линейные и дробно-линейные уравнения и неравенства с параметрами в задачах первого и второго типа постановок.	https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/zadachi-s-parametrami-na-ege-po-matematike/
		Задачи с параметром для квадратичных уравнений и неравенств.	
		Иррациональные и трансцендентные уравнения и неравенства с параметрами. Методы их равносильного сведения к задачам о расположении корней квадратного трехчлена.	
		Задачи с параметрами и модулями.	
		Задачи с параметрами, решаемые методом интервалов.	
1.4	. Методы поиска необходимых условий на параметры в задачах 2 типа постановки	Метод «удобной точки».	https://e.lanbook.com/book/9320
		Использование симметрий выражений типа четность/нечетность.	
1.5	Построение графического образа задачи с параметром	В плоскости *Oxa*.	https://e.lanbook.com/journal/issue/286153
		В плоскости *Oxy*.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Введение	1	1	-	4	6
2	Основные теоретические положения.	1	1	-	4	6
3	Стандартные методы	4	4	-	12	20

4	. Методы поиска необходимых условий на параметры в задачах 2 типа постановки	4	4	-	12	20
5	Построение графического образа задачи с параметром	4	4	-	12	20
	Итого:	14	14	-	44	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Методика решения задач с параметрами при подготовке к ЕГЭ профильного уровня» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 44 часа.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Методика решения задач с параметрами при подготовке к ЕГЭ профильного уровня» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (контрольная работа и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятия обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям (6 семестр – зачет)

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (7 семестр – зачет).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

№ п/п	Источник
1	Тригонометрия: теория и практика решения задач : учебное пособие / С.С. Граськин, А.В. Афанасьева, М.Е. Гутнер [и др.] ; под редакцией С.С. Граськина. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 325 с. — ISBN 978-5-7038-3281-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/106570

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Мациевский, С.В. Попов Ю. И. Применение графиков при решении задач с параметрами : учебное пособие. Калининград, 2013 / С.В. Мациевский // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. — 2013. — № 10. — С. 174-175. — ISSN 2223-2095. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/journal/issue/286153
2	Танцорова С.И. О некоторых способах пропедевтики решения задач с параметром в основной школе / С.И. Танцорова // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. — 2013. — № 2. — С. 258-261. — ISSN 1995-0861. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/journal/issue/294826
3	Шуман А.Ю. Педагогический эксперимент по введению элективного курса «Задачи с параметрами», как средство развития исследовательских навыков / А.Ю. Шуман // Вестник научного общества студентов, аспирантов и молодых ученых. — 2016. — № 1. — С. 190-196. — ISSN 9999-7444. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/journal/issue/299375
4	Гельфанд, И.М. Тригонометрия : руководство / И.М. Гельфанд, С.М. Львовский, А.Л. Тоом. — 3-е изд., испр. — Москва : МЦНМО, 2008. — 200 с. — ISBN 978-5-94057-391-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/9320

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1	*http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ*

2	*http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания*
3	http://fipi.ru/ege-i-gve-11/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy - интернет портал, посвященный подготовке
4	http://alexlarin.net/ - интернет портал, посвященный подготовке к ЕГЭ

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Танцорова С.И. О некоторых способах пропедевтики решения задач с параметром в основной школе / С.И. Танцорова // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. — 2013. — № 2. — С. 258-261. — ISSN 1995-0861. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/journal/issue/294826
2	Шуман А.Ю. Педагогический эксперимент по введению элективного курса «Задачи с параметрами», как средство развития исследовательских навыков / А.Ю. Шуман // Вестник научного общества студентов, аспирантов и молодых ученых. — 2016. — № 1. — С. 190-196. — ISSN 9999-7444. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/journal/issue/299375

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ»

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, Calc, Math, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet Explorer.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой (ауд. 310), расположенный на 3 этаже учебного корпуса № 1, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

---

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Введение	ОПК-3	ОПК-3.1	Домашние задания, работа у доски
2	Основные теоретические положения.	ОПК-3	ОПК-3.2, ОПК-3.3	Домашние задания, работа у доски
3	Стандартные методы	ОПК-3	ОПК-3.2, ОПК-3.3	Домашние задания, работа у доски
4	Методы поиска необходимых условий на параметры в задачах 2 типа постановки	ОПК-3	ОПК-3.2, ОПК-3.3	Домашние задания, работа у доски
5	Построение графического образа задачи с параметром	ОПК-3	ОПК-3.2, ОПК-3.3	Домашние задания, контрольная работа

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашние задания:

По теме 1. Введение

Задачи:

При всех допустимых значениях параметров решить (№№ 1-6)

1. $\left(a^2-4a\right)x=a-4$.

2. $ax^2-x+3=0$.

3. $ax^2<1$.

4. $\left(a+1\right)x=a^2-1$.

5. $\left(a^2-9\right)x=a+3$.

6. $ax^2-x+a=1$.

7. Найти все a, при которых корни уравнения $x^2+ax+1=0$ различны и лежат на $\left[0;2\right]$.

8. Найти a, при которых корни уравнения $x^2+ax+a=0$ больше 1.

9. Найти a, при которых корни уравнения $x^2-2ax-1=0$ по модулю не больше 2.

10. Найти a, при которых корни уравнения $\left(a-2\right)x^2-2ax+\left(a-1\right)=0$ положительны.

11. Найти a, при которых один из корней уравнения $x^2-2ax-a=0$ больше 1, а другой меньше 1.

12. Найти a, при которых уравнение $x^2-2\left(a-2\right)x+a^2-2a-3=0$ имеет два различных положительных корня.

По теме 2. Основные теоретические положения.

Задачи:

1. Найти все a, при которых корни уравнения $x^2+ax+1=0$ различны и лежат на $\left[0;2\right]$.

2. Найти a, при которых корни уравнения $x^2+ax+a=0$ больше 1.

3. Найти a, при которых корни уравнения $x^2-2ax-1=0$ по абсолютной величине не больше 2.

4. Найти a, при которых корни уравнения $\left(a-2\right)x^2-2ax+\left(a-1\right)=0$ положительны.

5. Найти a, при которых один из корней уравнения $x^2-2ax-a=0$ больше 1, а другой меньше 1.

6. Найти a, при которых уравнение $x^2-2\left(a-2\right)x+a^2-2a-3=0$ имеет два различных положительных корня.

7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\cdot\lg(ax-1)=\lg(8x-x^2-15)$ имеет единственное решение.

8. При каждом допустимом значении параметра a решить неравенство $\log_a(7-x)>2\log_a(x-1)$.

9. При каждом допустимом значении параметра a решить уравнение $x^2+3x=|a(x+3)|$.

10. При каждом допустимом значении параметра a решить уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=2$.

11. При каждом допустимом значении параметра a решить неравенство $ax-(4a-2)\sqrt{x}\le 8$

По теме 3. Стандартные методы

1. При каких значениях $a\in(1;\ 5)$ уравнение $\cos^2(\pi x+\frac{5\pi}{12})+\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+|\sin ax|}$ имеет решение на отрезке [2; 3] ?

2. При каких значениях параметра *а* уравнения $|\sin x|=1$ и $a\cos x=\sin 2x$ равносильны?

3. При каких значениях a неравенство $(-x^2+(2a-6)x+3a^2+18a)\sqrt{x+4}\ge 0$ имеет единственное решение?

4. Найдите сумму всех значений параметра a из интервала $(2;\ 7)$, при каждом из которых существует хотя бы одно $x\in[1;\ 2]$, удовлетворяющее уравнению $\log_3(1+\sin^2(\frac{\pi x}{2}+\frac{5\pi}{12}))=|\cos ax|-1$.

5. При каждом допустимом значении параметра a решить уравнение $9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$.

6. При каждом допустимом значении параметра a решить неравенство $x+a-\sqrt{3ax+4a^2}>0$.

7. При каждом допустимом значении параметра a решить уравнение $\log_a x + (\log_{\sqrt{x}} a)\,|\,a + \log_a x| = a \log_x a$.

8. При каком а решениями неравенства $\log_{\frac{1}{7}}(a-3-6x) < \log_{\frac{1}{7}}(4x^2-2x-2)$ являются $x \in (-1; -\frac{1}{2})$ и только они?

9. При каждом значении параметра а решить уравнение $\sqrt{\sin 3x + \sin x} = \sqrt{-a \sin 2x}$.

10. При каких значениях параметра а уравнения $\sin x + \cos x = 0$ и $a \sin 2x - \sin 4x = 2\cos 2x - a$ равносильны?

11. Найти все значения параметра a, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием $\log_{(\frac{2-|ay|}{3})}\left(\frac{a^2+x^2}{2a^2}\right) > 0$ будет наименьшим.

12. При каком значении a произведение xy принимает наименьшее значение, где (x, y) - решение системы уравнений $\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3. \end{cases}$

13. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax-1)^{-1} = (8x - x^2 - 15)^{-0,5}$ имеет единственное решение.

14. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg ax = 2 \cdot \lg(x+1)$ имеет единственное решение.

15. Для каждого значения $a > 1,\ a \neq 2$ решить неравенство $a^x(a-1)^x - 2a^{x+1} - (a-1)^x + 2a \leq 0$ и найти при каких a множество решений неравенства представляет собой отрезок длины 2.

16. Найти все значения a из промежутка $[1; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ принимает наибольшее значение.

По теме 4. <u>Методы поиска необходимых условий на параметры в задачах 2 типа постановки Задачи:</u>

1. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| \\ \mathrm{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

2. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

3. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$\begin{cases} bx + y = ac^2 \\ x + by = ac + 1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

4.Найти все a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

5. Найти все значения параметра a, для которых независимо от выбора параметра b система уравнений $\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2 \\ (a-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение

6. Найти все значения параметра b, при которых независимо от выбора параметра a система уравнений $\begin{cases} 3^{(a-1)x}+(2b+1)(a-1)y^2=4b^2 \\ (2b-1)x^3-y^3=1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

7. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $(a-3)x^2-(a^2-5a)(|x|-1)+6=0$ имеет единственное решение.

8. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

9. Найти все значения a, при которых система $\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x, \\ (x+y+a\sin^2 z)\left[(1-a)\ln(1-xy)+1\right]=0; \end{cases}$

имеет единственное решение.

По теме 5. Построение графического образа задачи с параметром

Задачи:

1. При каких значениях параметра k уравнение $\dfrac{\ln(kx)}{x}-2=0$ имеет хотя бы одно решение?

2. При каких значениях параметра a уравнение $2x^3-3x^2-36x+18{,}5-\dfrac{125(a^2+1)}{4a}=0$ имеет более одного решения?

3. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} |x|+|y|+|2x-y|=6 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$

имеет два решения.

4. Найти периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями $\begin{cases} |x-3|\arccos(y-1)^2 \le \pi(3-x) \\ 3|y-1|+x\ge 0 \end{cases}$.

5. Найти все a, при которых система $\begin{cases} 1-\sqrt{4|y|}=\sqrt{|x-5|}; \\ -16y^2-x^2+4a=-10x+25 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

6. При каких a уравнение $|x-4|=ax$ имеет корень, принадлежащий отрезку $[2;6]$.

7. Найдите все значения a, при которых существует хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющих условию $\begin{cases} 3x^2 + (y-1)^2 < 4, \\ y = ax^2 + 4. \end{cases}$

8. Найти a, при которых уравнение $(a+1-|x-1|)(a+x^2-2x)=0$ имеет ровно три корня.

Список задач для проведения зачета

1. При каких значения параметра *a* уравнение $\sqrt{x+a}=x$ имеет два различных корня?
2. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых корни квадратного трехчлена x^2+ax+1 различны и лежат на отрезке [0;2].
3. При каком наименьшем положительном значении параметра *a* функция $y=(x^2-3)\cos\dfrac{2x-a\pi}{5}$ будет нечетной?
4. При каком наибольшем положительном значении параметра *a* функция $y=a\cos\dfrac{4\pi+5x}{5a}$ является нечетной?
5. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $3\cdot 3^{1-x}=1-4a^2+3^{3-2x}$ имеет хотя бы одно решение.
6. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $2\cdot 4^{1+x}+a^2=2-6\cdot 2^x$ имеет хотя бы одно решение.
7. Парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось Oy в точке с ординатой, равной 15. Координаты вершины параболы (-2; 7). Найти сумму $a+b+c$.
8. При каких значениях параметра $a\in(1;\ 5)$ уравнение $\cos^2(\pi x+\dfrac{5\pi}{12})+\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+|\sin ax|}$ имеет решение на отрезке [2; 3] ?
9. Решить неравенство $\log_{|\sin x|}(x^2-8x+23)>\dfrac{3}{\log_2|\sin x|}$.
10. При каждом значении параметра *a* решить систему уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=a \\ y=x-1 \end{cases}$.
11. Найти все значения *a*, при которых один корень уравнения $x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$ вдвое больше другого.
12. При каком *a* решениями неравенства $\log_{\frac{1}{5}}(4x^2-1)>\log_{\frac{1}{5}}(4x+a-2)$ являются $x\in(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ и только они?
13. При каком значении *b* прямая $y=e^2x-b$ является касательной к графику функции $y=1+2\cdot\ln x$.
14. Найти все значения *a*, при которых неравенство $\dfrac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16}\le a$ является верным при всех значениях *x*.
15. При каком *a* решениями неравенства $\log_3(x^2+2x)<\log_3(2x+a)$ являются $x\in(0;2)$ и только они?
16. При каком значении *b* прямая $y=ex+b$ является касательной к графику функции $y=\ln x$?

17. Найти все значения *a*, при которых неравенство $\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7} \le a$ является верным при всех значениях *x*.

18. При каком *a* решениями неравенства $\log_{\frac{1}{7}}(a-3-6x) < \log_{\frac{1}{7}}(4x^2-2x-2)$ являются $x \in (-1; -\frac{1}{2})$ и только они?

19. При каком значении *b* прямая $y = 2ex + b$ является касательной к графику функции $y = \ln x$?

20. Найти все значения *a*, при которых неравенство $\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1} \le a$ является верным при всех значениях *x*.

21. При каком *a* решениями неравенства $\log_2(a-3x) > \log_2(x^2-3x)$ являются $x \in (-3; 0)$ и только они?

22. При каком значении *b* прямая $y = e^3 x + 2b$ является касательной к графику функции $y = 1 + \ln x$.

23. Найти все значения *a*, при которых неравенство $\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1} \le a$ является верным при всех значениях *x*.

24. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых число решений уравнения $3(x^2+a^2) = 1-(9a^2-2)x$ не превосходит числа решений уравнения $x + (3a-2)^2 3^x = (8^a - 4)\log_3(3^a - \frac{1}{2}) - 3x^3$.

25. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых число решений уравнения $2x^3 + 6x = (3^{6a} - 9)\sqrt{2^{8a} - \frac{1}{6}} - (3a-1)^2 \cdot 12^x$ не меньше числа решений уравнения $3(5x^2 - a^4) - 2x = 2a^2(6x-1)$.

26. Найти все значения параметра а, при каждом из которых число решений уравнения $2(7x^2 - a^4) + a^2 = (12a^2+1)x$ не превосходит числа решений уравнения $x^3 + (2a - \frac{1}{2})^2 \cdot 7^x = (49^{2a} - 7) \cdot \log_7(7^{3a} - \frac{1}{4}) - 7x$.

27. Найти все значения параметра а, при каждом из которых число решений уравнения $4x + x^3 = (4^a - \frac{1}{2})\sqrt{15 - 3^{5a}} - (2a+1)^2 \cdot 4^x$ не меньше числа решений уравнения $a^2(2x + a^2 - 1) = x(3x-1)$.

28. При каждом значении параметра *a* решить уравнение $\sqrt{\sin 3x + \sin x} = \sqrt{-a \sin 2x}$.

29. При каждом значении параметра *a* решить уравнение $\sqrt{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{a \sin 2x}$.

30. При каждом значении параметра *a* решить уравнение $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{a \sin x + 1}$.

31. При каждом значении параметра *a* решить уравнение $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{a \cos x - 1}$.

32. При каких значениях параметра *a* уравнения $\mathrm{tg} x = 1$ и $a \sin 2x + 2\cos 2x = a + \sin 4x$ равносильны?

33. При каких значениях параметра *a* уравнения $\sin x + \cos x = 0$ и $a \sin 2x - \sin 4x = 2\cos 2x - a$ равносильны?

34. При каких значениях параметра *a* уравнения $|\sin x| = 1$ и $a \cos x = \sin 2x$ равносильны?

35. При каких значениях параметра *a* уравнения $\cos^2 x = 1$ и $a \sin x = \sin 3x$ равносильны?

36. Точка $M(x;y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям $a^2x+y=2b-a^2$, $x+2by=a^2-1$ лежит на прямой $y=x+1$. При каких a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$.

36'. Точка $M(x;y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям $a^2x-y=2a^2-2b$, $x-by=2-2a^2$ лежит на прямой $y=2-x$. При каких a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3;-1)$.

37. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых функция $f(x)=\sin 2x-8(a+1)\sin x+(4a^2+8a-14)x$ является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

38. Найти все значения параметра *b*, при каждом из которых функция $f(x)=\sin 2x-8(b+2)\cos x-(4b^2+16b+6)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

39. Решить уравнение $\sqrt[4]{15+5\cos^2 2x}-\sqrt[4]{5\sin^2 2x-3}=1$.

40. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых функция $f(x)=8(2a+1)\cos x-\sin 2x+(16a^2+16a-18)x$ является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

41. Найти все значения параметра *b*, при каждом из которых функция $f(x)=8(2b+2)\sin x-\sin 2x-(16b^2+32b-10)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

42. При каких значениях *a* вершина параболы $y=x^2+2ax+13$ лежит на расстоянии 5 от начала координат.

43. Найти все значения параметра a, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием $\log_{(\frac{2-|ay|}{3})}\left(\frac{a^2+x^2}{2a^2}\right)>0$ будет наименьшим.

44. Найти все значения параметра b, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием $\log_{(\frac{1-|by|}{2})}\left(\frac{b^2+x^2}{5b^2}\right)>0$ будет наименьшим.

45. Найти все значения параметра a, для которых независимо от выбора параметра b система уравнений $\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2 \\ (a-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение

46. Найти все значения параметра b, при которых независимо от выбора параметра a система уравнений $\begin{cases} 3^{(a-1)x}+(2b+1)(a-1)y^2=4b^2 \\ (2b-1)x^3-y^3=1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

47. При каком значении a произведение xy принимает наименьшее значение, где (x,y) - решение системы уравнений $\begin{cases} x+y=2a-1, \\ x^2+y^2=a^2+2a-3. \end{cases}$

48. При каком значении a произведение xy принимает наибольшее значение, где (x,y) - решение системы уравнений $\begin{cases} x+y=a-1, \\ x^2+y^2=5a^2-3a+0,5. \end{cases}$

49. При каком значении параметра a система неравенств $\begin{cases} y\ge(x-a)^2 \\ x\ge(y-a)^2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

50. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} ax^2+2ax+y+3a-3=0 \\ ay^2+x-6ay+11a+1=0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

51. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $(a-3)x^2-(a^2-5a)(|x|-1)+6=0$ имеет единственное решение.

52. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x=\log_4(4^{2x}+\log_4 a)$ имеет единственное решение.

53. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax-1)^{-1}=(8x-x^2-15)^{-0,5}$ имеет единственное решение.

54. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg ax = 2\cdot\lg(x+1)$ имеет единственное решение.

55. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\cdot\lg(ax-1)=\lg(8x-x^2-15)$ имеет единственное решение.

56. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} ax^2+a-1=y-|\sin x| \\ \operatorname{tg}^2 x+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

57. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} (a+1)x^2+a-1=y-|\cos x| \\ \operatorname{tg}^2 x+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

58. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

59. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

60. Для каждого допустимого значения параметра a решить уравнение $\dfrac{3}{4ax-12}=\dfrac{1}{3x-4a}$ и указать те значения параметра, при которых все решения уравнения удовлетворяют неравенству $x<3$.

61. Для каждого допустимого значения параметра a решить уравнение $\dfrac{9}{8x-9a-8}=\dfrac{1}{ax-2-a}$ и указать все значения параметра, при которых решения уравнения больше 2.

62. Для каждого допустимого значения параметра a решить уравнение $\dfrac{3}{8x-3a}=\dfrac{1}{3ax-2}$ и указать все значения параметра, при которых решения уравнения больше 1/3.

63. Для каждого допустимого значения параметра a решить уравнение $\dfrac{3}{2ax-4a-12}=\dfrac{2}{3x-8a-6}$ и указать те значения параметра, при которых все решения уравнения удовлетворяют неравенству $x<4$.

64. При каких значениях параметра a уравнение $2x^3-3x^2-36x+18,5-\dfrac{125(a^2+1)}{4a}=0$ имеет более одного решения?

65. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^3}{3}-x^2-8x+\dfrac{26}{3}-\dfrac{81a^2+1}{a}=0$ имеет более одного решения?

66. При каких значениях параметра a уравнение $x^3-3x^2-9x+11-\frac{4(4a^2+1)}{a}=0$ имеет более одного решения?

67. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-\frac{11}{3}-\frac{8}{9a}(9a^2+1)=0$ имеет более одного решения?

68. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2-x+3)=2\cdot\log_{2ax+4}(x^2+2x+1)$ имеет единственное решение?

69. При каких значениях параметра a уравнение $2\cdot\log_{((2a-2)x+6-2a)}(2x^2-5x+6)=\log_{\sqrt{(2a-2)x+6-2a}}x^2$ имеет единственное решение?

70. Найдите все такие a, что для любого $x<0$ выполняется неравенство $\log_2(x^2+ax+1)>-1$.

71. Найдите все такие a, что для любого $x>0$ выполняется неравенство $\log_{0,5}(x^2+2x+a)<-1$.

72. Найти все такие a, что для любого $x>0$ выполняется неравенство $\log_a(x^2+x+1)>-1$.

73. Найти все такие a, что для любого $x<0$ выполняется неравенство $\log_a(x^2-x+1)<2$.

74. Найти все значения a из промежутка $(-\infty,-4]$, при каждом из которых меньший из корней уравнения $x^2+ax-3x-2a-2=0$ принимает наименьшее значение.

75. Найти все значения a из промежутка $[1;+\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения $x^2-6x+2ax+a-13=0$ принимает наибольшее значение.

76. Найти все значения параметра b, при которых система $\begin{cases} bx^2+2bx+y+3b-3=0 \\ by^2+x-6by+11b+1=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

77. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+1=0 \\ ay^2-x-2ay+4a-2=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

78. Найти все тройки различных целых чисел, являющиеся тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а также первым, вторым и шестым членами арифметической прогрессии.

79. Для каждого значения параметра a решить неравенство $9^x-2a\cdot 3^x+a^2<1$. При каком значении параметра a множеством всех решений данного неравенства является интервал (0; 1)?

80. Для каждого значения параметра a решить неравенство $4^x-(2a+1)\cdot 2^x+a^2+a<0$. При каком значении параметра a множеством всех решений данного неравенства является интервал (0; 1)?

81. При каких значениях a уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение?

82. При каких значениях параметра a уравнение $x|x-2a|-1-a=0$ имеет единственное решение?

83. Найти все значения параметра b, при которых уравнение $2(3-b)x^2+4(1-b)x+|2b-5|=|2b+7|$ имеет два различных решения, сумма которых отрицательна.

84. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2+(|a+2|-|a+10|)x+a=5$ имеет два различных положительных решения.

85. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=x^3+2ax^2+\frac{5}{4}a^2x+1,\quad a<0$ и прямая l, заданная уравнением $y=\frac{a^2x}{4}+1$ имеет ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{4}$.
2) Пусть a равно значению, найденному в пункте 1). Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату.

86. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=-x^3-4ax^2-3a^2x+2,\ a>0$ и прямая l, заданная уравнением $y=a^2x+2$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{1}{12}$.
2) Пусть a равно значению, найденному в пункте 1). Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с отрицательной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату.

87. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=6x^3+12ax^2+7a^2x-2,\quad a>0$ и прямая l, заданная уравнением $y=a^2x-2$ имеет ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{1}{2}$.

2) Пусть a равно значению, найденному в пункте 1). Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с отрицательной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найти эту ординату.

88. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=-2x^3-8ax^2-4a^2x+5,\quad a<0$ и прямая l, заданная уравнением $y=4a^2x+5$ имеет ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{2}$.

2) Пусть a равно значению, найденному в пункте 1). Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найти эту ординату.

89. Найти все значения параметра $a,\ (a>0)$ при которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$ и прямой $y=-3x\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$ будет наибольшей.

90. Найти все значения параметра $a\ (a>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y=(1+a^2)^2x^2$ и прямой $y=a$, будет наибольшей.

91. Найти все значения параметра p $(p>0)$, при которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{p}{1+p^2}}+1$ и прямой $y=2x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{p}{1+p^2}}+1$ будет наибольшей.

92. Найти все значения параметра p $(p>0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-(1+p^2)^2x^2+p$ и прямой $y=0$ будет наибольшей.

93. При каких значениях параметра a точка $x=\dfrac{1}{2}$ является точкой минимума функции $f(x)=8ax^3+(4a^2-4)x^2-14x+39$?

94. При каких значениях a точка $x=\dfrac{1}{2}$ является точкой максимума функции $f(x)=(8a-8)x^3+(4a^2-8a)x^2-14x+23$?

95. При каких значениях параметра a точка $x=1$ является точкой минимума функции $f(x)=(a-1)x^3+(a^2-2a)x^2-7x+9$?

96. При каких значениях параметра a точка $x=1$ является точкой максимума функции $f(x)=ax^3+(a^2-1)x^2-7x-3$?

97. При каких значениях параметра k уравнение $\dfrac{\ln(kx)}{x}-2=0$ имеет хотя бы одно решение?

98. При каких значениях параметра k уравнение $xe^{kx}-5=0$ не имеет решений?

99. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}|x-y|+|x+y|=2\\ y=ax+2(1-a)\end{cases}$ имеет 1 решение, 2 решения, не имеет решений?

100. Пусть Y - наибольшее значение функции $y=|-2x^2+5x+a-2|$ на отрезке $[1;2]$. При каком значении параметра a величина Y будет наименьшей?

101. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}|2y-x|+|2y+x|=4\\ y=ax+4(1-a)\end{cases}$ имеет 1 решение, 2 решения, не имеет решений?

102. Пусть Y - наибольшее значение функции $y=|-2x^2+x+b|$ на отрезке $[0;1]$. При каком значении параметра b величина Y будет наименьшей?

103. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}|2x-y|+|2x+y|=4\\ y=ax+3(1-a)\end{cases}$ имеет 1 решение, 2 решения, не имеет решений?

104. Пусть $Y-$наибольшее значение функции $y=|-2x^2-3x-2+c|$на отрезке$[-1;0]$. При каком значении параметра c величина Y будет наименьшей?

105. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}|3x-y|+|3x+y|=6\\ y=ax+3-4a\end{cases}$ имеет 1 решение, 2 решения, не имеет решений?

106. Пусть Y - наибольшее значение функции $y=|2x^2+7x+7-\dfrac{d}{4}|$на промежутке $[-2;-1]$. При каком значении параметра d величина Y будет наименьшей?

107. Найти все значения параметраa, при каждом из которых неравенство $4x^2+4y^2+axy\geq x+y-\dfrac{1}{16}$ выполняется для любых пар чисел $(x,\ y)$ таких, что $|x|=|y|$.

108. Найти все значенияa, при каждом из которых неравенство $9x^2-x+\dfrac{1}{36}\geq y-9y^2-axy$ выполняется для любых пар чисел $(x,\ y)$ таких, что $|x|=|y|$.

109. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$(1+(3a+4)^2)\log_2(-2x-x^2)+(1+(a-2)^2)\log_7(1-\frac{x^3}{3})=\log_7(1-\frac{x^3}{3})+\log_2(-2x-x^2)$$

110. Для каждого значения параметра a решить уравнение $(3a-2)^2\log_3(-4x-4x^2)=-(a+1)^2\log_7(1-2x^2)$.

111. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $25y^2+\frac{1}{100}\geq x-axy+y-25x^2$ выполняется для любых пар чисел (x, y), таких, что $|x|=|y|$.

112. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $16x^2+axy-y\geq x-16y^2-\frac{1}{64}$ выполняется для любых пар чисел $(x,\ y)$ таких, что $|x|=|y|$.

113. Для каждого значения $a>1,\ a\neq 2$ решить неравенство $a^x(a-1)^x-2a^{x+1}-(a-1)^x+2a\leq 0$ и найти при каких a множество решений неравенства представляет собой отрезок длины 2.

114. Для каждого значения $a>2,\ a\neq 3$ решить неравенство $a^x(a-2)^x-2a^{x+1}-(a-2)^x+2a\leq 0$ и найти, при каких значениях a множество решений неравенства представляет собой промежуток длины 2.

115. Для любого допустимого значения a решить неравенство $\log_{2a}(\log_3 x^2)>1$ и найти, при каком значении a множество точек x, не являющихся решениями неравенства, представляют собой отрезок, длина которого равна 6.

116. Для любого допустимого значения b решить неравенство $\log_{2b}(\log_7 x^2)>1$ и найти, при каком b множество точек, не являющихся решениями неравенства, представляет собой отрезок, длина которого равна 14.

117. Найти все значения параметра a, при которых уравнения $\sin x=2\sin^2 x$ и $\sin 3x=(a+1)\sin x-2|a-1|\sin^2 x$ равносильны.

118. При каких a уравнение $2+\sqrt{4x-x^2-3}=a+\sqrt{1-a^2+2ax-x^2}$ имеет ровно одно решение?

119. Найти все значения параметра a, при которых уравнения $\sin x=2\sin^2 x$ и $\sin 3x=(a+1)\sin x-2|a-1|\sin^2 x$ равносильны.

120. При каких a уравнение $2+\sqrt{4x-x^2-3}=a+\sqrt{1-a^2+2ax-x^2}$ имеет ровно одно решение?

121. При каких a, принадлежащих интервалу $(-\frac{\pi}{2};\ 0)$ уравнение $\sqrt{2\cos(x+a)-1}=\sin 6x-1$ имеет решения?

122. При каких значениях a уравнение $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$ имеет четыре различных решения?

123. Найти все значения параметра a, при которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $x+y+z=x^2+4y^2$ и $x+2y+3z=a$.

124. При всех значениях параметра a решить уравнение $2\sin 2x+a^2\cos x+\cos 3x=0$.

125. При всех значениях параметра a решить уравнение $2\sin 2x-a^2\sin x+\sin 3x=0$.

126. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}|x|+|y|+|2x-y|=6\\ x^2+y^2=a\end{cases}$ имеет два решения.

127. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}|x|+|y|+|x+y|=2\\ x^2+y^2=a\end{cases}$ имеет два решения.

128. При каких значениях a найдутся такие значения x, что числа $2^x-a;\ -2^{-x-1};\ 4^x+4^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

129. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{1+x}-a;\ -\frac{9}{2}\cdot 5^{1-x};\ 25^{x}+81\cdot 25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

130. При каких значения параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{x+1}+5^{x-1};\ \frac{a}{2};\ 25^{x}+25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

131. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $3^{2+x}+3^{2-x};\ \frac{a}{2};\ 9^{1+x}+9^{1-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

132. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$\begin{cases} bx+y=ac^2 \\ x+by=ac+1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

133. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$\begin{cases} 2x+by=c^2 \\ bx+2y=ac-1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

134. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$\begin{cases} 2x+by=ac^2+c \\ bx+2y=c-1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

135. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$\begin{cases} x+by=ac^2+0,5c \\ (b+1)x+2y=c-1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

136. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2+3x+2a^2-3=0$ имеет только целые решения?

137. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2+3x+2a^2=0$ имеет только целые решения?

138. При каких значениях a уравнение $2ax^2+5x+4a^2+5=0$ имеет только целые решения?

139. При каких значениях a уравнение $ax^2+2a^2x-3=0$ имеет только целые решения?

140. При каких значениях a неравенство $(-x^2+(2a-6)x+3a^2+18a)\sqrt{x+4}\geq 0$ имеет единственное решение?

141. При каких значениях a неравенство $(x^2-(a+2)x-2a^2+4a)\sqrt{1-x}\leq 0$ имеет единственное решение?

142. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9x^2+12(a-2)x+16=0$ имеет два различных решения $x_1,\ x_2$, удовлетворяющих неравенству $9(x_1^3+x_2^3)>148(x_1+x_2)$.

143. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9x^2+24(a-1)x+16=0$ имеет два различных решения $x_1,\ x_2$, удовлетворяющих неравенству $(3x_1)^3+(3x_2)^3>444(x_1+x_2)$.

144. Найдите сумму всех значений параметра a из интервала $(2;\ 7)$, при каждом из которых существует хотя бы одно $x\in[1;\ 2]$, удовлетворяющее уравнению $\log_3(1+\sin^2(\frac{\pi x}{2}+\frac{5\pi}{12}))=|\cos ax|-1$.

145. Найдите все значения a из интервала $(2; 5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно $x \in [2; 3]$, удовлетворяющее уравнению $\log_2(3-|\sin ax|) = \cos(\pi x - \frac{\pi}{6})$.

146. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений уравнения $4^x - a \cdot 2^{x+2} + 2a = 0$ непусто и ни одно из его решений не принадлежит области определения функции $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x - 3}$.

147. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений уравнения $4^x - a \cdot 2^{x+3} + 8a = 0$ непусто и ни одно из его решений не принадлежит области определения функции $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x}$.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий.

Задание для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены *на оценивание:*

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проверкой решения домашних работ, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях и решением задач у доски, а также проведением контрольной работы.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «не зачтено».

Примерный вариант контрольной работы

Вариант 1

1. Найти все a, при которых корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ различны и лежат на $[0; 2]$.

2. Решить неравенство $\log_{|\sin x|}(x^2 - 8x + 23) > \dfrac{3}{\log_2 |\sin x|}$.

3. Для каждого значения параметра a решить неравенство $4^x - (2a+1) \cdot 2^x + a^2 + a < 0$. При каком значении параметра a множеством всех решений данного неравенства является интервал (0; 1)?

4. Для каждого значения параметра a решить уравнение $(3a-2)^2 \log_3(-4x - 4x^2) = -(a+1)^2 \log_7(1 - 2x^2)$.

5. При каких значениях a неравенство $(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a)\sqrt{1-x} \le 0$ имеет единственное решение?

На контрольной работе обучающемуся предлагается 5 задач (в зависимости от трудности) из приведенного списка. Задачи подбираются таким образом, чтобы их решение подтвердило владение основными методиками решения задач с параметрами. В случае, если задание выполнено более, чем на 60%, выставляется оценка «зачтено», в противном случае выставляется оценка «не зачтено»

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Методика решения задач с параметрами при подготовке к ЕГЭ профильного уровня» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины «Методика решения задач с параметрами при подготовке к ЕГЭ профильного уровня» и степень сформированности компетенции.

Требование к выполнению заданий

На зачете студенту предлагается 2 – 3 задачи (в зависимости от трудности) из приведенного списка. Задачи подбираются таким образом, чтобы их решение подтвердило владение основными методиками решения задач с параметрами. В случае, если задание выполнено более, чем на 60%, выставляется оценка «зачтено», в противном случае выставляется оценка «не зачтено». Результаты текущей аттестации учитываются при выставлении зачета.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-3 Способность к решению задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики

Перечень заданий для оценки сформированности компетенции:

1) закрытые задания (тестовые):

1.Определить множество допустимых значений параметра a для выражения $f(x,a)=\sqrt{x-a}$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	$(-\infty;x]$	$(-\infty;\infty)$	$[-x;x]$	нет правильного ответа

Решение.

По определению, множество допустимых значений параметра a для выражения $f(x,a)$ есть множество a при которых выражение $f(x,a)$ имеет смысл хотя бы при одном значении x.

Ответ: 2 $(-\infty;\infty)$

2. Определить точку вырождения для выражения $f(x,a)=(a-1)x^3+a^3x^2-3$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	0	1	-3	нет правильного ответа

Решение.

Точка вырождения - это значение параметра, при котором обнуляется коэффициент при старшей степени x.

Ответ:2,
точка вырождения =1.

3.Определить критические значения параметра - точки кратности для выражения $f(x,a)=4x^2-2\sqrt{a}x+0,25$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	-1	+1	-2	нет правильного ответа

Решение.

Точка кратности – значение параметра, при котором появляются кратные корни. Для квадратного трехчлена это значение параметра, при котором дискриминант равен нулю.

Ответ: 2
точка кратности= +1

4. Пусть четная по x функция удовлетворяет уравнению $f(x,a)=0$. Сформулировать условия на параметр a, необходимые для того, чтобы это уравнение имело единственное решение.

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	$f(0,a)<0$	$f(0,a)=0$	$f(0,a)>0$	нет правильного ответа

Решение.

Поскольку $f\left(x,a\right)=f\left(-x,a\right)$, то имея решение $x_0\neq 0$, имеем также решение $\left(-x_0\right)$, и , в силу единственности, $x_0=-x_0 \Rightarrow x_0=0$. Таким образом, если уравнение $f\left(x,a\right)=0$ с четной функцией имеет единственное решение, то это $x=0$.

Ответ: 2
$f(0,a)=0$

5. Найти положительное значение параметра a, при котором равенство $\sqrt{1-x^2} = a - x$ имеет единственное решение.

Варианты ответов

Номер ответа	**1**	2	3	4
Ответ	$\sqrt{2}$	2	1	нет правильного ответа

Решение.

Графиком функции $y = \sqrt{1-x^2}$ является верхняя полуокружность с центром в Функция $y = a - x$ для каждого фиксированного значения параметра a задает прямую, параллельную биссектрисе второго и четвертого координатных углов. Следовательно, уравнение $y = a - x$ на координатной плоскости xOy задает семейство прямых, параллельных указанной биссектрисе. Данное равенство будет иметь единственное решение лишь при тех значениях параметра a, при которых осуществляется касание прямой и полуокружности. Учитывая, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, получаем равнобедренный прямоугольный треугольник, из которого $a = \sqrt{2}$.

Ответ: 1

$a = \sqrt{2}$

6. Определить множество допустимых значений параметра a для выражения $f(x,a) = \sqrt{3x - 2a}$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	$(-\infty; x]$	$(-\infty; \infty)$	$[-x; x]$	нет правильного ответа

Решение.

По определению, множество допустимых значений параметра a для выражения $f(x,a)$ есть множество a при которых выражение $f(x,a)$ имеет смысл хотя бы при одном значении x.

Ответ:2

$(-\infty; \infty)$

7. Определить точку вырождения для выражения $f(x,a) = (a-2)x^3 + (a^3 - 1)x^2 - 3$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	0	2	-3	нет правильного ответа

Решение.

Точка вырождения - это значение параметра, при котором обнуляется коэффициент при старшей степени x

Ответ:2, точка вырождения=2**.**

8. Определить критические значения параметра - точки кратности для выражения $f(x,a) = 4x^2 - 2\sqrt{a}x + 1$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	-1	4	-2	нет правильного ответа

Решение.

Точка кратности – значение параметра, при котором появляются кратные корни. Для квадратного трехчлена это значение параметра, при котором дискриминант равен нулю.

Ответ:2, точка кратности =4

9. Пусть функция $f(x,a) = x^2 - (2+|x|)a + a - 3$. Сформулировать условия на параметр a, необходимые для того, чтобы это уравнение имело единственное решение.

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	$f(0,a) < 0$	$f(0,a) = 0$ или $a = -3$	$f(0,a) > 0$	нет правильного ответа

Решение.

Поскольку $f\left(x,a\right) = f\left(-x,a\right)$, то имея решение $x_0 \neq 0$, имеем также решение $\left(-x_0\right)$, и , в силу единственности, $x_0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0$. Таким образом, если уравнение $f\left(x,a\right) = 0$ с четной функцией имеет единственное решение, то это $x = 0$. Отсюда $a = -3$.

Ответ:2 $f(0,a) = 0$ или $a = -3$

10.Найти положительное значение параметра a, при котором равенство $\sqrt{4 - x^2} = a - x$ имеет единственное решение.

Варианты ответов

Номер ответа	**1**	2	3	4
Ответ	$2\sqrt{2}$	2	1	нет правильного ответа

Решение.

Графиком функции $y=\sqrt{4-x^2}$ является верхняя полуокружность с центром в точке (0;0), радиуса 2. Функция $y=a-x$ для каждого фиксированного значения параметра a задает прямую, параллельную биссектрисе второго и четвертого координатных углов. Следовательно, уравнение $y=a-x$ на координатной плоскости Oxy задает семейство прямых, параллельных указанной биссектрисе. Данное равенство будет иметь единственное решение лишь при тех значениях параметра a, при которых осуществляется касание прямой и полуокружности. Учитывая, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, получаем равнобедренный прямоугольный треугольник, из которого $a=2\sqrt{2}$.

Ответ:1. $a=2\sqrt{2}$.

11. Определить множество допустимых значений параметра a для выражения $f(x,a)=\sqrt{7x-a^2}$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	$(-\infty;x]$	$(-\infty;\infty)$	$[-x;x]$	нет правильного ответа

Решение.

По определению, множество допустимых значений параметра a для выражения $f(x,a)$ есть множество a при которых выражение $f(x,a)$ имеет смысл хотя бы при одном значении x.

Ответ: 2 $(-\infty;\infty)$

12. Определить точку вырождения для выражения $f(x,a)=(a-3)x^3+(a^2-4)x^2+5$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	0	3	-3	нет правильного ответа

Решение.

Точка вырождения - это значение параметра, при котором обнуляется коэффициент при старшей степени x

Ответ: 2, точка вырождения =3.

13. Определить критические значения параметра - точки кратности для выражения $f(x,a)=4x^2-4\sqrt{a}x+4$

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	-1	4	-2	нет правильного ответа

Решение.

Точка кратности – значение параметра, при котором появляются кратные корни. Для квадратного трехчлена это значение параметра, при котором дискриминант равен нулю.

Ответ: 2, точка кратности=4

14. Пусть функция $f(x,a) = x^4 - (3 + x^2)a + a - 7$. Сформулировать условия на параметр a, необходимые для того, чтобы это уравнение имело единственное решение.

Варианты ответов

Номер ответа	1	**2**	3	4
Ответ	$f(0,a) < 0$	$f(0,a) = 0$ или $a = -3{,}5$	$f(0,a) > 0$	нет правильного ответа

Решение.

Поскольку $f\left(x,a\right) = f\left(-x,a\right)$, то имея решение $x_0 \neq 0$, имеем также решение $\left(-x_0\right)$, и , в силу единственности, $x_0 = -x_0 \;\Rightarrow\; x_0 = 0$. Таким образом, если уравнение $f\left(x,a\right) = 0$ с четной функцией имеет единственное решение, то это $x = 0$. Отсюда $a = -3{,}5$.

Ответ: 2 , $f(0,a) = 0$ или $a = -3{,}5$

15. Найти положительное значение параметра a, при котором равенство $\sqrt{9 - x^2} = a - x$ имеет единственное решение.

Варианты ответов

Номер ответа	**1**	2	3	4
Ответ	$3\sqrt{2}$	2	1	нет правильного ответа

Решение.

Графиком функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ является верхняя полуокружность с центром в точке (0;0), радиуса 3. Функция $y = a - x$ для каждого фиксированного значения параметра a задает прямую, параллельную биссектрисе второго и четвертого координатных углов. Следовательно, уравнение $y = a - x$ на координатной плоскости Oxy задает семейство прямых, параллельных указанной биссектрисе. Данное равенство будет иметь единственное решение лишь при тех значениях параметра a, при которых осуществляется касание прямой и полуокружности. Учитывая, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, получаем равнобедренный прямоугольный треугольник, из которого $a = 3\sqrt{2}$.

Ответ: 1, значение параметра $a = 3\sqrt{2}$

2) открытые задания (тестовые):

1. Вставьте пропущенное слово или закончите определение.
Множество точек плоскости Oxy, удовлетворяющее при различных значениях параметра a уравнению $y = a(x-b)$ называется ……… с центром в точке $(b;\,0)$.

Ответ:

пучок прямых

2. Вставьте пропущенное слово или закончите определение. Для решения задач для уравнений с параметрами, в которых известно хотя бы одно решение уравнения, используется метод …….. точки.

Ответ:

удобной

3. Вставьте пропущенное слово или закончите определение. Построение графического образа задачи ведется в плоскостях Oxy и ……..

Ответ:

Oxa**.**

4. Вставьте пропущенное слово или закончите определение.Для того, чтобы один из корней квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ лежал в заданном интервале $(k;\,n)$, необходимо и достаточно, чтобы произведение $f(k) \cdot f(n)$ было …………

Решение.

Одна перемена знака – один корень.

Ответ:

Отрицательным.

5. Вставьте пропущенное слово или закончите определение. У многочлена $a(x-(a^2+1))(-(a+3))$ ……… критических значений параметра.

Решение.

Критические значения параметра делят все множество значений параметра на части, которые необходимо рассматривать отдельно. Здесь их три. Одна точка вырождения $a = 0$ и две точки кратности $x_1 = x_2 : a^2 + 1 = a + 3;\ a = -1;\ a = 2$

Ответ:

Три.

6. Вставьте пропущенное слово (словосочетание) или закончите определение.
Множество точек плоскости Oxy, удовлетворяющее при различных значениях параметра a уравнению $y = a(x-b) + c$ называется ………….. с центром в точке $(b;\,c)$.

Ответ: пучок прямых

7. Вставьте пропущенное слово.

Задача. Найти все значения параметра a, для которых независимо от выбора параметра b система уравнений $\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2 \\ (a-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Для решения этой задачи используется метод ……. точки.

Ответ: удобной

8. Вставьте пропущенное слово или закончите определение.

Задача. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2 \\ y=ax+2(1-a) \end{cases}$ имеет 1 решение, 2 решения, не имеет решений?

Для решения этой задачи используется метод построения графического образа в плоскости …… .

Ответ: Oxy .

9. Вставьте числовое значение.

Для того, чтобы число k лежало между корней квадратного трехчлена $f(x)=x^2+bx+c$, необходимо и достаточно, чтобы $f(k)<$ ……….

Решение.

Между корнями зона отрицательных значений параболы.

Ответ: 0

$f(k)<0$

10. Вставьте пропущенное слово.

У многочлена $(a-5)(x-1))(x-(a+3))$ ….. критических значений параметра.

Решение.

Критические значения параметра делят все множество значений параметра на части, которые необходимо рассматривать отдельно. Здесь их два. Одна точка вырождения $a=5$ и точка кратности $x_1=x_2:1=a+3;\ a=-1;\ a=5$

Ответ: два

11. Введите пропущенное слово или словосочетание.

Множество точек плоскости Oxy, удовлетворяющее при различных значениях параметра a уравнению $y-b=ax$ называется …………………… с центром в точке $(0;b)$.

Ответ:

пучок прямых

пучком прямых

12. Введите пропущенное слово.

Задача. Найти все значения параметра b, при которых независимо от выбора параметра a система уравнений $\begin{cases} 3^{(a-1)x}+(2b+1)(a-1)y^2=4b^2 \\ (2b-1)x^3-y^3=1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Для решения этой задачи используется метод …………….. точки.

Ответ:
удобной

13. Введите обозначение плоскости.
Задача. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений
$\begin{cases} |x|+|y|+|2x-y|=6 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ имеет два решения.
Для решения этой задачи используется метод построения графического образа в плоскости ………..
Ответ:
xOy
Oxy .
yOx
Oyx
14. Введите числовое значение.
Для того, чтобы число k лежало между корней квадратного трехчлена $f(x)=-x^2+bx+c$, необходимо и достаточно, чтобы $f(k)>$ …….
Решение.
Между корнями ветвями вниз расположена зона положительных значений параболы.
Ответ: $f(k)>0$

15. Введите пропущенное слово .
У многочлена $(a-4)(x-1)(x-a^2)$ ……… критических значений параметра.
Решение.
Критические значения параметра делят все множество значений параметра на части, которые необходимо рассматривать отдельно. Здесь их три. Одна точка вырождения $a=4$ и две точки кратности $x_1=x_2:1=a^2;\ a=\pm1;\ a=5$
Ответ:
три
3

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).