ЧМИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
16.04.24

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В. 01 Малые колебания стратифицированной жидкости

1. Шифр и наименование направления подготовки / специальности:
01.04.01 – Математика

2. Магистерская программа: Математические модели гидродинамики

3. Квалификация (степень) выпускника: Магистр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей

6. Составители программы: Рябенко Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол № 0500-03 от 28.03.2024

8. Учебный год: 2024/2025 **Семестр(ы): 1**

9.Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- ознакомить учащихся с современными методами исследования дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих малые колебания стратифицированной жидкости;

- выработать навыки исследования краевых и начально-краевых задач для уравнений с частными производными, описывающих малые колебания стратифицированной жидкости;

- дать качественные математические и естественнонаучные знания, востребованные обществом;

- дать современные теоретические знания в области уравнений с частными производными и практические навыки в решении и исследовании дифференциальных уравнений с частными производными;

- сформировать социально-личностные качества выпускников: целеустремленность, организованность, трудолюбие, коммуникабельность, умение работать в коллективе, ответственность за конечный результат своей профессиональной деятельности, способность самостоятельно приобретать и применять новые знания и умения.

Задачи учебной дисциплины:

- развитие у учащихся навыков использования методов математического анализа, асимптотического анализа, функционального анализа, операционного исчисления и теории функций комплексного переменного при исследовании уравнений с частными производными, описывающих малые колебания стратифицированной жидкости;

- развитие способности применения методов математического моделирования при изучении реальных процессов и объектов с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Малые колебания стратифицированной жидкости» относится к вариативной части. Она непосредственно связана с такими дисциплинами как «Уравнения с частными производными», «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Теория функций действительного переменного», «Функциональный анализ», «Теория функций комплексного переменного», «Асиптотический анализ».

Приступая к изучению данной дисциплины, студенты должны знать и уметь оперировать с основными понятиями из ТФДП, ТФКП, теории обыкновенных дифференциальными уравнений, функционального анализа, теории уравнений с частными производными.

Учебная дисциплина «Малые колебания стратифицированной жидкости» может быть взята за основу при изучении дисциплин, посвященных исследованию качественных свойств решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен решать задачи аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач математической гидродинамики	ПК-1.1	Обладает большим объемом знаний в области математической гидродинамики	Знать большой объемом знаний в области математической гидродинамики. Уметь применять большой объемом знаний в области математической гидродинамики. Владеть навыками применения большого объема знаний в области математической гидродинамики.
		ПК-1.2	Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики	Знать, как находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики. Уметь находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики. Владеть навыками, позволяющими находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики.
		ПК-1.3	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики	Знать, как получить практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики. Уметь применять практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики. Владеть методами, позволяющими применять практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 3 / 108.

Форма промежуточной аттестации Экзамен – 1 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			1 семестр
Контактная работа		32	32
в том числе:	лекции	16	16
	практические	16	16
	лабораторные		
	курсовая работа		
Самостоятельная работа		40	40
Промежуточная аттестация		Экзамен - 36	Экзамен - 36
Итого:		108	108

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью

			онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Преобразование Фурье и преобразование Лапласа	Преобразование Фурье и его свойства. Преобразование Лапласа и его свойства.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=18050
1.2	Метод продолжения по параметру, теорема вложения	Пространства L_2 и W_p^k. Метод продолжения по параметру.. Теоремы вложения для Соболевских пространств	
1.3	Элементы теории функций комплексного переменного.	Аналитичность функций комплексного переменного	
2. Практические занятия			
2.1	Изучение задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска	Постановка задачи. Построение формального решения. Существование решения. Единственность решения. Принцип локализации. Построение асимптотик по времени.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=18050
2.1	Изучение задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости без приближения Буссинеска	Постановка задачи. Сведение исходной задачи к задаче с параметром. Априорные оценки решения задачи с параметром. Доказательство существования решения у задачи с параметром. Построение асимптотик по времени решения исходной задачи	
3. Лабораторные занятия			
3.1			
3.2			

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Преобразование Фурье и преобразование Лапласа	7			10	17
2	Метод продолжения по параметру, теорема вложения	7			15	22
3	Элементы теории функций комплексного переменного.	2			15	17
4	Изучение задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска		6			6
5	Изучение задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости без приближения Буссинеска		10			10
	Итого:	16	16		40	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Малые колебания стратифицированной жидкости» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.
2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.
3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.
4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены на кафедральном сайте http//:www.kuchp.ru

<u>Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.</u>

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом и составляет 40 часов. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме.

Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки, написание рефератов.

Примерные темы рефератов: Преобразование Фурье и преобразование Лапласа; Метод продолжения по параметру; Теоремы вложения; Элементы теории функций комплексного переменного.

Рефераты оцениваются по системе «зачтено» / «не зачтено». Оценка «зачтено» ставится в случае раскрытия предложенной темы, оценка «не зачтено» ставится в случае, если тема не раскрыта.

Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. . // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.
3	Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М : Физматлит, 2003. – 398 с.
4	Рябенко А. С. Дифференциальные уравнения с параметрами / А. С. Рябенко. – Воронеж: ВГПУ, 2015. – 54 с.
5	Рябенко А. С. Малые колебания стратифицированной жидкости / А. С. Рябенко. – Воронеж: ВГУ, 2021. – 73 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

№ п/п	Ресурс
6	*http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений*
7	*http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ*
8	*http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
9	Сидоров Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М.: Наука, 1989. – 480 с.
10	Рябенко А. С.Оценка при $t \to \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко // Вестник Воронежского Государственного Университета. Серия «Физика. Математика». – 2007. - № 1. –С. 95-99.
11	Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с .
12	Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с .
13	Рябенко А.С. Методы построения решений краевых задач для эллиптических уравнений / А.С. Рябенко. – Воронеж: ВГПУ, 2015. – 45 с.
14	Глушко А. В. Принцип локализации и оценка скорости затухания колебаний в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости / А. В. Глушко, А. С. Рябенко // Математические заметки, 2009, Т.85, №4. С.585-593
15	Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М.: Физматлит, 2007. – 488 с.
16	Рябенко А. С. Малые колебания стратифицированной жидкости / А. С. Рябенко. – Воронеж: ВГУ, 2021. – 73 с.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id18050).

Перечень необходимого программного обеспечения: Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows 10 Enterprise 64 bit, LibreOffice 6 (*Writer (текстовый процессор), Calc (электронные таблицы), Impress (презентации), Draw (векторная графика), Base (база данных), Math (редактор формул)*), Maxima, Total Commander, WinDjView, Foxit Reader, 7-Zip, Mozilla Firefox.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I). Специализированная мебель.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Преобразование Фурье и преобразование Лапласа	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
2.	Метод продолжения по параметру, теорема вложения	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
3.	Элементы теории функций комплексного переменного.	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
4.	Изучение задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
5.	Изучение задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости без приближения Буссинеска	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
Промежуточная аттестация форма контроля - Экзамен				Перечень вопросов к экзамену

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Тестовые задания.

Тест

1. Пусть задана функция $f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется следующий интеграл

а) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$, б) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi x)dx$, в) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi x)dx$.

2. Начально-краевая задача, описывающая малые колебания стратифицированной жидкости выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} - \left(\frac{\mu}{\rho_0(x)} + \frac{\lambda+\mu}{\rho_0(x)}\right)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0(x)}\rho(t,x) = f(t,x),$$

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} - \left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2}\right)\rho_0(x)V(t,x) + \rho_0(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = 0,$$

а) $$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} - c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t} - \frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t,x) = 0,\ x>0,\ \ t>0,$$

$$V(t,x)\big|_{t=0} = P(t,x)\big|_{t=0} = \rho(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

$$V(t,x)\big|_{x=0} = V(t,x)\big|_{x=\infty} = 0.$$

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0(x)}\rho(t,x) = f(t,x),$$

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} - \rho_0(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = 0,$$

б) $$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} - c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t} - \frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t,x) = 0,\ x>0,\ \ t>0,$$

$$V(t,x)\big|_{t=0} = P(t,x)\big|_{t=0} = \rho(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

$$V(t,x)\big|_{x=0} = V(t,x)\big|_{x=\infty} = 0.$$

3. Пусть $v(\gamma,x)$ является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\gamma + \rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right) - \gamma\rho_0(x)v(\gamma,x) = -f_*(\gamma,x),$$

$$v(\gamma,x)\big|_{x=0} = v(\gamma,x)\big|_{x=\infty} = 0,$$

тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\psi_1 > \frac{\pi}{2}$ такое, что при $\gamma \in ((|\gamma| \ge \varepsilon_1) \cap (|\arg\gamma| \le \psi_1)) \cup (|\arg\gamma| < \psi_2)$, где $\psi_2 < \frac{\pi}{2}$, будет справедлива следующая оценка

а) $\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + |\gamma|\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2 \le c\|f_*(\gamma,x)\|^2$, б) $\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2 \le c\|f_*(\gamma,x)\|^2$,

в) $\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + \|v(\gamma,x)\|^2 \le c\|f_*(\gamma,x)\|^2$.

Тест

1. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда функцию $f(x)$ можно восстановить по следующей формуле

а) $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$, б) $f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$,

в) $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\tilde{f}(\xi)d\xi$.

2. Является ли пространство $W_p^k(\Omega)$ банаховым?

а) да. б) нет.

3. Пусть $v(\gamma,x) = L_{t\to\gamma}\left[V(t,x)\right]$, $p(\gamma,x) = L_{t\to\gamma}\left[P(t,x)\right]$, $\rho(\gamma,x) = L_{t\to\gamma}\left[\rho(t,x)\right]$, $\nu = \mu + 2\lambda$, $f(\gamma,x) = L_{t\to\gamma}\left[f(t,x)\right]$,

где функции $V(t,x)$, $\rho(t,x)$, $P(t,x)$ являются решением задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}-\Big(\frac{\mu}{\rho_0(x)}+\frac{\lambda+\mu}{\rho_0(x)}\Big)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}+\frac{g}{\rho_0(x)}\rho(t,x)=f(t,x),\\
&\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}-\Big(\frac{N^2(x)}{g}+gc^{-2}\Big)\rho_0(x)V(t,x)+\rho_0(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}-c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t}-\frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t,x)=0,\ x>0,\ \ t>0,\\
&V(t,x)\big|_{t=0}=P(t,x)\big|_{t=0}=\rho(t,x)\big|_{t=0}=0,\\
&V(t,x)\big|_{x=0}=V(t,x)\big|_{x=\infty}=0,
\end{aligned}$$

тогда функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи

а) $$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\Big)=-f_*(\gamma,x),\quad v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0.$$

б) $$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\Big)-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x),\quad v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0.$$

в) $$\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x),\quad v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0.$$

Тест

1. Пусть $\xi\in\mathbb{R}^n$, $F_{x\to\xi}\left[f(x)\right]=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi}f(x)dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда функция $F_{x\to\xi}\left[D^\alpha f(x)\right]$ – преобразование Фурье функции $D^\alpha f(x)$ вычисляется по следующей формуле:

а) $(-i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}\left[f(x)\right]$, б) $(i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}\left[f(x)\right]$, в) $(-i)^\alpha \xi F_{x\to\xi}\left[f(x)\right]$.

2. . Является ли пространство $C^k(\bar\Omega)$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

3. Пусть $v(\gamma,x)=L_{t\to\gamma}\left[V(t,x)\right],\ p(\gamma,x)=L_{t\to\gamma}\left[P(t,x)\right],\rho(\gamma,x)=L_{t\to\gamma}\left[\rho(t,x)\right],\nu=\mu+2\lambda,\ f(\gamma,x)=L_{t\to\gamma}\left[f(t,x)\right]$,

где функции $V(t,x)$, $\rho(t,x)$, $P(t,x)$ являются решением задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}-\Big(\frac{\mu}{\rho_0(x)}+\frac{\lambda+\mu}{\rho_0(x)}\Big)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}+\frac{g}{\rho_0(x)}\rho(t,x)=f(t,x),\\
&\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}-\Big(\frac{N^2(x)}{g}+gc^{-2}\Big)\rho_0(x)V(t,x)+\rho_0(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}-c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t}-\frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t,x)=0,\ x>0,\ \ t>0,\\
&V(t,x)\big|_{t=0}=P(t,x)\big|_{t=0}=\rho(t,x)\big|_{t=0}=0,\\
&V(t,x)\big|_{x=0}=V(t,x)\big|_{x=\infty}=0,
\end{aligned}$$

тогда функции $v(\gamma,x)$ и $p(\gamma,x)$ связаны соотношением

а) $\rho(\gamma,x)=\frac{1}{\gamma}\Big(\frac{N^2(x)}{g}+gc^{-2}\Big)\rho_0(x)v(\gamma,x)-\frac{\rho_0(x)}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}$, б) $\rho(\gamma,x)=\frac{1}{\gamma}\Big(\frac{N^2(x)}{g}+gc^{-2}\Big)\rho_0(x)v(\gamma,x)$, в) $\frac{\rho_0(x)}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}$

Тест

1. Пусть функция $f(t)$ – оригинал, а γ – комплексное число. Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется следующая функция комплексного переменного:

а) $F(\gamma)=\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}f(t)\,dt$, б) $F(\gamma)=\int\limits_0^\infty e^{\gamma t}f(t)\,dt$, в) $F(\gamma)=\int\limits_0^\infty \gamma t f(t)\,dt$.

2. Является ли пространство $C^k(\bar\Omega)$ банаховым?

а) да. б) нет.

3. . Пусть $v(\gamma,x)=L_{t\to\gamma}\left[V(t,x)\right],\, p(\gamma,x)=L_{t\to\gamma}\left[P(t,x)\right],\, \rho(\gamma,x)=L_{t\to\gamma}\left[\rho(t,x)\right],\, \nu=\mu+2\lambda,\; f(\gamma,x)=L_{t\to\gamma}\left[f(t,x)\right],$

где функции $V(t,x)$, $\rho(t,x)$, $P(t,x)$ являются решением задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}-\left(\frac{\mu}{\rho_0(x)}+\frac{\lambda+\mu}{\rho_0(x)}\right)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}+\frac{g}{\rho_0(x)}\rho(t,x)=f(t,x),\\
&\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}-\left(\frac{N^2(x)}{g}+gc^{-2}\right)\rho_0(x)V(t,x)+\rho_0(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}-c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t}-\frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t,x)=0,\; x>0,\;\; t>0,\\
&V(t,x)\big|_{t=0}=P(t,x)\big|_{t=0}=\rho(t,x)\big|_{t=0}=0,\\
&V(t,x)\big|_{x=0}=V(t,x)\big|_{x=\infty}=0,
\end{aligned}$$

тогда функции $v(\gamma,x)$, $p(\gamma,x)$, $\rho(\gamma,x)$ связаны соотношением

а) $p(\gamma,x)=c^2\rho(\gamma,x)-v(\gamma,x)$, б) $p(\gamma,x)=c^2\rho(\gamma,x)-\dfrac{c^2N^2(x)\rho_0(x)}{g\gamma}v(\gamma,x)$, в) $p(\gamma,x)=c^2\rho(\gamma,x)v(\gamma,x)$

Тест

1. Преобразование Лапласа является

а) линейным, б) не линейным.

2. Частота Вейсяля-Брента задается следующей формулой

а) $N^2(x)=-\left(\dfrac{\rho_0'(x)}{\rho_0(x)}+gc^{-2}\right)g$, б) $N^2(x)=\left(\dfrac{\rho_0'(x)}{\rho_0(x)}+gc^{-2}\right)g$, в) а) $N^2(x)=-\dfrac{\rho_0'(x)}{\rho_0(x)}$.

3. Пусть

$$\left(f(x,\gamma),u(x,\gamma)\right)=\int_0^d f(x,\gamma)\bar{u}(x,\gamma)\,dx\,,$$

$$\|f(x,\gamma)\|=\left(\int_0^d |f(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\;\|u(x,\gamma)\|=\left(\int_0^d |u(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда всегда выполнена следующая оценка:

а) $|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))|>\|f(x,\gamma)\|\|u(x,\gamma)\|$,

б) $|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))|\le\|f(x,\gamma)\|\|u(x,\gamma)\|$,

в) $|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))|\le\|f(x,\gamma)\|^2\|u(x,\gamma)\|^2$.

Тест

1. Пусть $f(t), f'(t),..., f^{(n)}(t)$ – оригиналы и $F(\gamma)=L_{t\to\gamma}\left[f(t)\right]$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$, тогда $L_{t\to\gamma}\left[f^{(n)}(t)\right]$ – преобразование Лапласа функции $f^{(n)}(t)$ равно

а) $\gamma^nF(\gamma)-\gamma^{n-1}f(0)-\gamma^{n-2}f'(0)-...-\gamma f^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$,

б) $\gamma^nF(\gamma)-\gamma^{n-1}f(0)$, в) $\gamma^nF(\gamma)-f^{(n-1)}(0)$.

2. Функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right)-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x),\\
&v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0,
\end{aligned}$$

тогда оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+|\gamma|\sin\frac{\psi}{2}\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+|\gamma|^2\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^2\cdot\|(v(\gamma,x)\|^2\le c_1\left(1+\left(|\gamma|\sin\frac{\psi}{2}\right)^{-1}+|\gamma|^2\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^{-2}+|\gamma|^2\right)\|f_*(\gamma,x)\|^2.$$

выполнена

а) для достаточно малых γ, лежащих между кривой $l(\psi)=-\psi^2\dfrac{\rho_1 c^2}{\nu}+i\dfrac{6\rho_1 c^2}{\nu}\psi$ ($\psi\in[-\delta,0)\cup(0,-\delta]$) и мнимой осью (включая точки лежащие на l и мнимой оси).

б) для всех γ, лежащих между кривой $l(\psi)=-\psi^2\dfrac{\rho_1 c^2}{\nu}+i\dfrac{6\rho_1 c^2}{\nu}\psi$ ($\psi\in[-\delta,0)\cup(0,-\delta]$) и мнимой осью (включая точки лежащие на l и мнимой оси).

в) для всех γ.

3. Частота Вейсяля-Брента задается следующей формулой

а) $N^2(x)=-(\dfrac{\rho_0'(x)}{\rho_0(x)}+gc^{-2})g$, б) $N^2(x)=(\dfrac{\rho_0'(x)}{\rho_0(x)}+gc^{-2})g$, в) а) $N^2(x)=-\dfrac{\rho_0'(x)}{\rho_0(x)}$.

Тест

1. Пусть $F(\gamma)=\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}f(t)\,dt$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$, тогда функцию $f(t)$ можно восстановить по следующей формуле

а) $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\gamma t}F(\gamma)d\gamma$, б) $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{-\gamma t}F(\gamma)d\gamma$,

в) $f(t)=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\gamma t}F(\gamma)d\gamma$.

2. Является ли пространство $L_p(\Omega)$ банаховым?

а) да. б) нет.

3. Функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right)-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x),$$
$$v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0.$$

Будет ли для достаточно малых γ, лежащих между кривой $l(\psi)=-\psi^2\dfrac{\rho_1 c^2}{\nu}+i\dfrac{6\rho_1 c^2}{\nu}\psi$ ($\psi\in[-\delta,0)\cup(0,-\delta]$) и мнимой осью (включая точки лежащие на l и мнимой оси), выполнена оценка.

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+|\gamma|\sin\frac{\psi}{2}\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+|\gamma|^2(\sin\frac{\psi}{2})^2\cdot\|(v(\gamma,x)\|^2\le c_1(1+(|\gamma|\sin\frac{\psi}{2})^{-1}+|\gamma|^2(\sin\frac{\psi}{2})^{-2}+|\gamma|^2)\|f_*(\gamma,x)\|^2 .$$

а) да. б) нет.

Тест

1. Линейный и непрерывный оператор $A: X\to Y$ называется непрерывно обратимым, если у оператора A существует

а) обратный оператор $A^{-1}:Y\to X$ и он так же является непрерывным $(R(A^{-1})=Y)$,

б) обратный оператор $A^{-1}:Y\to X$ $(R(A^{-1})=Y)$,

в) обратный оператор $A^{-1}:Y\to X$ и он является линейным $(R(A^{-1})=Y)$.

2. Пространством $C^k(\bar{\Omega})$ обозначается множество

а) непрерывных в Ω функций,

б) k раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций,

в) k раз дифференцируемых в Ω функций.

3. Пусть функции $f_*(\gamma,x)(1+x)\in L_2([0,\infty))$, а функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right)-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x),$$
$$v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0.$$

Будет ли для достаточно малых γ, лежащих между кривой $l(\psi)=-\psi^2\frac{\rho_1c^2}{\nu}+i\frac{6\rho_1c^2}{\nu}\psi$ ($\psi\in[-\delta,0)\cup(0,-\delta]$) и мнимой осью (включая точки лежащие на l и мнимой оси) выполнена оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+|\gamma|^2\|v(\gamma,x)\|^2\le c_1\|f_*(\gamma,x)(1+x)\|^2$$

а) да. б) нет.

Тест

1. Пусть $A(\lambda)$ – непрерывная на $[0;1]$ оператор-функции действующая из пространства X в пространство Y, а оператор $A(0)$ непрерывно обратим. Оператор $A(1)$ будет непрерывно обратимым, если существует постоянная $\gamma>0$ такая, что при всех $\lambda\in[0;1]$ и при любых $x\in X$ выполнена оценка

а) $\|A(\lambda)x\|\ge\gamma\|x\|$, б) $\|A(\lambda)x\|<\gamma\|x\|$.

2. Является ли пространство $W_2^k(\Omega)$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

3. Пусть функции $f_*(\gamma,x)(1+x)\in L_2([0,\infty))$, а функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right)-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x),$$
$$v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0.$$

Будет ли для достаточно малых γ, таких, что $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ верна оценка?

а) да. б) нет.

Тест

1. Является ли пространство $L_2(\Omega)$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

2. . Пространством $C^k(\bar{\Omega})$ обозначается множество

а) непрерывных в Ω функций,
б) k раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций,
в) k раз дифференцируемых в Ω функций.

3. Пусть $\sigma\in C,\ \mathrm{Re}\,\sigma>0$ и $h(x)\in L_2([0,\infty))$. Тогда у задачи $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}-\sigma^2u(x)=-h(x),\ \ u(x)\big|_{x=0}=u(x)\big|_{x=\infty}=0$ будет

а) единственное решение б) не будет решения в) будет не единственное решение.

Тест

1. Норма функции $u(x)$ в пространстве $L_p(\Omega)$ задается формулой

а) $(\int_\Omega \left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx)^{1/p}$, б) $\int_\Omega \left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx$, $\int_\Omega \left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right| dx$.

2. Пусть

$$\left(f(x,\gamma),u(x,\gamma)\right)=\int_0^d f(x,\gamma)\overline{u}(x,\gamma)\,dx,$$

$$\|f(x,\gamma)\|=\left(\int_0^d |f(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\quad \|u(x,\gamma)\|=\left(\int_0^d |u(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда всегда при произвольном $\varepsilon_1>0$ выполнена следующая оценка:

а) $\left|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))\right|>\frac{\|f(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1}+\frac{\varepsilon_1\|u(x,\gamma)\|^2}{2}$,

б) $\left|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))\right|\le\frac{\|f(x,\gamma)\|^2\|u(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1}$,

в) $\left|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))\right|\le\frac{\|f(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1}+\frac{\varepsilon_1\|u(x,\gamma)\|^2}{2}$.

3. Пусть $\gamma_1(\xi)$ и $\gamma_2(\xi)$ корни уравнения

$$\gamma^2\rho_0(0)+\nu\xi^2\gamma+c^2\rho_0(0)\xi^2=0.$$

Тогда для $\forall\,\xi\in[0,\infty)$

а) $\operatorname{Re}\gamma_1(\xi)>0, \operatorname{Re}\gamma_2(\xi)\le 0$ б) $\operatorname{Re}\gamma_1(\xi)\le 0, \operatorname{Re}\gamma_2(\xi)\le 0$, в) $\operatorname{Re}\gamma_1(\xi)>0, \operatorname{Re}\gamma_2(\xi)>0$.

Тест

1. Норма функции $u(x)$ в пространстве $W_p^k(\Omega)$ задается формулой

а) $(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega \left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx)^{1/p}$, б) $\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega \left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx$, в) $(\int_\Omega \left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx)^{1/k}$.

2. Пусть $f(z)=u(a,b)+iv(a,b)$, где $z=a+ib$, и

1) функции $u(a,b)$ и $v(a,b)$ были дифференцируемы в точке $(a;b)$;

2) для функций $u(a,b)$ и $v(a,b)$ в точке $(a;b)$ выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}=\frac{\partial v(a,b)}{\partial b},\quad \frac{\partial u(a,b)}{\partial b}=-\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}.$$

Тогда функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z=a+ib$ и будут справедливы равенства

а) $f'(z)=\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}+i\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}$, б) $f'(z)=\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}+i\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}$,

в) $f'(z)=-\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}+i\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}$.

3. Пусть $\gamma_1(\xi)$ и $\gamma_2(\xi)$ корни уравнения

$$\gamma^2\rho_0(0)+\nu\xi^2\gamma+c^2\rho_0(0)\xi^2=0.$$

Тогда $\gamma_1(\xi)$ и $\gamma_2(\xi)$ принадлежат мнимой оси только при $\xi=0$, при этом $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=0$?

а) да. б) нет.

Тест

1. Норма функции $u(x)$ в пространстве $C^k(\bar{\Omega})$ задается формулой

а) $\sum\limits_{|\alpha|\le k}\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|$, б) $\sum\limits_{|\alpha|\le k}\left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|$, в) $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|$.

2 Пусть $A(\lambda)$ – непрерывная на $[0;1]$ оператор-функции действующая из пространства X в пространство Y, а оператор $A(0)$ непрерывно обратим. Оператор $A(1)$ будет непрерывно обратимым, если существует постоянная $\gamma>0$ такая, что при всех $\lambda\in[0;1]$ и при любых $x\in X$ выполнена оценка

а) $\|A(\lambda)x\|\ge\gamma\|x\|$, б) $\|A(\lambda)x\|<\gamma\|x\|$.

3. Пусть $l_{\delta_2}^{\alpha_2,\beta_2}=l_0\cup l\cup l_1$, где $l=-\xi^2\alpha_2+i\xi\beta_2$ при $\xi\in[-\delta_2,\delta_2]$, $l_0=-\delta_2{}^2\alpha_2-i(\delta_2+\xi)\beta_2$ при $\xi\in[0,\infty)$, $l_1=-\delta_2{}^2\alpha_2+i(\delta_2+\xi)\beta_2$ при $\xi\in[0,\infty)$. Существует ли решение у задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right)-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x),$$
$$v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0,$$

при каждом γ, лежащем левее контура $l_{\delta_2}^{\alpha_2,\beta_2}$?

а) да. б) нет

Тест

1. Пусть Ω это ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Если функция $u(x)$ принадлежит пространству $W_p^k(\Omega)$ и $k>k_1+\frac{n}{p}$, то функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^{k_1}(\bar{\Omega})$ и будет выполнена оценка

а) $\|u\|_{C^{k_1}(\bar{\Omega})}>c\|u\|_{W_p^k(\Omega)}$, б) $\|u\|_{C^{k_1}(\bar{\Omega})}\le c\|u\|_{W_p^k(\Omega)}$.

2 Пусть $f(z)=u(a,b)+iv(a,b)$, где $z=a+ib$, и

1) функции $u(a,b)$ и $v(a,b)$ были дифференцируемы в точке $(a;b)$;

2) для функций $u(a,b)$ и $v(a,b)$ в точке $(a;b)$ выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}=\frac{\partial v(a,b)}{\partial b},\ \frac{\partial u(a,b)}{\partial b}=-\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}.$$

Тогда функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z=a+ib$ и будут справедливы равенства

а) $f'(z)=\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}+i\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}$, б) $f'(z)=\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}+i\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}$,

в) $f'(z)=-\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}+i\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}$.

3. Пусть $v(\gamma,x)$ решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\gamma+\rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right)-\gamma\rho_0(x)v(\gamma,x)=-f_*(\gamma,x),$$
$$v(\gamma,x)\big|_{x=0}=v(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0,$$

а $l_{\delta_2}^{\alpha_2,\beta_2}=l_0\cup l\cup l_1$, где $l=-\xi^2\alpha_2+i\xi\beta_2$ при $\xi\in[-\delta_2,\delta_2]$, $l_0=-\delta_2{}^2\alpha_2-i(\delta_2+\xi)\beta_2$ при $\xi\in[0,\infty)$, $l_1=-\delta_2{}^2\alpha_2+i(\delta_2+\xi)\beta_2$ при $\xi\in[0,\infty)$. Будет ли $v(\gamma,x)$ аналитична по γ при всех γ, лежащий правее контура $l_{\delta_2}^{\alpha_2,\beta_2}$?

а) да. б) нет.

Тест

1. Для того чтобы функция $f(z)=u(a,b)+iv(a,b)$ была дифференцируема в точке $z=a+ib$, необходимо и достаточно, чтобы

а) функции $u(a,b)$ и $v(a,b)$ были дифференцируемы в точке $(a;b)$;

б) для функций $u(a,b)$ и $v(a,b)$ в точке $(a;b)$ выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}=\frac{\partial v(a,b)}{\partial b},\ \frac{\partial u(a,b)}{\partial b}=-\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}.$$

в) функции $u(a,b)$ и $v(a,b)$ были дифференцируемы в точке $(a;b)$ и для функций $u(a,b)$ и $v(a,b)$ в точке $(a;b)$ выполнялись условия:

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial a}=\frac{\partial v(a,b)}{\partial b},\ \frac{\partial u(a,b)}{\partial b}=-\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}.$$

2. Пусть

$$\left(f(x,\gamma),u(x,\gamma)\right)=\int_0^d f(x,\gamma)\bar{u}(x,\gamma)\,dx\ ,$$

$$\|f(x,\gamma)\|=\left(\int_0^d |f(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\ \|u(x,\gamma)\|=\left(\int_0^d |u(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда всегда при произвольном $\varepsilon_1>0$ выполнена следующая оценка:

а) $\left|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))\right|>\dfrac{\|f(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1}+\dfrac{\varepsilon_1\|u(x,\gamma)\|^2}{2}$,

б) $\left|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))\right|\le\dfrac{\|f(x,\gamma)\|^2\|u(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1}$,

в) $\left|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))\right|\le\dfrac{\|f(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1}+\dfrac{\varepsilon_1\|u(x,\gamma)\|^2}{2}$.

3. Пусть для функции $v(\gamma,x)$ выполнена следующая априорная оценка $\left\|\dfrac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+A\left\|\dfrac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+A^2\|v(\gamma,x)\|^2\le c_1\|f(\gamma,x)\|^2$ при некоторых γ, где $A>0$, тогда при тех же γ равномерно по $x\in[0,\infty)$ будет справедлива оценка

а) $|v(\gamma,x)|\le\dfrac{c\|f(\gamma,x)\|}{A^{1/4}}$. б) $|v(\gamma,x)|\le\dfrac{c\|f(\gamma,x)\|}{A}$ в) $|v(\gamma,x)|\le\dfrac{c\|f(\gamma,x)\|}{A^{3/4}}$

Примерный перечень задач для контрольной работы.

Вариант № 1

1. Свести задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}-(\frac{\mu}{\rho_0(x)}+\frac{\lambda+\mu}{\rho_0(x)})\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}+\frac{g}{\rho_0(x)}\rho(t,x)=f(t,x),\\
&\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}-(\frac{N^2(x)}{g}+gc^{-2})\rho_0(x)V(t,x)+\rho_0(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}-c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t}-\frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t,x)=0,\ x>0,\ t>0,\\
&V(t,x)\big|_{t=0}=P(t,x)\big|_{t=0}=\rho(t,x)\big|_{t=0}=0,\\
&V(t,x)\big|_{x=0}=V(t,x)\big|_{x=\infty}=0,
\end{aligned}$$

к задаче с параметром.

2. Пусть для функции $v(\gamma, x)$ выполнена следующая априорная оценка $\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}\right\|^2 + A^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \le c_1 \|f(\gamma, x)\|^2$ при некоторых γ, где $A > 0$. Доказать, что при тех же γ будет справедлива оценка $\left|\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}\right| \le \frac{c\|f(\gamma, x)\|}{A^{1/4}}$ равномерно по x.

3. Пусть $v(\gamma, x)$ решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v\gamma + \rho_0(x)c^2}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}\right) - \gamma\rho_0(x)v(\gamma, x) = -f_*(\gamma, x),$$
$$v(\gamma, x)\big|_{x=0} = v(\gamma, x)\big|_{x=\infty} = 0,$$

$$\rho(\gamma, x) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2}\right)\rho_0(x)v(\gamma, x) - \frac{\rho_0(x)}{\gamma}\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x},\ p(\gamma, x) = c^2\rho(\gamma, x) - \frac{c^2N^2(x)\rho_0(x)}{g\gamma}v(\gamma, x).$$

Доказать, что при $\operatorname{Re}\gamma \ge a > 0$ справедливы следующие оценки

$$|v(\gamma, x)| \le \frac{c\|f(\gamma, x)\|}{(1+|\gamma|)^{3/4}},\ |\rho(\gamma, x)| \le \frac{c\|f(\gamma, x)\|}{(1+|\gamma|)^{5/4}},\ |p(\gamma, x)| \le \frac{c\|f(\gamma, x)\|}{(1+|\gamma|)^{5/4}}.$$

Вариант № 2

1. Свести задачу

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} - \left(\frac{\mu}{\rho_0(x)} + \frac{\lambda + \mu}{\rho_0(x)}\right)\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t, x)}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0(x)}\rho(t, x) = f(t, x),$$
$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} - \left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2}\right)\rho_0(x)V(t, x) + \rho_0(x)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} - c^{-2}\frac{\partial P(t, x)}{\partial t} - \frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t, x) = 0,\ x > 0,\ t > 0,$$
$$V(t, x)\big|_{t=0} = P(t, x)\big|_{t=0} = \rho(t, x)\big|_{t=0} = 0,$$
$$V(t, x)\big|_{x=0} = V(t, x)\big|_{x=\infty} = 0,$$

к задаче с параметром.

2. Пусть для функции $v(\gamma, x)$ выполнена следующая априорная оценка $\left\|\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}\right\|^2 + A^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \le c_1 \|f(\gamma, x)\|^2$ при некоторых γ, где $A > 0$. Доказать, что при тех же γ будет справедлива оценка $|v(\gamma, x)| \le \frac{c\|f(\gamma, x)\|}{A^{1/2}}$ равномерно по x.

3. Пусть функции $V(t, x), \rho(t, x), P(t, x)$ являются решением задачи

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} - \left(\frac{\mu}{\rho_0(x)} + \frac{\lambda + \mu}{\rho_0(x)}\right)\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial P(t, x)}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0(x)}\rho(t, x) = f(t, x),$$
$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} - \left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2}\right)\rho_0(x)V(t, x) + \rho_0(x)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} - c^{-2}\frac{\partial P(t, x)}{\partial t} - \frac{N^2(x)}{g}\rho_0(x)V(t, x) = 0,\ x > 0,\ t > 0,$$
$$V(t, x)\big|_{t=0} = P(t, x)\big|_{t=0} = \rho(t, x)\big|_{t=0} = 0,$$
$$V(t, x)\big|_{x=0} = V(t, x)\big|_{x=\infty} = 0.$$

Доказать, что $\lim\limits_{t\to+0} V(t, x) = 0,\quad \lim\limits_{t\to+0}\rho(t, x) = 0, \lim\limits_{t\to+0} P(t, x) = 0$.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, тестовые задания, контрольные работы.

В ходе тестовых заданий обучающемуся выдается КИМ с тестовыми заданиями, если тестовое задание проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ тестового задания содержат три задания. На написание тестового задания отводится 15 минут. Тестовое задание оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в тестовом задании нужно верно ответить на два задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если контрольная проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ контрольной содержат три задания. На написание контрольной работы отводится 90 минут. Контрольная работа оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в контрольной работе нужно верно решить два задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

20.2 Промежуточная аттестация

Перечень вопросов к экзамену

1. Преобразование Фурье.
2. Определение преобразования Лапласа. Теорема о регулярной функции.
3. Теорема о регулярности преобразования Лапласа и теорема о поведении преобразования Лапласа на бесконечности.
4. Основные свойства преобразования Лапласа.
5. Предельные теоремы преобразования Лапласа.
6. Обращение преобразования Лапласа.
7. Метод продолжения по параметру.
8. Соболевские пространства и теоремы вложения.
9. Аналитичность функций комплексного переменного.
10. Постановка задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости.
11. Сведение задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости к задаче с параметром.
12. Построение первой априорной оценки (Теорема 3.2.1).
13. Построение второй априорной оценки (Лемма 3.2.1).
14. Построение третьей априорной оценка (Лемма 3.2.3).
15. Доказать существование решения для задачи с параметром (Теорема 3.3.1).
16. Доказать аналитичность решения задачи с параметром по параметру (Теорема 3.4.1).
17. Доказать оценки по модулю (Лемма 3.5.1, Лемма 3.5.2, Лемма 3.5.3).
18. Определить поведение решения задачи, описывающей малые колебания стратифицированной жидкости, при большом времени (Теорема 3.5.1).
19. Построить асимптотическую оценку для скорости при большом времени. (Теорема 3.5.2).

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины «Малые колебания стратифицированной жидкости» в форме экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На экзамене оценивается уровень освоении учебной дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

В ходе экзамена обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если экзамен проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ экзамена содержат три вопроса. На написание экзамена отводится 150 минут. «Отлично» выставляется при правильном ответе на три вопроса КИМ, «хорошо» выставляется при правильном ответе на два вопроса КИМ, «удовлетворительно» выставляется при правильном ответе на один вопрос КИМ, «неудовлетворительно» выставляется если обучающийся неверно ответил на все вопросы КИМ.

-

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Перечень заданий для оценки сформированности компетенции

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно) Test1-5:

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

1. Пусть задана функция $f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется следующий интеграл

а) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$, б) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi x)dx$.

2. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда функцию $f(x)$ можно восстановить по следующей формуле

а) $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \tilde{f}(\xi)d\xi$, б) $f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \tilde{f}(\xi)d\xi$,

в) $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\xi)d\xi$.

3. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $F_{x\to\xi}[f(x)] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда функция $F_{x\to\xi}\left[D^\alpha f(x)\right]$ – преобразование Фурье функции $D^\alpha f(x)$ вычисляется по следующей формуле:

а) $(-i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}\left[f(x)\right]$, б) $(i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}\left[f(x)\right]$, в) $(-i)^\alpha \xi F_{x\to\xi}\left[f(x)\right]$.

4. Пусть функция $f(t)$ – оригинал, а γ – комплексное число. Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется следующая функция комплексного переменного:

а) $F(\gamma) = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} f(t)\,dt$, б) $F(\gamma) = \int\limits_0^\infty e^{\gamma t} f(t)\,dt$, в) $F(\gamma) = \int\limits_0^\infty \gamma t f(t)\,dt$.

5. Является ли пространство $C^k(\bar{\Omega})$ банаховым?

а) да. б) нет.

Задания открытого типа (короткий текст): **!Task6-10**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

6. Пусть $f(t), f'(t)$ – оригиналы и $F(\gamma) = L_{t\to\gamma}[f(t)]$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$, тогда функция $\gamma F(\gamma) - f'(0)$, будет преобразованием Лапласа ……

Ответ: производной.

7. Линейный и непрерывный оператор $A: X \to Y$ называется непрерывно обратимым, если у оператора A существует обратный оператор $A^{-1}: Y \to X$ и он является …..

Ответ: непрерывным.

8. Пусть $A(\lambda)$ – непрерывная на $[0;1]$ оператор-функции действующая из пространства X в пространство Y, а оператор $A(0)$ непрерывно обратим и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что при всех $\lambda \in [0;1]$ и при любых $x \in X$ выполнена оценка $\|A(\lambda)x\| < \gamma \|x\|$. Тогда оператор $A(1)$ будет …

Ответ: непрерывно обратимым.

9. Пусть функции $u(a,b)$ и $v(a,b)$ дифференцируемы в точке $(a;b)$ и для функций $u(a,b)$ и $v(a,b)$ в точке $(a;b)$ выполнялись условия: $\frac{\partial u(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial v(a,b)}{\partial b}$, $\frac{\partial u(a,b)}{\partial b} = -\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}$.

Тогда в точке $z = a + ib$, функция $f(z) = u(a,b) + iv(a,b)$ ….

Ответ: дифференцируема.

10. Пусть Ω это ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Если функция $u(x)$ принадлежит пространству $W_p^k(\Omega)$ и $k > 1 + \frac{n}{p}$, то функция $u(x)$ ……

Ответ: дифференцируема.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).