

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**  
Заведующий кафедрой  
*Системного анализа и управления*  
наименование кафедры, отвечающей за реализацию дисциплины  
Задорожний В.Г.  
подпись, расшифровка подписи  
29.05.2023 г.



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

**Б1.О.20** Методы оптимизации

*Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом*

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:** 02.03.02  
Фундаментальная информатика и информационные технологии

**2. Профиль подготовки/специализация:** Инженерия программного обеспечения

**3. Квалификация (степень) выпускника:** Бакалавр \_\_\_\_\_

**4. Форма обучения:** Очная \_\_\_\_\_

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Системного анализа и  
управления \_\_\_\_\_

**6. Составители программы:** Коструб Ирина Дмитриевна канд. физ.-мат. наук,  
доцент  
(ФИО, ученая степень, ученое звание)

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом факультета прикладной  
математики, информатики и механики (протокол №07 от 26.05.2023)

*(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,*

*отметки о продлении вносятся вручную)*

**8. Учебный год:** 2025/2026

**Семестр(ы):** 6

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

### *Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- изучение основ теории экстремальных задач, получение необходимых концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки существующих алгоритмов решения оптимизационных задач и, если необходимо, разработки новых методов и подходов решения новых типов таких задач для формирования умений и навыков по использованию фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности.

### *Задачи учебной дисциплины:*

- дать студентам общее представление о прикладных задачах оптимизации;
- ознакомить с основными теоретическими фактами;
- изучить основные классы методов;
- обучить использованию методов решения прикладных задач оптимизации;
- сформировать базовые знания и навыки решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, сформулированных в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук;
- сформировать навыки выбора современных математических инструментальных средств для обработки исследуемых явлений в соответствии с поставленной задачей, анализа результатов расчетов и интерпретации полученных результатов.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина относится к базовому циклу Б1, обязательная часть. Изучение данного курса должно базироваться на знаниях студентами материала дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Информатика», «Языки программирования», изучаемых в рамках программы подготовки бакалавра.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1	Решает типовые задачи с учетом основных понятий и изучаемых методов	Знать: основные положения методов оптимизации, современные методы исследования математических моделей  Уметь: самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий новые знания и умения  Владеть: современным аппаратом решения задач фундаментальной и прикладной математики
		ОПК-1.3	Осуществляет выбор современных математических инструментальных средств для обработки исследуемых явлений в соответствии с поставленной задачей, анализирует результаты расчетов и интерпретирует	Знать: основные положения методов оптимизации, современные методы исследования математических моделей  Уметь: самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий новые знания и умения  Владеть: современным аппаратом решения задач фундаментальной и прикладной математики

			полученные результаты	
--	--	--	-----------------------	--

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 3 / 108.**

**Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен)** зачет с оценкой.

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			№семестра	№семестра	...
Аудиторные занятия		64		6	
в том числе:	лекции	32		6	
	практические	32		6	
	лабораторные				
Самостоятельная работа		44		6	
в том числе: курсовая работа (проект)				6	
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 36 час.)					
Итого:		108			

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1.	Задачи оптимизации и их формализация	Примеры задач оптимизации. Существование решений в экстремальных задачах. Классификация задач.	<i>Методы оптимизаци_0</i> 2.03.02
1.2.	Методы оптимизации функций одной переменной	Классический метод. Численные методы одномерной оптимизации.	
1.3.	Элементы линейного программирования и нелинейного программирования	Основные задачи ЛП. Геометрическая интерпретация. Угловые точки. Симплекс-метод. Метод искусственного базиса.	
1.4.	Элементы выпуклого анализа	Выпуклые функции и множества. Теоремы отделимости. Теоремы Куна – Таккера. Связь прямой и двойственной задач.	
1.5.	Методы минимизации функций нескольких переменных	Необходимые и достаточные условия условного экстремума. Градиентный метод. Методы Ньютона, сопряженных направлений, штрафных и барьерных функций.	
1.6.	Задачи вариационного исчисления	Простейшая задача. Дифференциал функционала. Слабый и сильный экстремумы. Уравнение Эйлера. Задача Больца.	

<b>2. Практические занятия</b>			
1.1.	Задачи оптимизации и их формализация	Примеры задач оптимизации. Существование решений в экстремальных задачах. Классификация задач.	<i>Методы оптимизации_02.03.02</i>
1.2.	Методы оптимизации функций одной переменной	Классический метод. Численные методы одномерной оптимизации.	
1.3.	Элементы линейного программирования и нелинейного программирования	Основные задачи ЛП. Геометрическая интерпретация. Угловые точки. Симплекс-метод. Метод искусственного базиса.	
1.4.	Элементы выпуклого анализа	Выпуклые функции и множества. Теоремы отделимости. Теоремы Куна – Таккера. Связь прямой и двойственной задач.	
1.5.	Методы минимизации функций нескольких переменных	Необходимые и достаточные условия условного экстремума. Градиентный метод. Методы Ньютона, сопряженных направлений, штрафных и барьерных функций.	
1.6.	Задачи вариационного исчисления	Простейшая задача. Дифференциал функционала. Слабый и сильный экстремумы. Уравнение Эйлера. Задача Больца.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практически	Лабораторны	Самостоятельна	
1.1	Задачи оптимизации и их формализация	2	2	-	3	6
1.2	Методы оптимизации функций одной переменной	6	6		7	24
1.3	Элементы линейного программирования и нелинейного программирования	6	6		7	16
1.4	Элементы выпуклого анализа	6	6		9	18
1.5	Методы минимизации функций нескольких переменных	6	6		9	26
1.6	Задачи вариационного исчисления	6	6		9	18
	Итого:	32	32		44	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

*(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)*

**Подготовка к лекциям.** Знакомство с дисциплиной происходит уже на первой лекции, где от студента требуется не просто внимание, но и самостоятельное оформление конспекта. При работе с конспектом лекций необходимо учитывать тот фактор, что одни лекции дают ответы на конкретные вопросы темы, другие – лишь выявляют взаимосвязи между явлениями, помогая студенту понять глубинные процессы развития изучаемого предмета как в истории, так и в настоящее время.

Конспектирование лекций – сложный вид вузовской аудиторной работы, предполагающий интенсивную умственную деятельность студента. Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное и сделано это самим обучающимся. Не надо стремиться записать дословно всю лекцию. Такое «конспектирование» приносит больше вреда, чем пользы. Целесообразно вначале понять основную мысль, излагаемую лектором, а затем записать ее.

Желательно запись осуществлять на одной странице листа или оставляя поля, на которых позднее, при самостоятельной работе с конспектом, можно сделать дополнительные записи, отметить непонятные места.

Конспект лекции лучше подразделять на пункты, соблюдая красную строку. Этому в большой степени будут способствовать вопросы плана лекции, предложенные преподавателям. Следует обращать внимание на акценты, выводы, которые делает лектор, отмечая наиболее важные моменты в лекционном материале замечаниями «важно», «хорошо запомнить» и т.п. Можно делать это и с помощью разноцветных маркеров или ручек, подчеркивая термины и определения.

Целесообразно разработать собственную систему сокращений, аббревиатур и символов. Однако при дальнейшей работе с конспектом символы лучше заменить обычными словами для быстрого зрительного восприятия текста.

Работая над конспектом лекций, всегда необходимо использовать не только учебник, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор. Именно такая серьезная, кропотливая работа с лекционным материалом позволит глубоко овладеть теоретическим материалом.

**Подготовка к практическим занятиям.** Подготовку к каждому практическому занятию студент должен начать с ознакомления с планом практического занятия, который отражает содержание предложенной темы. Тщательное продумывание и изучение вопросов плана основывается на проработке текущего материала лекции, а затем изучения обязательной и дополнительной литературы, рекомендованной к данной теме. Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса.

Результат такой работы должен проявиться в способности студента свободно ответить на теоретические вопросы практикума, его выступлении и участии в коллективном обсуждении вопросов изучаемой темы, правильном выполнении практических заданий и контрольных работ.

В процессе подготовки к практическим занятиям, студентам необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной литературы. При всей полноте конспектирования лекции в ней невозможно изложить весь материал из-за лимита аудиторных часов. Поэтому самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной литературой, материалами периодических изданий и Интернета является наиболее эффективным методом получения дополнительных знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у студентов свое отношение к конкретной проблеме.

**Рекомендации по работе с литературой.** Работу с литературой целесообразно начать с изучения общих работ по теме, а также учебников и учебных пособий. Далее рекомендуется перейти к анализу монографий и статей, рассматривающих отдельные аспекты проблем, изучаемых в рамках курса, а также официальных материалов и неопубликованных документов (научно-исследовательские работы, диссертации), в которых могут содержаться основные вопросы изучаемой проблемы.

Работу с источниками надо начинать с ознакомительного чтения, т.е. просмотреть текст, выделяя его структурные единицы. При ознакомительном чтении закладками отмечаются те страницы, которые требуют более внимательного изучения.

В зависимости от результатов ознакомительного чтения выбирается дальнейший способ работы с источником. Если для разрешения поставленной задачи требуется изучение некоторых фрагментов текста, то используется метод выборочного чтения. Если в книге нет подробного оглавления, следует обратить внимание ученика на предметные и именные указатели.

Избранные фрагменты или весь текст (если он целиком имеет отношение к теме) требуют вдумчивого, неторопливого чтения с «мысленной проработкой» материала. Такое чтение предполагает выделение: 1) главного в тексте; 2) основных аргументов; 3) выводов. Особое внимание следует обратить на то, вытекает тезис из аргументов или нет.

Необходимо также проанализировать, какие из утверждений автора носят проблематичный, гипотетический характер и уловить скрытые вопросы.

Понятно, что умение таким образом работать с текстом приходит далеко не сразу. Наилучший способ научиться выделять главное в тексте, улавливать проблематичный характер утверждений, давать оценку авторской позиции – это сравнительное чтение, в ходе которого студент знакомится с различными мнениями по одному и тому же вопросу, сравнивает весомость и доказательность аргументов сторон и делает вывод о наибольшей убедительности той или иной позиции.

Если в литературе встречаются разные точки зрения по тому или иному вопросу из-за сложности прошедших событий и правовых явлений, нельзя их отвергать, не разобравшись. При наличии расхождений между авторами необходимо найти рациональное зерно у каждого из них, что позволит глубже усвоить предмет изучения и более критично оценивать изучаемые вопросы.

Знакомясь с особыми позициями авторов, нужно определять их схожие суждения, аргументы, выводы, а затем сравнивать их между собой и применять из них ту, которая более убедительна.

Следующим этапом работы с литературными источниками является создание конспектов, фиксирующих основные тезисы и аргументы. Можно делать записи на отдельных листах, которые потом легко систематизировать по отдельным темам изучаемого курса. Другой способ – это ведение тематических тетрадей-конспектов по одной какой-либо теме. Большие специальные работы монографического характера целесообразно конспектировать в отдельных тетрадях. Здесь важно вспомнить, что конспекты пишутся на одной стороне листа, с полями и достаточным для исправления и ремарок межстрочным расстоянием (эти правила соблюдаются для удобства редактирования). Если в конспектах приводятся цитаты, то непременно должно быть дано указание на источник (автор, название, выходные данные, № страницы). Впоследствии эта информация может быть использована при написании текста реферата или другого задания.

При работе с источниками и литературой важно уметь:

- сопоставлять, сравнивать, классифицировать, группировать, систематизировать информацию в соответствии с определенной учебной задачей;
  - обобщать полученную информацию, оценивать прослушанное и прочитанное;
  - фиксировать основное содержание сообщений; формулировать, устно и письменно, основную идею сообщения; составлять план, формулировать тезисы;
  - готовить и презентовать развернутые сообщения типа доклада;
  - работать в разных режимах (индивидуально, в паре, в группе), взаимодействуя друг с другом;
  - пользоваться реферативными и справочными материалами;
  - контролировать свои действия и действия своих товарищей, объективно оценивать свои действия;
  - обращаться за помощью, дополнительными разъяснениями к преподавателю, другим студентам;
  - пользоваться лингвистической или контекстуальной догадкой, словарями различного характера, различного рода подсказками, опорам в тексте (ключевые слова, структура текста, предваряющая информация и др.);
  - использовать при говорении и письме перифраз, синонимичные средства, слова-описания общих понятий, разъяснения, примеры, толкования, «словотворчество»;
  - повторять или перефразировать реплику собеседника в подтверждении понимания его высказывания или вопроса;
  - обратиться за помощью к собеседнику (уточнить вопрос, переспросить и др.);
- использовать мимику, жесты (вообще и в тех случаях, когда языковых средств не хватает для выражения тех или иных коммуникативных намерений).

**Подготовка к промежуточной аттестации.** При подготовке к промежуточной аттестации целесообразно:

- внимательно изучить перечень вопросов и определить, в каких источниках находятся сведения, необходимые для ответа на них;
- внимательно прочитать рекомендованную литературу;
- составить краткие конспекты ответов (планы ответов).

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

**15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины** (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видовисточников)

**а) основная литература:**

№ п/п	Источник
1.	Алюшин, В. М. Методы оптимального управления : учебное пособие / В. М. Алюшин, Л. В. Колобашкина. — Москва : НИЯУ МИФИ, 2020. — 176 с. — ISBN 978-5-7262-2695-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/175406">https://e.lanbook.com/book/175406</a>
2.	Эпштейн, Г. Л. Теория оптимального управления : учебное пособие / Г. Л. Эпштейн, А. П. Иванова. — Москва : РУТ (МИИТ), 2020. — 128 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/175959">https://e.lanbook.com/book/175959</a>

**б) дополнительная литература:**

№п/п	Источник
1.	<i>Обратные задачи и методы их решения: приложения к геофизике / А. Г. Ягола, В. Янфей, И. Э. Степанова, В. Н. Титаренко. – 4-е изд., эл. – Москва : Лаборатория знаний, 2021. – 219 с. : ил., табл., схем., граф. – (Математическое моделирование). – Режим доступа: по подписке. – URL: <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=446071">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=446071</a></i>
2.	<i>Пегат, А. Нечеткое моделирование и управление : практическое пособие : [16+] / А. Пегат ; пер. А. Г. Подвесовский, Ю. В. Тюменцев. – 4-е изд., электрон. – Москва : Лаборатория знаний, 2020. – 801 с. : схем., табл., ил. – (Адаптивные и интеллектуальные системы). – Режим доступа: по подписке. – URL: <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=445832">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=445832</a></i>

**в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:**

№п/п	Ресурс
1.	<i>Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a></i>
2.	<i>МО_02.03.02 / И.Д. Коструб. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a>.</i>

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

### **16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№п/п	Источник
1.	<i>Коструб И.Д. <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m13-22.pdf">Лабораторный практикум по методам оптимизации и исследованию операций : [для студентов 3 курса днев. отд-ния специальности 010501 - Прикладная математика и информатика] / Воронеж. гос. ун-т ; сост. И.Д. Коструб. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. — 31 с. : ил., табл.</a> &lt;URL:<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m13-22.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m13-22.pdf</a>&gt;.</i>
2.	<i>Коструб И.Д. Методы оптимизации и исследование операций : учебное пособие для вузов : [для студ. 3 к. днев. отд-ния фак. ПММ направления 010300 - Фундаментальная информатика и информ. технологии] / Воронеж. гос. ун-т ; сост. И.Д. Коструб. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 118 с. : ил., табл. &lt;URL:<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m14-16.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m14-16.pdf</a>&gt;.</i>
3.	<i>Электронная библиотека учебно-методических материалов ВГУ. Режим доступа: <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a></i>
4.	<i>Электронная библиотека рабочих учебных программ дисциплин. Режим доступа: <a href="http://smwww.main.vsu.ru">http://smwww.main.vsu.ru</a></i>
	<i>МО_02.03.02 / И.Д. Коструб. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a>.</i>

### **17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Методы оптимизации\_02.03.02», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Компьютер преподавателя, мультимедиа оборудование (проектор, средства звуковоспроизведения), доска меловая, специализированная мебель. Windows 10 (лицензионное ПО); LibreOffice (свободное и/или бесплатное ПО); Adobe Reader (свободное и/или бесплатное ПО); Notepad ++ (свободное

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Задачи оптимизации и их формализация	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.3	<i>Собеседования по темам</i>
2.	Методы оптимизации функций одной переменной	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.3	<i>Собеседования по темам</i>
3	Элементы линейного программирования и нелинейного программирования	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.3	<i>Собеседования по темам</i>
4.	Элементы выпуклого анализа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.3	<i>Собеседования по темам</i>
5.	Методы минимизации функций нескольких переменных	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.3	<i>Собеседования по темам</i>
6.	Задачи вариационного исчисления	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.3	<i>Собеседования по темам контрольная</i>
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				<i>Перечень вопросов см. ниже.</i>

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: **Контрольные работы**

#### **Перечень заданий для контрольных работ**

**Тема:** Задачи оптимизации и их формализация. Методы оптимизации функций одной переменной. Элементы линейного программирования и нелинейного программирования. Методы минимизации функций нескольких переменных

#### **Вариант 1**



1. Решить задачу классическим методом:  $J(u) = u^3(u^2-1) \rightarrow \inf, u \in [1; 2]$ .
2. Привести задачу к каноническому виду:

$$J(u) = 2u_1 - 3u_2 + u_3 \rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 - u_3 + u_4 \leq 1, \\ u_1 - u_2 + 2u_4 \geq 1, \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 = -4, \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

3. Составить математическую модель двойственной задачи и по её решению найти оптимальное решение исходной задачи:

$$J(u) = -7u_1 - 8u_2 - 12u_3 \rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 + 3u_3 \leq -1, 5, \\ u_1 + 2u_2 + 4u_3 \leq -7, \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

4. Решить задачу:  $J(u) = u_1u_2 + 50/u_1 + 20/u_2 \rightarrow \text{extr}$ .
5. Найти условный экстремум функции нескольких переменных в задаче с ограничениями типа равенств:  $J(u) = u_1u_2 + u_2u_3 \rightarrow \text{extr}, u_1 - u_2 = 2, u_2 + 2u_3 = 4$ .
6. Составить функцию Лагранжа и выписать систему для нахождения условного экстремума в задаче с ограничениями типа равенств и неравенств:  $J(u) = u_1u_2u_3 \rightarrow \text{extr}, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1, u_1 + u_2 + u_3 \leq 0$ .

## Вариант 2

1. Решить задачу классическим методом:  $J(u) = u^5/5 + u^3 - 4u + 2 \rightarrow \inf$ ,  $u \in [0; 2]$ .
2. Привести задачу к каноническому виду:

$$J(u) = u_1 - 2u_2 + u_4 \rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 - u_3 \leq 3, \\ u_1 - u_2 + u_4 \geq -1, \\ u_1 - 2u_2 - 3u_3 = 5, \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

3. Составить математическую модель двойственной задачи и по её решению найти оптимальное решение исходной задачи:

$$J(u) = u_1 - 2u_2 + u_4 \rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} 3u_1 + u_2 + 8u_3 - 3u_4 = 5, \\ 2u_1 + u_2 + 5u_3 - 4u_4 = 4, \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

4. Решить задачу:  $J(u) = 5u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2 - 16u_1 - 12u_2 \rightarrow \text{extr}$ .
5. Найти условный экстремум функции нескольких переменных в задаче с ограничениями типа равенств:  $J(u) = 2u_1u_3 - u_2u_3 \rightarrow \text{extr}$ ,  $u_1 + 2u_3 = 3$ ,  $u_2 + u_3 = 2$ .
6. Составить функцию Лагранжа и выписать систему для нахождения условного экстремума в задаче с ограничениями типа равенств и неравенств:  $J(u) = 2u_1 - u_2 + u_3 \rightarrow \text{extr}$ ,  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ ,  $u_1 - 2u_2 + 3u_3 \leq 4$ .

**Тема:** Элементы выпуклого анализа. Задачи вариационного исчисления.

### Вариант 1

1. Дать определение: а) выпуклой функции; б) сильного локального минимума.
2. Решить задачу  $\int_0^1 (\ddot{u}^2 - 24tu) dt \rightarrow \inf$ ,  $u(0) = \dot{u}(1) = 0$ ,  $u(1) = 1/5$ ,  $\dot{u}(1) = 1$ .
3. Решить задачу  $\int_0^1 (u - \dot{u}^2) dt \rightarrow \text{extr}$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ .

### Вариант 2

1. Дать определение: а) выпуклого множества; б) слабого локального минимума.
2. Решить задачу  $\int_0^1 \ddot{u}^2 dt \rightarrow \inf$ ,  $u(0) = \dot{u}(1) = u(1) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = 1$ .
3. Решить задачу  $\int_0^1 (t^2u - \dot{u}^2) dt \rightarrow \text{extr}$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ .

Для оценивания результатов обучения (контрольная работа) используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

**Оценка «отлично»** выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы; выполнил все задания и задачи полностью без ошибок и недочетов; строго соблюдает требования при оформлении работы; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «хорошо»** выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; выполнил все задания и задачи полностью, но при наличии в их решении не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов; строго соблюдает требования при оформлении работы; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

**Оценка «удовлетворительно»** выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций; выполнил не менее 2/3 всех предложенных заданий и задач или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочетов, при наличии четырех-пяти недочетов; допускает незначительные ошибки при оформлении работы; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

**Оценка «неудовлетворительно»** выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине; если число ошибок и недочетов в работе превысило норму для оценки 3 или обучающийся выполнил правильно менее 2/3 всех заданий и задач; допускает грубые ошибки при оформлении работы; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### **Перечень вопросов к зачету и порядок формирования КИМ**

1. Примеры задач оптимизации.
2. Классификация задач оптимизации.
3. Элементы линейного программирования. Приведение задач к каноническому виду. Составление мат. моделей задач ЛП. Примеры.
4. Графический метод решения задач линейного программирования. Примеры.
5. Двойственность. Виды двойственных задач и составление их математических моделей. Примеры.
6. Симплексный метод.
7. Задача о назначениях.
8. Элементы нелинейного программирования (НП). Графический метод решения задач нелинейного программирования.
9. Минимизация функций нескольких переменных. Основные понятия и обозначения.
10. Минимизация функций нескольких переменных без ограничений.
11. Условный экстремум (формулировка). Метод множителей Лагранжа.
12. Достаточное условие условного экстремума.
13. Пример Пеано. Правило решения задач методом множителей Лагранжа. Задачи с ограничениями типа равенств.
14. Выпуклые множества и их свойства.
15. Проекция точки на выпуклое множество. Критерий того, что точка будет проекцией. Крайние точки.
16. Выпуклые функции одной переменной. Критерий выпуклости функции одной переменной.
17. Выпуклые функции нескольких переменных. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.
18. Критерий выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции.
19. Принцип выпуклости. Задача о максимуме выпуклой функции на выпуклом множестве.
20. Некоторые операции с выпуклыми функциями.
21. Задача выпуклого программирования. Формулировка теоремы Куна-Таккера. Другая формулировка теоремы.
22. Еще раз о двойственности. Основная теорема двойственности. Пример.
23. Оптимизация систем непрерывного действия. Основные понятия. Примеры.
24. ПЗВИ.
25. Уравнение Эйлера. Необходимое условие минимума ПЗВИ.
26. Частные случаи уравнения Эйлера.

27. Случай функционала, зависящего от векторной функции. Случай функционалов, зависящих от старших производных.

28. Задача Больца.

29. Принцип максимума Понтрягина.

**Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в формах: *письменных работ (контрольные, лабораторные работы)*. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и/или практические задания, позволяющие оценить степень сформированности умений и (или) навыков.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_1**

1. Минимизация функций нескольких переменных без ограничений.
2. Выпуклые функции нескольких переменных. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_2**

1. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
2. Выпуклые функции нескольких переменных. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_3**

1. Выпуклые множества и их свойства.
2. Двойственность. Виды двойственных задач и составление их математических моделей.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_4**

1. Выпуклые функции одной переменной. Критерий выпуклости функции одной переменной.
2. Правило решения задач методом множителей Лагранжа. Задачи с ограничениями типа равенств.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_5**

1. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
2. Уравнение Эйлера. Необходимое условие минимума ПЗВИ.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_6**

1. Достаточное условие условного экстремума.
2. Частные случаи уравнения Эйлера.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_7**

1. Критерий выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции.
2. Случай функционала, зависящего от векторной функции. Случай функционалов, зависящих от старших производных.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_8**

1. Правило решения задач методом множителей Лагранжа. Задачи с ограничениями типа равенств.
2. Классификация задач оптимизации.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_9**

1. Классификация задач оптимизации.
2. Задача Больца.

#### **Контрольно-измерительный материал №\_\_10**

1. Примеры задач оптимизации.
2. ПЗВИ.

**Описание технологии проведения.** Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.

**Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)**

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие показатели:

- 1) знание основных определений, примеров и формулировок теорем;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение решать задачи вычислительного характера;
- 4) умение обосновывать (доказывать) основные факты теории.

Для оценивания результатов обучения на зачете с оценкой используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Полное соответствие ответа обучающегося на контрольно-измерительный материал всем перечисленным критериям</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал соответствует первым трем критериям.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<i>Ответ обучающегося на контрольно-измерительный материал соответствует первым двум критериям.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
<i>Ответ не соответствует первым двум критериям.</i>	<i>–</i>	<i>Неудовлетворительно</i>

**20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ**

**Вопросы с вариантами ответов**

1. Методы оптимизации подразделяются на:

- а) Аналитические.
- б) Численные.
- в) Приближенные.
- г) Аналитические и численные (приближенные).

Ответ: г)

2. Дайте классификацию численных методов оптимизации.

- а) Существует классификация методов оптимизации по наличию информации о производных функции: методы нулевого, первого и второго порядка.
- б) Существует классификация методов оптимизации по наличию информации о второй производной функции.
- в) Существует классификация методов оптимизации по наличию информации о функции.

Ответ: а)

3. По каким принципам разделяются на подклассы методы одномерной оптимизации?

- а) Использование в процессе поиска экстремума информации о самой функции, так как в ряде задач целевая функция задана таким образом, что точных значений производных найти нельзя (только оценить).
- б) Использование в процессе поиска экстремума информации о самой функции или ее производных.
- в) По виду целевой функции (методы решения одно- и многоэкстремальных задач).

Ответ: а), б), в)

4. Методы одномерной оптимизации без использования информации о производной функции – это методы:

а) Методы последовательного поиска (методы интервалов). Метод дихотомии.

б) Метод золотого сечения. Метод Фибоначчи.

в) Методы последовательного поиска (методы интервалов). Метод дихотомии. Метод деления пополам. Метод золотого сечения. Метод Фибоначчи.

г) Методы последовательного поиска (методы интервалов). Метод деления пополам. Метод золотого сечения.

Ответ: в)

### **Вопросы с кратким текстовым ответом**

1. В чем разница между задачей линейного и нелинейного программирования?

Ответ: Задача условной оптимизации, в которой все функции линейны, называется задачей линейного программирования. Задачи с нелинейной целевой функцией называются задачами нелинейного программирования.

2. Методы численного решения задач многомерной безусловной минимизации условно можно разделить на три больших класса в зависимости от информации, используемой при реализации метода. Дайте характеристику методам нулевого, первого и второго порядка.

Ответ: Методы нулевого порядка, или прямого поиска, стратегия которых основана на использовании информации только о свойствах целевой функции. Методы первого порядка, в которых при построении итерационной процедуры наряду с информацией о целевой функции используется информация о значениях первых производных этой функции. Методы второго порядка, в которых наряду с информацией о значениях целевой функции и ее производных первого порядка используется информация о вторых производных функции.

#### *Описание технологии проведения:*

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 30 минут

#### *Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:*

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности) :

1 балл – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень)

2 балла – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**