

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой вычислительной математики  
и прикладных информационных технологий (ВМиПИТ)



М. Леденева  
22.03.2024 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б1.В.ДВ.01.03 Прикладная теория графов**

- 1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**  
01.03.02 Прикладная математика и информатика
- 2. Профиль подготовки/специализация:** все профили
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** кафедра вычислительной математики и прикладных информационных технологий (ВМиПИТ)
- 6. Составитель программы:** Леденева Татьяна Михайловна, д.т.н., профессор кафедры ВМ и ПИТ факультета ПММ
- 7. Рекомендована:** НМС факультета ПММ 22.03.2024г., протокол №5.
- 8. Учебный год:** 2025/2026                      **Семестр:** 4
- 9. Цели и задачи учебной дисциплины:**  
*Цель учебной дисциплины:* сформировать у обучающихся комплекс теоретических знаний по основным разделам прикладной теории графов и практические навыки построения графовых моделей для сложных систем и объектов в профессиональной деятельности.  
*Задачи учебной дисциплины:*
  - ознакомление с основными характеристиками и инвариантами графов, а также классами прикладных задач, в которых в качестве модели используется граф;
  - изучение основных типов задач на графах, методов и алгоритмов их решения;
  - формирование навыков моделирования прикладных задач с помощью аппарата теории графов, а также анализа полученных результатов.
- 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина «Прикладная теория графов» входит в вариативную часть учебного плана и изучается в 4 семестре.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-2	Способен подготовить элементы документации, проекты планов и программы проведения отдельных этапов работ	ПК-2.1	Осуществляет планирование и готовит программы проведения отдельных этапов работ.	<i>Знать:</i> основные принципы системного подхода к планированию комплекса работ. <i>Уметь:</i> осуществлять временной комплекса работ. <i>Владеть:</i> методами теории графов, используемых для анализа и планирования комплекса работ.
		ПК-2.2	Проводит эксперименты в соответствии с поставленными задачами по отдельным этапам работ	<i>Знать:</i> основные принципы проведения экспериментов, особенности входной информации при использовании математического аппарата теории графов. <i>Уметь:</i> определить цель и задачи эксперимента, интерпретировать полученные результаты, оформить отчет. <i>Владеть:</i> методами структурного анализа сложных объектов с использованием графов.
ПК-4	Способен разрабатывать комплекс требований к программному обеспечению, осуществлять его проектирование с учетом особенностей предметной области для решения прикладных задач в естественных науках, промышленности, бизнесе и управлять работами по созданию (модификации) и сопровождению информационных ресурсов	ПК-4.2	Разрабатывает концептуальную модель прикладной области, проводит математическую формализацию и реализацию решения прикладных задач, разрабатывает технические спецификации на программные компоненты и их взаимодействие, и ИР	<i>Знать:</i> основные подходы к построению математических моделей на основе теории графов. <i>Уметь:</i> строить математические модели на основе теории графов и использовать соответствующие алгоритмы для нахождения и анализа решения. <i>Владеть:</i> навыками интерпретации результатов моделирования с использованием графов.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. – 3/108.**

**Форма промежуточной аттестации: зачет.**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы:**

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			4 семестр
Контактная работа		64	64
в том числе:	Лекции	32	32
	Практические занятия	32	32
Самостоятельная работа		44	44
Итого		108	108

### 13.1 Содержание разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Основные понятия теории графов	Основные понятия теории графов. Типы графов. Изоморфизм и инварианты. Операции на графах. Матрицы, ассоциированные с графом. Кодирование графов. Степенные последовательности. Критерий графичности последовательности. Реализация графических последовательностей графами с определенными свойствами. Лемма о пересчете помеченных графов. Число помеченных деревьев (теорема Кэли).	moodle (Прикладная теория графов) edu.vsu.ru
1.2	Достижимость и связность	Матрицы достижимости и контрдостижимости. Определение сильных компонент. Базы и антибазы орграфа. Конденсация и ее свойства. Задачи, связанные с ограниченной достижимостью. Бесконтурные графы и их свойства.	
1.3	Устойчивые множества графов	Устойчивые множества в графе: независимые, доминирующие. Оценки для числа независимости графа. Интерпретация независимых множеств. Ядро и признаки его существования. Логический метод определения устойчивых множеств. Алгоритмы определения ядра для некоторых специальных графов. Независимость и покрытия. Клики и кликовое число. Паросочетания. Задача о назначениях.	
1.4	Задача раскраски	Вершинная и реберная раскраска графа. Критерий Кенига. Оценки для хроматического числа. Хроматический член графа. Проблема четырех красок. Приближенные алгоритмы раскрашивания.	
1.5	Древовидные структуры	Дерево и остов. Свойства деревьев. Теорема Кирхгофа о деревьях. Задача о кратчайшем остове. Задача Штейнера.	
1.6	Обходы и элементы цикломатики	Поиск в глубину и поиск в ширину. Конструирование алгоритмов на основе поисковых процедур. Циклы и разрезы. Разложение бесконтурного графа на уровни. Иерархические структуры. Эйлеровы графы. Критерии эйлеровости связного графа. Метод Флери. Гамильтоновы графы. Признак гамильтоновости графа. Алгебраический метод построения гамильтоновых путей и контуров. Метод перебора Робертса и Флореса. Задача коммивояжера.	
1.7	Экстремальные задачи на графах	Экстремальные задачи на графах: задача о кратчайшем пути (алгоритмы фронта волны и Дейкстры), задача о критическом пути, задача о максимальном потоке и минимальном разрезе (алгоритм Форда – Фалкерсона). Центры и медианы графа. Абсолютный центр. Метод Хакими. Приложение к задачам размещения.	
1.8	Приложения теории графов	Графы как модели программ, процессов и информационных структур. Знаковые графы и теория структурного баланса. Приложения к анализу сложных систем. Задача управления проектами.	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	1.1, 1.3, 1.4, 1.5	Определение основных характеристик и инвариантов графа.	moodle (Прикладная теория графов) edu.vsu.ru
2.2	1.2, 1.3, 1.4, 1.8	Граф как инструмент моделирования (структурный анализ и построение иерархий; задача о назначениях; распараллеливание процессов; сбалансированность структур).	
2.3	1.5, 1.6	Конструирование алгоритмов на основе поисковых процедур.	

2.6	1.7	Экстремальные задачи на графах (календарное планирование при управлении проектом; размещение центров обслуживания).	
-----	-----	---	--

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)			
		Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Всего
1.1	Основные понятия теории графов	2	4	4	10
1.2	Достижимость и связность	2	4	4	10
1.3	Устойчивые множества в графе	2	4	4	10
1.4	Задача раскраски	2	4	2	8
1.5	Древовидные структуры	2	–	4	6
1.6	Обходы и элементы цикломатики	2	4	4	10
1.7	Экстремальные задачи на графах	2	12	8	22
1.8	Приложения теории графов	2	–	14	16
Итого:		32	32	44	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Лекционные занятия (лекции) реализуются в традиционной форме в соответствии с календарным планом-графиком. Практические занятия направлены на углубление теоретических знаний и освоение алгоритмов с целью их использования для решения некоторых задач, имеющих модельный характер.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения необходимо выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, интернет-ресурсов, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Тюрин С. Ф. Теория графов и её приложения : учебное пособие / С. Ф. Тюрин. – Пермь : ПНИПУ, 2017. – 207 с. – ISBN 978-5-398-01745-8. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/160870">https://e.lanbook.com/book/160870</a>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М. : URSS: ЛЕНАНД, 2018. – 304 с.
3	Емеличев В.А. Теория графов в задачах и упражнениях / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М. : URSS: Едиториал, 2018. – 416 с.
4	Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 427 с.
5	Райгородский А.М. Экстремальные задачи теории графов и интернет / А.М. Райгородский. – М. : Интеллект, 2012. – 104 с.
6	Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. – Спб. : Лань, 2009. – 400 с. Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=220">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=220</a>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
7	<a href="http://www.lib.vsu.ru">www.lib.vsu.ru</a> – Электронный каталог Научной библиотеки ВГУ
8	Леденева, Т.М. Курс «Прикладная теория графов» / Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». – Режим доступа: <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10641">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10641</a>

### 16. Перечень учебно-методического обеспечения

№ п/п	Источник
-------	----------

9	Элементы теории графов : учебное пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сост.: Л.Ю. Кабанцова, Т.К. Кацаран. – Воронеж : ЛОП ВГУ, 2007. – 55 с. : ил. – Библиогр.: с. 52 . – URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07054.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07054.pdf</a>
10	Леденева Т.М. Некоторые алгоритмы прикладной теории графов : учебно-методическое пособие / Т.М. Леденева. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. – 32 с.

### **17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии, электронное обучение, смешанное обучение.**

При реализации дисциплины используется классическая модель лекционных и практических занятий. Организационная модель проведения занятий базируется на здоровьесберегающей технологии, строгом соблюдении санитарно-гигиенических норм и правил техники безопасности в учебных помещениях. В процессе чтения лекций у обучающихся формируются следующие качества: интерес к содержанию дисциплины, критическое мышление, способность к выявлению связей между теорией и практической направленностью изучаемого материала. Практические занятия направлены на развитие навыков работы с алгоритмами и использования их для решения прикладных задач. По каждой теме обучающимся предлагается индивидуальное задание, суть которого заключается в составлении математической модели на основе теории графов и решения задачи с помощью соответствующих алгоритмов. Результаты выполнения индивидуального задания оформляются в форме отчета, включающего формулировку задачи; этапы построения математической модели; алгоритм для решения задачи; программную реализацию алгоритма (авторская или с помощью пакета); анализ результатов решения задачи.

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Прикладная теория графов», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

### **18. Материально-технического обеспечения дисциплины:**

<b>Мебель и оборудование</b>	<b>Программное обеспечение</b>
<b>Лекции</b>	
Специализированная мебель, компьютер (ноутбук), мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения).	Windows 10 (лицензионное ПО); Adobe Reader (свободное и/или бесплатное ПО); Mozilla Firefox (свободное и/или бесплатное ПО)
<b>Практические занятия</b>	
Специализированная мебель, компьютер (ноутбук), мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения).	Windows 10 (лицензионное ПО); Adobe Reader (свободное и/или бесплатное ПО); Mozilla Firefox (свободное и/или бесплатное ПО)

### **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.1	Основные понятия теории графов	ПК-4	ПК-4.1	Индивидуальные задания по темам (всего 8)
1.2	Достижимость и связность	ПК-2, ОПК-4	ПК-2.2, ПК-4.1	
1.3	Устойчивые множества в графе	ПК-2, ПК-4	ПК-2.2, ПК-4.1	
1.4	Задача раскраски	ПК-2, ПК-4	ПК-2.2, ПК-4.1	
1.5	Древовидные структуры	ПК-2, ПК-4	ПК-2.2, ПК-4.1	
1.6	Обходы и элементы цикломатики	ПК-2, ПК-4	ПК-2.2, ПК-4.1	
1.7	Экстремальные задачи на графах	ПК-2, ПК-4	ПК-2.2, ПК-4.1	
1.8	Приложения теории графов	ПК-2, ОПК-4	ПК-2.1, ПК-2.2, ОПК-4.1	
Промежуточная аттестация Форма контроля – зачет				Тестовые задания

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется на основе проверки результатов выполнения индивидуальных заданий по темам. Каждое задание является практико-ориентированным и предполагает решение соответствующей задачи и интерпретацию полученных результатов. Каждому обучающемуся предлагается 8 индивидуальных заданий. Результаты выполнения индивидуального задания оформляются в виде отчета, который включает

- формулировку задачи;
- описание модели в виде графа;
- обоснование метода для решения;
- решение, полученное с помощью выбранного инструментального средства, или на основе разработанной компьютерной программы;
- выводы и рекомендации.

#### Примеры индивидуальных заданий

**Задание 1.** Строительная фирма подписала контракт на строительство нового спортзала для колледжа. В контракте предусмотрены большие штрафы за невыполнение работы в срок, поэтому для руководителя фирмы важно выяснить, какие строительно-монтажные работы имеют решающее влияние на сроки окончания строительства. В табл., составленной плановым отделом, приведен перечень работ, составляющих процесс строительства спортзала, указаны их продолжительности и предшествующие каждой из них работы.

Работа	Выполняемая работа	Продолжительность работы (в нед.)	Какие работы предшествуют?
<b>A</b>	Подготовка стройплощадки	2	-
<b>B</b>	Укладка фундамента	3	A
<b>C</b>	Монтаж вертикальных стен	5	B
<b>D</b>	Монтаж крыши	4	C
<b>E</b>	Укладка деревянного пола	5	B
<b>F</b>	Отделка внутренних стен	6	C
<b>G</b>	Установка сантехники	2	C
<b>H</b>	Монтаж электропроводки	2	D

<b>I</b>	Установка баскетбольных щитов	1	D
<b>J</b>	Окраска и разметка площадки	2	E
<b>K</b>	Сборка системы отопления и кондиционеров	6	G, H
<b>L</b>	Монтаж внутренних беговых дорожек	6	E
<b>M</b>	Строительство трибун	5	E, F
<b>N</b>	Установка электрического табло	2	F
<b>O</b>	Оборудование буфета-бара	3	E, F, G

Построить сетевую модель проекта. На ее основе составьте календарный план выполнения работ и проанализируйте его напряженность. Определить время, необходимое для реализации проекта.

**Задание 2.** При анализе клиентских сред профиль пользователя – это структура, выражающая предпочтения пользователя или группы пользователей на основе примеров. Если созданы профили пользователей, то в момент обращения какого-то клиента система подбирает похожие профили и, учитывая степень схожести, составляет рекомендации для клиента. Пусть создается профиль сегмента VIP-клиентов интернет-магазина SerenaGold на основе предложений от «Бриллиантов Якутии», и построен граф предпочтений, представленный на рисунке. Вершины соответствуют предложениям, причем если предложение  $i$  пользуется большим спросом, чем предложение  $j$ , то от  $i$  к  $j$  ведет дуга. Постройте последовательность предложений от «Бриллиантов Якутии», упорядоченную по убыванию предпочтительности.

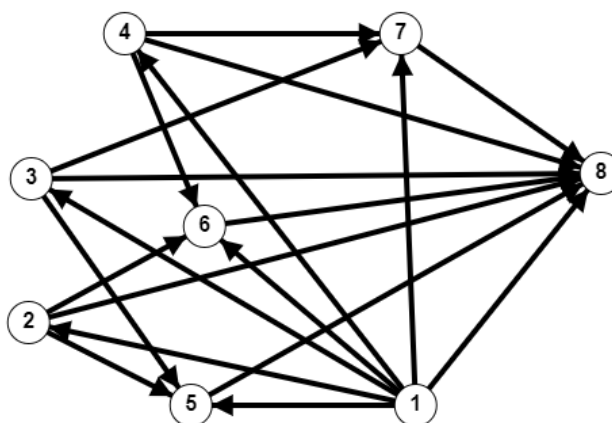


Рисунок – Граф предпочтений сегмента vip-клиентов Интернет-магазина SerenaGold

Оценивание индивидуального задания осуществляется на основе отчета, при этом если задание выполнено, то ставится «зачтено», иначе «не зачтено».

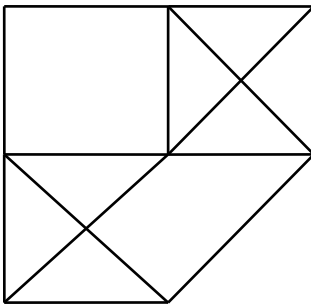
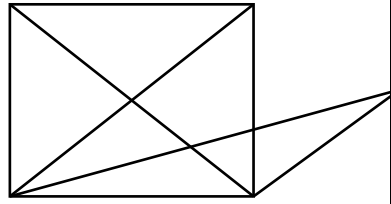
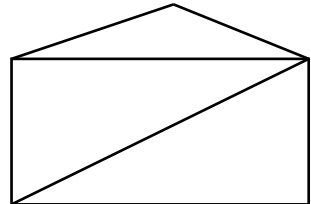
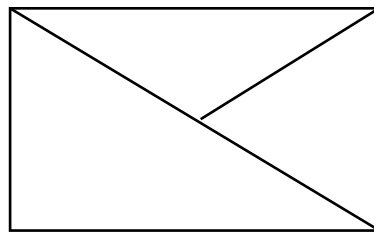
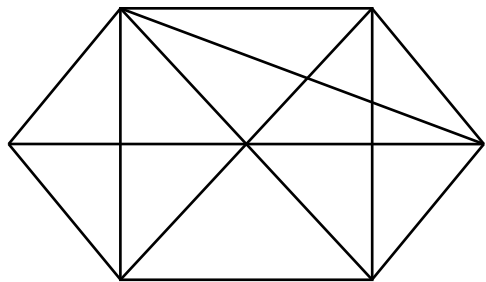
### 20.2 Промежуточный контроль успеваемости

Промежуточный контроль осуществляется в форме зачета на основе тестирования и результатов выполнения индивидуальных заданий. Для выполнения теста дается 90 мин.

#### Критерии оценивания

Результат	Требования
Зачтено	Правильно выполнено 80% заданий из контрольно-измерительного материала; все индивидуальные задания выполнены (всего 8).
Не зачтено	Выполнено менее 80% заданий и/или не все индивидуальные занятия выполнены (всего 8).

**Контрольно-измерительный материал № \_\_\_\_\_**

		
$G_1$	$G_2$	$G_3$
		
$G_4$	$G_5$	

**Замечания:**

- 1) для задач 7,9,11,12 ребрам (дугам) графа приписать веса – произвольные целые числа;
- 2) для задач 1,3,4,5,9,10,11,12 в графах ввести подходящую ориентацию ребер.

**НЕОБХОДИМО ПРОДЕМОНСТРИРОВАТЬ РАБОТУ АЛГОРИТМОВ**

1. В ориентированном графе ( $G_1$ ) найти сильные компоненты, множества баз и антибаз.
2. Для неориентированного графа ( $G_2$ ) с помощью эвристической процедуры раскрашивания найти раскраску и хроматическое число.
3. Для ориентированного графа  $G_3$  найти максимальные независимые и минимальные доминирующие множества методом Магу.
4. В бесконтурном орграфе  $G_1$  определить функцию Гранди.
5. Привести пример двудольного графа  $G = (X_1 \cup X_2, U)$ , где  $|X_1| = 3$ ,  $|X_2| = 4$ ,  $|U| = 7$ , и найти в нем максимальное паросочетание.
6. В графе  $G_4$  определить дерево поиска в глубину и дерево поиска в ширину (в качестве корня выбрать произвольную вершину).
7. Для взвешенного неориентированного графа  $G_2$  найти кратчайший остов и его длину.
8. В ориентированном графе  $G_5$  найти путь с минимальным числом дуг из правой вершины в левую вершину (ориентацию ввести таким образом, чтобы такой путь существовал).
9. Для взвешенного ориентированного графа ( $G_1, G_5$ ) найти кратчайший путь из  $s$  в  $t$  (задать вершины  $s$  и  $t$  самостоятельно).
10. Осуществить топологическую сортировку вершин бесконтурного ориентированного графа ( $G_1$ ).
11. Во взвешенном ориентированном бесконтурном графе ( $G_5$ ) найти критический путь из  $s$  в  $t$ , учитывая, что  $s$  – источник, а  $t$  – сток (задать вершины  $s$  и  $t$  самостоятельно).
12. Во взвешенном ориентированном графе ( $G_2, G_4$ ) найти величину максимального потока из  $s$  в  $t$  (задать вершины  $s$  и  $t$  самостоятельно).



### 20.3 Тестовые задания

Тестовые задания рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных знаний по результатам освоения данной дисциплины.

#### Вопросы с вариантами ответов

Критерий оценивания	Шкала оценок
Верный ответ	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

1. Из перечисленных свойств выберите свойства деревьев

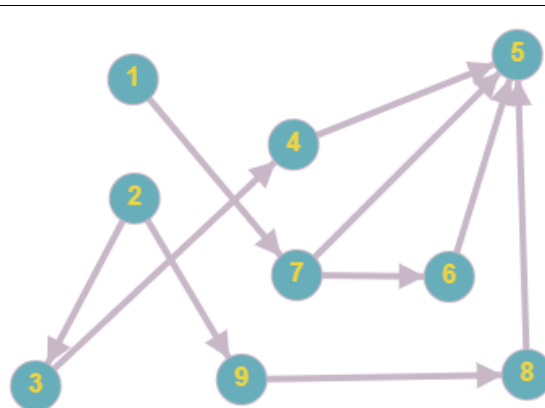
- а) имеет  $(n - 1)$  ребер;
- б) не является связным;
- в) не содержит циклов, но добавление ребра между любыми двумя несмежными вершинами приводит к появлению цикла;
- г) все циклы простые;
- д) не имеет висячих вершин;
- е) связан, но утрачивает это свойство после удаления любого ребра.

Ответ: а), в), е)

2.

На рисунке представлен бесконтурный граф. Разложите его на уровни. Укажите номер уровня, на котором находится вершина 6 (нумерация уровней начинается с 1)

- а) 4;
- б) 3;
- в) 2.

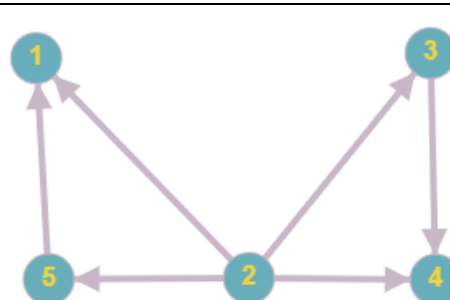


Ответ: б)

3.

На рисунке изображен ориентированный граф. Укажите множество вершин, образующих ядро графа

- а) {1, 4};
- б) {3, 5};
- в) {2};
- г) {2, 4, 5}.



Ответ: в)

#### Вопросы с кратким текстовым ответом

Критерий оценивания	Шкала оценок
Должен быть сформулирован ответ из указанных вариантов (один или несколько) или аналогичные, по сути, ответы с альтернативными терминами и определениями	2 балла

Неверный ответ

0 баллов

2 – верный ответ

0 – неверный ответ

5. На рисунке изображена сеть, каждой дуге приписана пропускная способность. С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона в данной сети ищется максимальный поток. Работа алгоритма представлена в следующей таблице.

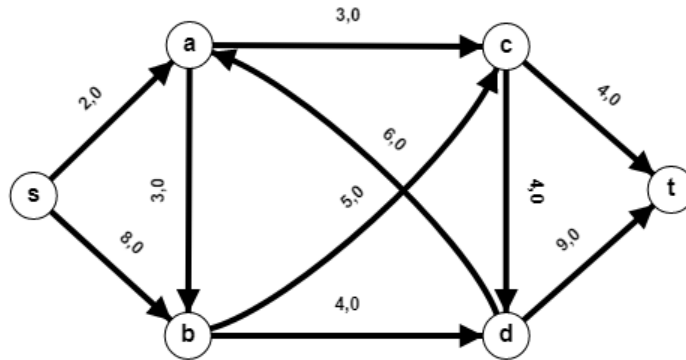


Таблица 1 – Метки вершин по итерациям

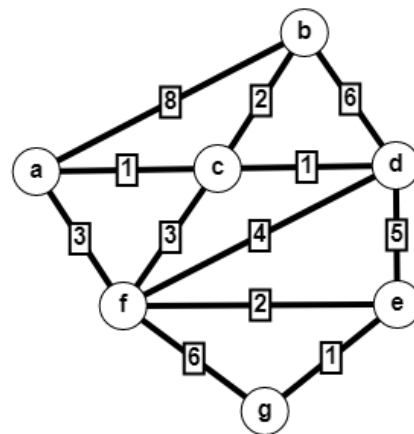
Итерации				
	1	2	3	4
s	$[0, \infty]$	$[0, \infty]$	$[0, \infty]$	$[0, \infty]$
a	$[+s, 2]$			
b		$[+s, 8]$	$[+s, 6]$	$[+s, 3]$
c	$[+a, 2]$	$[+b, 5]$	$[+b, 3]$	
d			$[+c, 3]$	$[+b, 3]$
t	$[+c, 2]$	$[+c, 2]$	$[+d, 3]$	$[+d, 3]$
$\delta_i$	2	2	3	3
Путь	$s \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow t$	$s \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow t$	$s \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$	$s \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow t$

Чему равна величина максимального потока?

Ответ: 10

6.

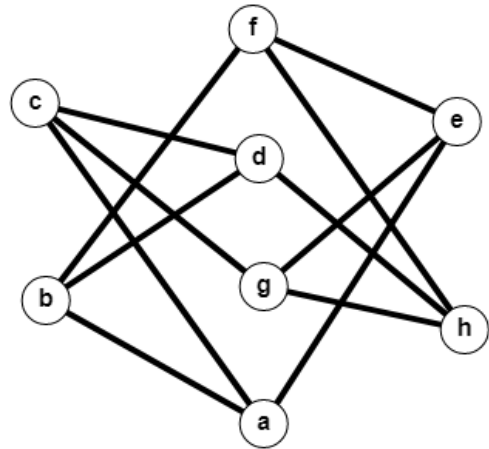
Для заданного взвешенный неориентированный граф укажите вес кратчайшего (минимального) остова.



Ответ: 11

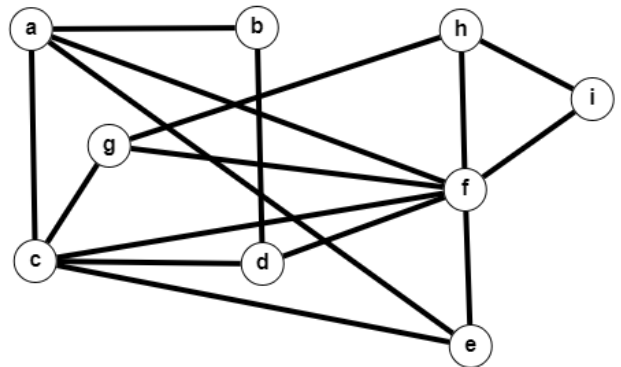
7.

Для заданного неориентированного графа найдите хроматическое число.



Ответ: 3

Для заданного неориентированного графа найдите хроматическое число.



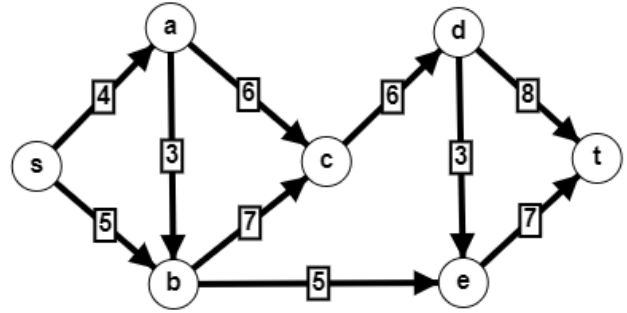
Ответ: 2

### Вопросы с вариантами ответов

Критерий оценивания	Шкала оценок
Верный ответ	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

Задание 1.

Для графа, изображенного на рисунке, решается задача о нахождении величины максимального потока из  $s$  в  $t$  и соответствующего минимального разреза. Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи.

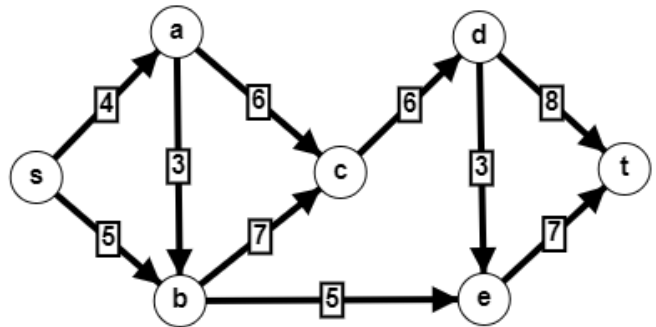


№	Величина максимального потока	Минимальный разрез
1	9	$\{(s,a), (s,b)\}$
2	9	$\{(a,c), (a,b)\}$
3	15	$\{(d,t), (e,t)\}$
4	15	$\{(a,b), (b,c), (b,e)\}$

Ответ: 1

### Задание 2.

Предположим, что граф, изображенный на рисунке, является сетевой моделью проекта. Для составления календарного плана требуется определить величины максимальных (критических) путей из вершины  $s$  в каждую из других вершин. Длина максимального пути из  $s$  в  $t$  определит время, необходимое для реализации проекта. Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи.

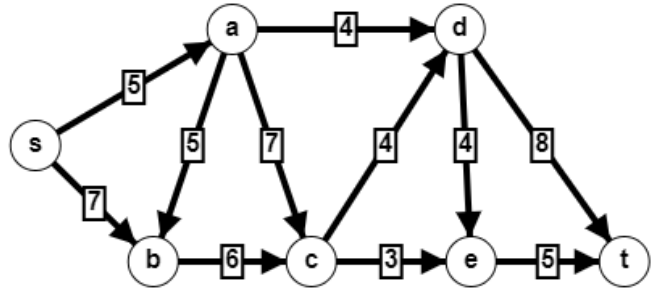


№	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$t$	Максимальный путь
1	4	7	10	16	9	28	$s \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow t$
2	4	7	14	20	23	30	$s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow t$
3	4	7	12	18	10	26	$s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$
4	4	5	12	16	12	30	$s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow t$

Ответ: 2

### Задание 3.

Для графа, изображенного на рисунке, решается задача о нахождении величины максимального потока из  $s$  в  $t$  и соответствующего минимального разреза. Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи.

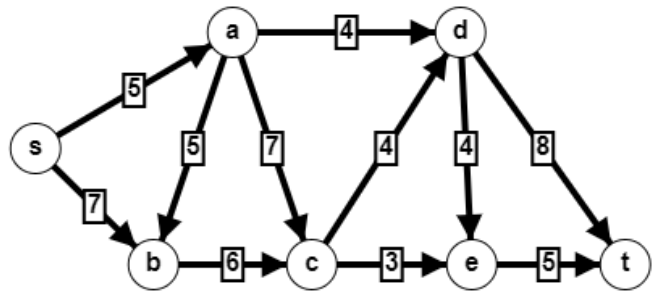


№	Величина максимального потока	Минимальный разрез
1	13	$\{(d,t), (e,t)\}$
2	11	$\{(a,b), (b,c)\}$
3	11	$\{(s,a), (b,c)\}$
4	13	$\{(a,c), (b,c)\}$

Ответ: 3

Задание 4.

Определите максимальный (критический) и минимальный (кратчайший) пути из  $s$  в  $t$  в заданном графе. Найдите разность длин путей и дуги, которые входят как в максимальный, так и в минимальный пути. Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи.

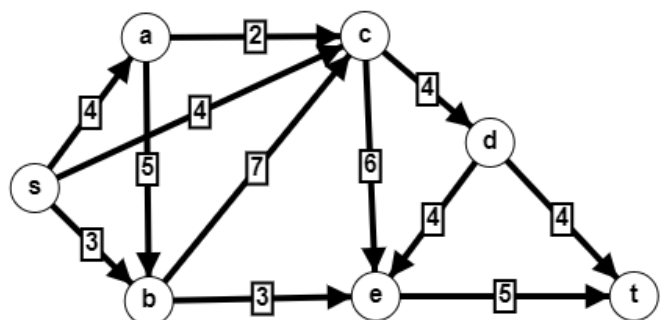


№	Разность длин путей	Общие дуги
1	12	$(s,a), (c,d), (d,e)$
2	12	$(s,a)$
3	11	$(b,c), (c,e)$
4	8	$(a,d), (e,t)$

Ответ: 2

Задание 5.

Определите кратчайший путь из  $s$  в  $t$  с помощью алгоритма Дейкстры. Какие вершины на последнем шаге имеют постоянные метки? Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи.

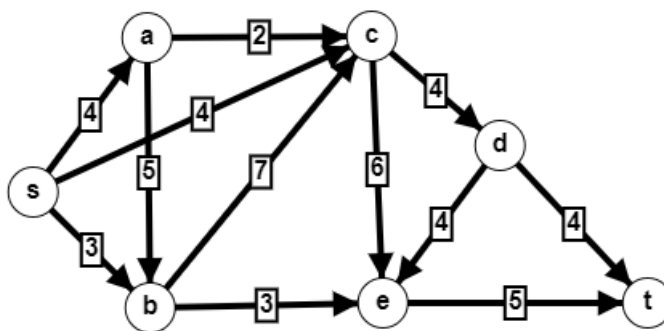


№	Длина пути	Кратчайший путь	Вершины с постоянными метками на последнем шаге
1	12	$s \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$	$s, c, d, t$
2	11	$s \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow t$	$s, b, e, t$
3	11	$s \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow t$	$s, a, b, c, d, e, t$
4	11	$s \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow t$	$s, b, c, e, t$

Ответ: 3

Задание 6.

Для графа, изображенного на рисунке, решается задача о нахождении величины максимального потока из  $s$  в  $t$  и соответствующего минимального разреза. Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи.

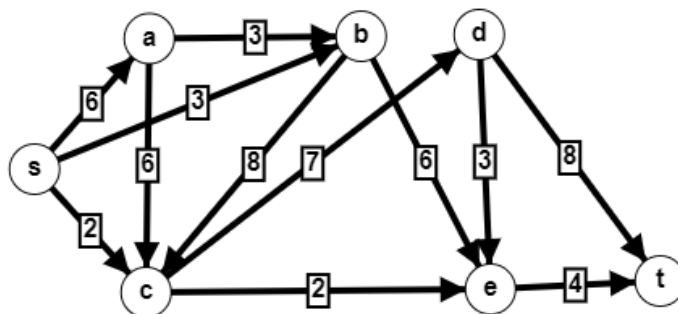


№	Величина максимального потока	Минимальный разрез
1	9	$\{(d, t), (e, t)\}$
2	16	$\{(s, c), (a, c), (b, c), (b, e)\}$
3	11	$\{(s, a), (s, c), (s, b)\}$
4	9	$\{(d, t), (d, e)\}$

Ответ: 1

Задание 7.

Для данного графа определите правильную (монотонную) нумерацию вершин (нумерация начинается с 1). Найти длину максимального (критического) пути из вершины  $s$  в вершины с четными номерами. Определите длину максимального пути из  $s$  в  $t$ . Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи.

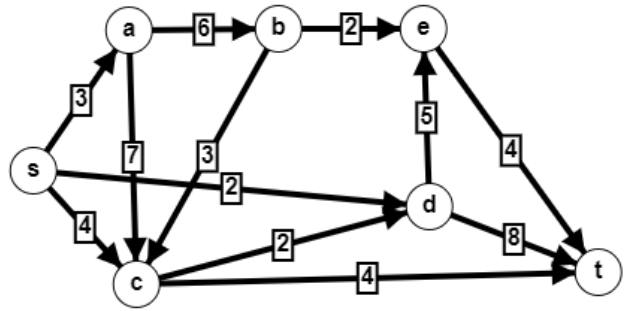


№	2	4	6	Длина максимального пути	Максимальный путь
1	2	11	25	32	$s \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow t$
2	6	13	21	26	$s \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow t$
3	6	17	27	32	$s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$
4	2	9	26	32	$s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$

Ответ: 3

Задание 8.

Для графа, изображенного на рисунке, решается задача о нахождении величины максимального потока из  $s$  в  $t$  и соответствующего минимального разреза. Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи.

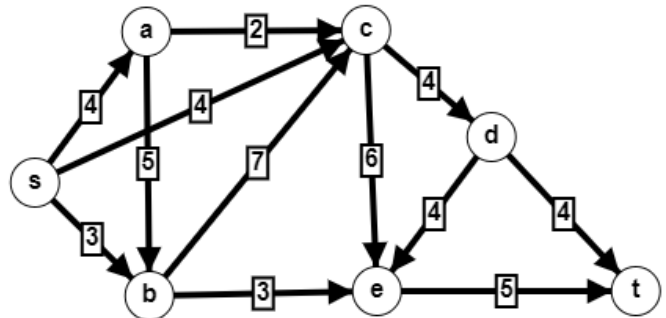


№	Величина максимального потока	Минимальный разрез
1	16	$\{(d,t), (e,t), (c,t)\}$
2	9	$\{(s,a), (a,b)\}$
3	9	$\{(s,a), (s,c), (s,d)\}$
4	13	$\{(d,t), (d,e)\}$

Ответ: 3

Задание 9.

Пусть задан взвешенный бесконтурный ориентированный граф. Укажите номер варианта, который соответствует правильному решению задачи нахождения величины кратчайшего пути из  $s$  в  $t$ .



Варианты решения	Длина пути	Кратчайший путь
1	11	$s \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$
2	11	$s \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow t$
3	12	$s \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$

Ответ: 2