

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей



А.В. Глушко
16.04.2024

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.17 Теория вероятностей

- 1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика**
- 2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление**
- 3. Квалификация выпускника: Бакалавр**
- 4. Форма обучения: Очная**
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета**
- 6. Составители программы: к.ф.-м.н., доц. Михайлова И.В., ст. пр. Баркова Л.Н.**
- 7. Рекомендована: НМС математического факультета, протокол № 0500-03 от 28.03.24**
- 8. Учебный год: 2026/ 2027 Семестр(ы): 5**

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели учебной дисциплины:

Целью курса является ознакомление слушателей со стохастическим подходом описания обширного класса реальных физических явлений, не укладывающихся в рамки детерминированных конструкций.

Задачи учебной дисциплины:

- изучение основных понятий, методов, приемов и средств работы с вероятностными объектами;
- приобретение навыков получения вероятностных оценок, прогнозирования, отбора оптимальных (наиболее вероятных) результатов анализа;
- формирование базовых знаний, умений и навыков для успешного (в т.ч. самостоятельного) освоения различных технологий и средств вероятностного анализа.

Основной задачей курса является изучение численных закономерностей в опытах, результаты которых не могут быть предсказаны однозначно до проведения испытаний.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Теория вероятностей» относится к Блоку 1 Обязательной части, т.е. является обязательной дисциплиной для изучения обучающимися.

Приступая к изучению данной дисциплины, студент должен иметь теоретическую и практическую подготовку по алгебре и началам анализа, по геометрии, т.е. владеть математическими знаниями, умениями и навыками, полученными в общеобразовательных учреждениях; кроме того, необходимы глубокие знания в одном из фундаментальных разделов математики – математическом анализе.

Дисциплина является предшествующей для курсов теории случайных процессов, математической статистики, стохастические дифференциальные уравнения

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1	Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними	<p>Знает: основные способы критического анализа и синтеза информации; сущность философского анализа явлений, базовые положения системного подхода, сущность проблемной ситуации в ее соотношении с понятиями «проблема», «задача», «противоречия», основы управления разрешением проблемных ситуаций;</p> <p>Умеет: применять основные способы критического анализа информации; применять системный подход для решения поставленных задач, выявлять проблемные ситуации, определять пути и средства их разрешения;</p> <p>Владеет: основными способами критического анализа информации; навыками критического анализа проблемной ситуации как системы, выявления ее составляющих и связей между ними, выбора путей и средств ее разрешения</p>

		УК-1.2	Используя логико-методологический инструментарий, критически оценивает надежность источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей предметной области	<p>Знать: методы критического анализа и оценки современных научных достижений, а также методы генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях; основное содержание философских понятий и категорий, этапы развития философии и ее разделы, основные классические и современные философские направления и концепции, базовые логические и научные методы (теоретические и эмпирические) исследования и философского осмысления мира, правила оценки надежности источников информации;</p> <p>Уметь: при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, исходя из наличных ресурсов и ограничений; анализировать классические и современные философские направления и концепции с опорой на понятийно-категориальный аппарат и логико-методологический инструментарий философии, критически оценивать надежность источников информации, использовать противоречивую информацию, содержащуюся в разных философских концепциях при решении проблемных ситуаций;</p> <p>Владеть навыками: критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях; навыками использования логико-методологического инструментария в процессе философского осмысления мира, критического анализа и оценки надежности источников информации, в том числе философских концепций, работы с противоречивой информацией из разных источников, определения возможностей применения положений классических и современных философских направлений и концепций для решения проблемных ситуаций</p>
ОПК-1	Способен применять	ОПК-1.1	Применяет базовые знания, полученные в	Знать: базовые знания, полученные в области математических и(или)

фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности		области математических и (или) естественных наук	естественных наук Уметь: использовать базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук Владеть навыками математического и статистического моделирования при построении моделей физических процессов и явлений и использовать их в профессиональной деятельности
	ОПК-1.2	Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Знать: методы решения задач в области математических и (или) естественных наук. Уметь оценивать и формулировать актуальные и значимые проблемы математики. Владеть: способностью оценивать и формулировать актуальные задачи профессиональной деятельности, принимать правильное решение на основе теоретических знаний
	ОПК-1.3.	Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: методы решения задач профессиональной деятельности. Уметь: анализировать и применять навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний. Владеть навыками решения задач профессиональной деятельности

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 4 / 144.

Форма промежуточной аттестации Экзамен – 5 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			5 семестр
Контактная работа		68	68
в том числе:	лекции	34	34
	практические	34	34
	лабораторные	-	-
	курсовая работа	-	-
Самостоятельная работа		40	40
Промежуточная аттестация		36	36
Итого:		144	144

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Случайный опыт. Вероятностное пространство	Случайный опыт. Свойство статистической устойчивости частот. Математическое описание случайного опыта. Общее вероятностное пространство (система аксиом Колмогорова) Конечное вероятностное пространство. Классическая схема.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11876
		Дискретное вероятностное пространство. Геометрическая модель. Свойства вероятностей случайных событий.	
1.2	Условная вероятность. Стохастическая независимость случайных событий. Независимые испытания	Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Стохастически независимые случайные события.	
		Надёжность электрических схем. Формула полной вероятности. Формула Байеса.	
		Стохастически независимые испытания. Схема Бернулли. Полиномиальная схема. Урновая схема.	
1.3	Случайные величины и векторы	Случайная величина: определение, примеры, распределение вероятностей случайной величины. Функция распределения случайной величины: определение, примеры, свойства. Выборочное вероятностное пространство.	
		Классификация случайных величин. Дискретные случайные величины (распределения): определение, примеры. Абсолютно непрерывные случайные величины (распределения): определение, примеры. Сингулярные случайные величины. Смеси.	
		Типовые абсолютно непрерывные распределения.	
		Типовые дискретные распределения и их связи	
		Случайный вектор: определение, примеры, распределение вероятностей случайного вектора, выборочное пространство. Функция распределения вероятностей случайного вектора: определение, примеры, свойства.	
		Классификация случайных векторов. Примеры дискретных и абсолютно непрерывных распределений. Маргинальные распределения.	
		Стохастическая независимость случайных величин: определение, критерии независимости случайных величин, примеры. Функция от случайного вектора.	
1.4	Числовые характеристики случайных величин и векторов	Математическое ожидание случайной величины: определение, свойства, примеры, математическое ожидание функции от случайного вектора.	
		Дисперсия случайной величины: определение, геометрический смысл, свойства, примеры. Моменты случайных величин.	
		Ковариационная матрица случайного вектора. Коэффициент корреляции. Многомерное	

		нормальное распределение.
1.5	Предельные теоремы	Характеристическая функция случайной величины: определение, свойства, примеры. Неравенства Маркова, Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли
		Следствия из закона больших чисел. Центральная предельная теорема
		Теорема Муавра-Лапласа. Применение теоремы Муавра-Лапласа
2. Практические занятия		
2.1	Случайный опыт. Вероятностное пространство	Случайный опыт. Свойство статистической устойчивости частот. Математическое описание случайного опыта. Общее вероятностное пространство (система аксиом Колмогорова) Конечное вероятностное пространство. Классическая схема.
		Дискретное вероятностное пространство. Геометрическая модель. Свойства вероятностей случайных событий.
2.2	Условная вероятность. Стохастическая независимость случайных событий. Независимые испытания	Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Стохастически независимые случайные события.
		Надёжность электрических схем. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
		Стохастически независимые испытания. Схема Бернулли. Полиномиальная схема. Урновая схема.
		Контрольная работа
2.3	Случайные величины и векторы	Случайная величина: определение, примеры, распределение вероятностей случайной величины. Функция распределения случайной величины: определение, примеры, свойства. Выборочное вероятностное пространство.
		Классификация случайных величин. Дискретные случайные величины (распределения): определение, примеры. Абсолютно непрерывные случайные величины (распределения): определение, примеры. Сингулярные случайные величины. Смеси.
		Типовые абсолютно непрерывные распределения.
		Типовые дискретные распределения и их связи
		Случайный вектор: определение, примеры, распределение вероятностей случайного вектора, выборочное пространство. Функция распределения вероятностей случайного вектора: определение, примеры, свойства.
		Классификация случайных векторов. Примеры дискретных и абсолютно непрерывных распределений. Маргинальные распределения.
		Стохастическая независимость случайных величин: определение, критерии независимости случайных величин, примеры. Функция от случайного вектора.
2.4	Числовые характеристики случайных величин и векторов	Математическое ожидание случайной величины: определение, свойства, примеры, математическое ожидание функции от случайного вектора.
		Дисперсия случайной величины: определение, геометрический смысл, свойства, примеры.

		Моменты случайных величин. Ковариационная матрица случайного вектора. Коэффициент корреляции. Многомерное нормальное распределение.
2.5	Предельные теоремы	Характеристическая функция случайной величины: определение, свойства, примеры. Неравенства Маркова, Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли Следствия из закона больших чисел. Центральная предельная теорема Теорема Муавра-Лапласа. Применение теоремы Муавра-Лапласа Контрольная работа

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Случайный опыт. Вероятностное пространство	4	4		8	16
2	Условная вероятность. Стохастическая независимость случайных событий. Независимые испытания	6	6		8	20
3	Случайные величины и векторы	12	12		9	33
4	Числовые характеристики случайных величин и векторов	6	6		8	20
5	Предельные теоремы	6	6		7	19
	Промежуточная аттестация – экзамен					36
	Итого:	36	36		36	144

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Теория вероятностей» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 36 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Теория вероятностей» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (контрольным работам и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

В течение семестра студенты сдают рефераты по разделам Теории вероятностей.

Примерные темы рефератов:

1. Задача о разделе ставки.
2. Вычисление определённых интегралов методом Монте-Карло.
3. Числовые характеристики случайных величин.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (5 семестр – экзамен).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

№ п/п	Источник
1	Буре, В. М. Теория вероятностей и вероятностные модели : учебник / В. М. Буре, Е. М. Парилина, А. А. Седаков. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 296 с. — ISBN 978-5-8114-3168-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/108328 (дата обращения: 21.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Зубков, А. М. Сборник задач по теории вероятностей : учебное пособие / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-0975-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167743 (дата обращения: 11.08.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3	Булинский, А. В. Теория случайных процессов : учебное пособие / А. В.

	Булинский, А. Н. Ширяев. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 400 с. — ISBN 978-5-9221-0335-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/59319 (дата обращения: 11.08.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
--	--

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
4	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
5	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
6	Михайлова И.В., Баркова Л.Н. <i>Стохастический анализ: учебно-методическое пособие / сост. И.В. Михайлова, Л.Н. Баркова. – Воронеж, 2014. – 39 с.</i> http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-4P9DHTImKx.pdf

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11876>).

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория: специализированная мебель.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Случайный опыт. Вероятностное пространство	УК-1	УК-1.1, УК-1.2	Домашние задания, контрольно-измерительные материалы к экзамену
2	Условная вероятность. Стохастическая независимость случайных событий. Независимые испытания	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашние задания, контрольная работа № 1, контрольно-измерительные материалы к экзамену
3	Случайные величины и векторы	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашние задания, контрольно-измерительные материалы к экзамену
4	Числовые характеристики случайных величин и векторов	УК-1, ОПК-1	УК-1.1, УК-1.2, ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашние задания, контрольно-измерительные материалы к экзамену
Промежуточная аттестация Форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашние задания:

По теме 1. Случайный опыт. Вероятностное пространство

Михайлова И.В., Баркова Л.Н. Стохастический анализ: учебно-методическое пособие / сост. И.В. Михайлова, Л.Н. Баркова. – Воронеж, 2014. – 39 с.

Задания №№ 1-7 стр.5

По теме 2. Условная вероятность. Стохастическая независимость случайных событий.

Независимые испытания

Михайлова И.В., Баркова Л.Н. Стохастический анализ: учебно-методическое пособие / сост. И.В. Михайлова, Л.Н. Баркова. – Воронеж, 2014. – 39 с.

Задания №№ 1-5, 8-9, 10, 12 стр. 13-14

По теме 3. Случайные величины и векторы

Михайлова И.В., Баркова Л.Н. Стохастический анализ: учебно-методическое пособие / сост. И.В. Михайлова, Л.Н. Баркова. – Воронеж, 2014. – 39 с.

Задания №№ 1-5, 8, 10, 12 стр.22-23

По теме 4. Числовые характеристики случайных величин и векторов

Михайлова И.В., Баркова Л.Н. Стохастический анализ: учебно-методическое пособие / сост. И.В. Михайлова, Л.Н. Баркова. – Воронеж, 2014. – 39 с.

Задания №№ 1-5 стр. 24-25

По теме 5. Предельные теоремы

Михайлова И.В., Баркова Л.Н. Стохастический анализ: учебно-методическое пособие / сост. И.В. Михайлова, Л.Н. Баркова. – Воронеж, 2014. – 39 с.

Задания №№ 1-6 стр. 30-31

Примеры задач контрольных работ:

Контрольная работа № 1

1. Найти вероятность того, что кость, наудачу извлеченная из полного набора домино, не содержит числа 5

2. Студент знает ответ на 20 теоретических вопросов из 30 и сможет решить 30 задач из 50. Определить вероятность того, что студент полностью ответит на билет, который состоит из двух теоретических вопросов и трех задач

3. На складе имеется 20 телефонных аппаратов корейского производства и 30 – немецкого. В среднем 5% корейских аппаратов и 2% немецких имеют брак. 1) Найти вероятность того, что случайно выбранный аппарат бракованный. 2) Случайно выбранный аппарат бракованный. С какой вероятностью этот аппарат был немецким?

Контрольная работа № 2

1. Производятся последовательные испытания четырех приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,9. Составьте таблицу распределения случайной величины X , равной числу испытанных приборов.

2. Найти p , функцию распределения, MX и DX , если задан ряд распределения

x_i	-1	0	1	2	3
-------	----	---	---	---	---

p_i	0,2	0,1	p	0,3	0,2
-------	-----	-----	-----	-----	-----

3. Найти $F(x, y)$, математическое ожидание, ковариационную матрицу и проверить стохастическую независимость координат случайного вектора (x, y) , если

y_i	1	9	13
x_i			
2	0,15	0,05	0,05
10	0,25	0,15	0,35

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, контрольные работы.

Задание для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены *на оценивание*:

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных заданий и домашних работ, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях.

Формы, методы и периодичность текущего контроля определяет преподаватель.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Описание технологии проведения

Контрольные работы проводятся письменно.

Требование к выполнению заданий

Контрольная работа

За контрольную работу ставится оценка «зачтено» в случае, если обучающийся выполнил:

- правильно в полном объеме все задания контрольной работы, показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающийся выполнил все задания с небольшими неточностями и показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающийся выполнил половину из предложенных заданий правильно, остальные с существенными неточностями и показал удовлетворительное владение навыками полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала.

В остальных случаях обучающемуся ставится за контрольную работу «незачтено».

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория вероятностей» проводится в форме экзамена.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра и завершает изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На экзамене оценивается уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Описание технологии проведения

На экзамене студент вытягивает билет, который содержит два теоретических вопроса и один практический. Все вопросы и задачи, входящие в билеты, охватывают весь материал, изучаемый за весь семестр.

Вопросы к экзамену:

1. Случайный опыт. Свойство статистической устойчивости частот. Математическое описание случайного опыта. Общее вероятностное пространство (система аксиом Колмогорова)
2. Конечное вероятностное пространство. Классическая схема.
3. Дискретное вероятностное пространство. Геометрическая модель.
4. Свойства вероятностей случайных событий.
5. Условные вероятности.
6. Теорема умножения вероятностей.
7. Стохастически независимые случайные события.
8. Надёжность электрических схем.
9. Формула полной вероятности.
10. Формула Байеса.
11. Стохастически независимые испытания.
12. Схема Бернулли.
13. Полиномиальная схема.
14. Урновая схема.

15. Случайная величина: определение, примеры, распределение вероятностей случайной величины.
16. Функция распределения случайной величины: определение, примеры, свойства. Выборочное вероятностное пространство.
17. Классификация случайных величин.
18. Дискретные случайные величины (распределения): определение, примеры.
19. Абсолютно непрерывные случайные величины (распределения): определение, примеры.
20. Типовые абсолютно непрерывные распределения.
21. Типовые дискретные распределения и их связи.
22. Случайный вектор: определение, примеры, распределение вероятностей случайного вектора, выборочное пространство.
23. Функция распределения вероятностей случайного вектора: определение, примеры, свойства.
24. Классификация случайных векторов.
25. Маргинальные распределения.
26. Стохастическая независимость случайных величин: определение, критерии независимости случайных величин, примеры.
27. Функция от случайного вектора.
28. Математическое ожидание случайной величины: определение, свойства, примеры, математическое ожидание функции от случайного вектора.
29. Дисперсия случайной величины: определение, геометрический смысл, свойства, примеры.
30. Моменты случайных величин.
31. Ковариационная матрица случайного вектора.
32. Коэффициент корреляции.
33. Характеристическая функция случайной величины: определение, свойства, примеры.
34. Неравенства Маркова, Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли
35. Следствия из закона больших чисел. Центральная предельная теорема
36. Теорема Муавра-Лапласа. Применение теоремы Муавра-Лапласа

Требование к выполнению заданий

Критерии выставления оценок:

Оценки	Критерии
Отлично	обучающийся показывает высокий интеллектуальный и общекультурный уровень, глубокое и всестороннее знание предмета, на все вопросы билета даны правильные исчерпывающие ответы, приведены доказательства обучающийся аргументировано и логично излагает материал, правильно решает все предложенные практические задания; дополнительные вопросы не вызывают затруднений

Хорошо	обучающийся показывает свой интеллектуальный и общекультурный уровень, твердо знает предмет учебной дисциплины, логично излагает изученный материал, умеет применять теоретические знания для решения практических задания, на вопросы билеты получены полные и верные ответы, приведено доказательство, но есть небольшие неточности в формулировках и затруднения при ответе на дополнительные вопросы
Удовлетворительно	обучающийся показывает свой общекультурный уровень, в основном знает предмет учебной дисциплины, знает основные определения и термины, имеет определенные знания предмета, практические задания решить не может, также не может привести доказательства.
Неудовлетворительно	степень освоения учебной дисциплины обучаемым не соответствует критериям, предъявляемым к оценке «удовлетворительно»

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1) Задания открытого типа (число)

1. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

Значения x_i	-2	x_2	0	1
Вероятности p_i	0,1	0,5	0,25	0,15

Найти значение x_2 , если $M(X) = -0,55$. (правильный ответ: 2 балла)

Решение.

Запишем выражение для математического ожидания

$$M(X) = -2 * 0,1 + x_2 * 0,5 + 0 * 0,25 + 1 * 0,15 = -0,55.$$

Тогда $x_2 = -1$.

Ответ: -1

2. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

Значения x_i	x_1	2	3	4
Вероятности p_i	0,25	0,1	0,25	0,4

Найти значение x_1 , если $M(X) = 2,8$. (правильный ответ: 2 балла)

Решение.

Запишем выражение для математического ожидания

$$M(X) = 0,25 * x_1 + 2 * 0,1 + 3 * 0,25 + 4 * 0,4 = 2,8.$$

Тогда $x_1 = 1$.

Ответ: 1

3. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

Значения x_i	-1	0	x_3	2
Вероятности p_i	0,15	0,25	0,1	0,5

Найти значение x_3 , если $M(X) = 0,95$. (правильный ответ: 2 балла)

Решение.

Запишем выражение для математического ожидания

$$M(X) = -1 * 0,15 + 0 * 0,25 + x_3 * 0,1 + 2 * 0,5 = 0,95.$$

Тогда $x_3 = 1$.

Ответ: 1

4. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

Значения x_i	0	1	2	x_4
Вероятности p_i	0,5	0,25	0,15	0,1

Найти значение x_4 , если $M(X) = 0,85$. (правильный ответ: 2 балла)

Решение.

Запишем выражение для математического ожидания

$$M(X) = 0 * 0,5 + 1 * 0,25 + 2 * 0,15 + x_4 * 0,1 = 0,85.$$

Тогда

$$x_4 = 3.$$

Ответ: 3

5. Задан закон распределения дискретной двумерной с.в. (X, Y) в виде таблицы:

$Y \backslash X$	3	5
-2	0,15	0,17
2	0,23	0,45

Известны среднеквадратические отклонения $\sigma_x = 1,87$, $\sigma_y = 0,97$.

Коэффициент корреляции случайных величин X и Y равен... (ответ округлите до тысячных) (правильный ответ: 2 балла)

Решение.

Коэффициент корреляции случайных величин X и Y вычисляется по формуле:

$$r_{XY} = \frac{K_{xy}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

где $K_{xy}(x,y) = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY$.

$$K_{xy}(x,y) = -2 \cdot 3 \cdot 0,15 - 2 \cdot 5 \cdot 0,17 + 2 \cdot 3 \cdot 0,23 + 2 \cdot 5 \cdot 0,45 - (-2 \cdot 0,15 - 2 \cdot 0,17 + 2 \cdot 0,23 + 2 \cdot 0,45) \times (3 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,23 + 5 \cdot 0,17 + 5 \cdot 0,45) = -0,9 - 1,7 + 1,38 + 4,5 - 0,72 \cdot 4,34 = -2,6 + 5,88 - 3,0528 = 0,2272$$

Поэтому

$$r_{XY} = \frac{0,2272}{1,87 \cdot 0,97} = 0,181$$

Ответ: 0,181

2) Задачи на соответствие

6. Установите соответствие между функцией плотности распределения вероятностей непрерывной с. в. X и значениями ее математического ожидания и дисперсии

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [1; 4] \\ 0, & x \notin [1; 4] \end{cases}$	$M(X) = 1,5, \quad D(X) = 0,75$
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-2; 2] \\ 0, & x \notin [-2; 2] \end{cases}$	$M(X) = 0, \quad D(X) = \frac{4}{3}$
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x \in [1; 6] \\ 0, & x \notin [1; 6] \end{cases}$	$M(X) = 3,5, \quad D(X) = \frac{25}{12}$
	$M(X) = 1,5, \quad D(X) = \frac{5}{12}$

Решение.

1) С. в. X равномерно распределена на отрезке $[1; 4]$: $a = 1, b = 4$.

$$M(X) = \frac{b+a}{2} = 2,5;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{3^2}{12} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

2) С. в. X равномерно распределена на отрезке $[-2; 2]$: $a = -2, b = 2$.

$$M(X) = \frac{b+a}{2} = 0;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

3) С. в. X равномерно распределена на отрезке $[1; 6]$: $a = 1; b = 6$.

$$M(X) = \frac{b+a}{2} = 3,5;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{5^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

7. Установите соответствие между функцией плотности распределения вероятностей непрерывной с. в. X и значениями ее математического ожидания и дисперсии

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x \in [-1; 4] \\ 0, & x \notin [-1; 4] \end{cases}$	$M(X) = 1,5, \quad D(X) = \frac{25}{12}$
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [2; 4] \\ 0, & x \notin [2; 4] \end{cases}$	$M(X) = 3, \quad D(X) = \frac{1}{3}$
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & x \in [-1; 6] \\ 0, & x \notin [-1; 6] \end{cases}$	$M(X) = 2,5, \quad D(X) = \frac{49}{12}$
	$M(X) = 8, \quad D(X) = -3,5$

Решение.

1) С. в. X равномерно распределена на отрезке $[-1; 4]$: $a = -1, b = 4$.

$$M(X) = \frac{b+a}{2} = 1,5;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{5^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

2) С. в. X равномерно распределена на отрезке $[2; 4]$: $a = 2, b = 4$.

$$M(X) = \frac{b+a}{2} = 3;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

3) С. в. X равномерно распределена на отрезке $[-1; 6]$: $a = -1; b = 6$.

$$M(X) = \frac{b+a}{2} = 2,5;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{49}{12}.$$

8. Установите соответствие между функцией плотности распределения вероятностей непрерывной с. в. X и значениями ее математического ожидания и дисперсии

$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$M(X) = 1, \quad D(X) = 1$
$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$M(X) = \frac{1}{2}, \quad D(X) = \frac{1}{4}$
$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$M(X) = \frac{1}{3}, \quad D(X) = \frac{1}{9}$
	$M(X) = 2, \quad D(X) = \frac{1}{2}$

Решение.

1) С. в. X имеет показательное распределение с параметром $a = 1$.

$$M(X) = \frac{1}{a} = 1;$$

$$D(X) = \frac{1}{a^2} = 1.$$

2) С. в. X имеет показательное распределение с параметром $a = 2$.

$$M(X) = \frac{1}{a} = \frac{1}{2};$$

$$D(X) = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4}.$$

3) С. в. X имеет показательное распределение с параметром $a = 3$.

$$M(X) = \frac{1}{a} = \frac{1}{3};$$

$$D(X) = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{9}.$$

9. Установите соответствие между функцией плотности распределения вероятностей непрерывной с. в. X и значениями ее математического ожидания и дисперсии

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$M(X) = 2, \quad D(X) = 4$
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$M(X) = 3, \quad D(X) = 9$
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$M(X) = 5, \quad D(X) = 25$
	$M(X) = 1, \quad D(X) = \frac{1}{2}$

Решение.

1) С. в. X имеет показательное распределение с параметром $a = \frac{1}{2}$.

$$M(X) = \frac{1}{a} = 2;$$

$$D(X) = \frac{1}{a^2} = 4.$$

2) С. в. X имеет показательное распределение с параметром $a = \frac{1}{3}$.

$$M(X) = \frac{1}{a} = 3;$$

$$D(X) = \frac{1}{a^2} = 9.$$

3) С. в. X имеет показательное распределение с параметром $a = \frac{1}{5}$.

$$M(X) = \frac{1}{a} = 5;$$

$$D(X) = \frac{1}{a^2} = 25.$$

10. Установите соответствие между функцией распределения непрерывной случайной величины X и ее плотностью распределения:

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{x^2}{10} - \frac{1}{3}, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & x \in [2,3] \\ 0, & x \notin [2,3] \end{cases}$
$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{x^2}{6} - \frac{1}{3}x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}, & x \in [2,3] \\ 0, & x \notin [2,3] \end{cases}$
$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}x^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x, & x \in [2,3] \\ 0, & x \notin [2,3] \end{cases}$
	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \in [2,3] \\ 0, & x \notin [2,3] \end{cases}$

Решение.

Воспользуемся тем, что $f_X(x) = F'_X(x)$. Имеем

$$1) f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [2,3] \\ \frac{1}{5}x, & x \in [2,3] \end{cases}$$

$$2) f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [2,3] \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}, & x \in [2,3] \end{cases}$$

$$3) f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС

1) Задания открытого типа (число)

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задачи на соответствие

- (2 балла – все соответствия определены верно;

- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).