МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой ВМ и ПИТ
_____________ *Леденева Т.М.*
23.03.2024

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.12 Линейная алгебра

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

2. Профиль подготовки/специализация:
Проектирование и разработка информационных систем

3. Квалификация выпускника:
бакалавр

4. Форма обучения:
очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:
кафедра вычислительной математики и прикладных информационных технологий

6. Составители программы:
Глушакова Т.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры ВМ и ПИТ
Лазарев К.П., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры ВМ и ПИТ
Медведева О.А., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры ВМ и ПИТ

7. Рекомендована:
научно-методическим советом факультета ПММ 22.03.2024, протокол №5.

8. Учебный год: 2024/2025 **Семестр(ы):** 1,2

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цель изучения дисциплины «Линейная алгебра» – сформировать у обучающихся комплекс знаний по основным разделам линейной алгебры, образующих теоретическую основу для формализации прикладных задач и выбора методов их решения с использованием данного математического аппарата.

Задача данного курса – изучение основных разделов линейной алгебры; ознакомление с алгебраическими методами и теоремами при решении прикладных задач; ознакомление с примерами прикладных задач, для формализации которых используется математический аппарат линейной алгебры; формирование у обучающихся навыков формализации прикладной задачи с использованием математического аппарата линейной алгебры и выбора методов для ее решения.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Линейная алгебра» входит в блок Б1 обязательной части программы бакалавриата и изучается в 1 и 2 семестрах. Данный курс непосредственно связан с дисциплинами «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Языки и системы программирования».

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Решает типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, сформулированных в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук	Знать: основные методы и подходы к решению задач линейной алгебры Уметь: применять их на практике Владеть: навыками решения задач линейной алгебры
		ОПК-1.2	Применяет системный подход и математические методы для формализации решения прикладных задач	Знать: основные подходы к решению задач линейной алгебры Уметь: применяет системный подход и математические методы линейной алгебры при решении прикладных задач. Владеть: навыками подбора подходящего математического метода для решения поставленной задачи линейной алгебры

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах (*в соответствии с учебным планом)* – 8/288.

Форма промежуточной аттестации *экзамен.*

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			1 семестр	2 семестр
Контактная работа		128	64	64
в том числе:	лекции	64	32	32
	практические	64	32	32
	лабораторные	0	0	0
	курсовая работа	0	0	0
Самостоятельная работа		88	44	44
Промежуточная аттестация *(для экзамена)*		72	36	36

Итого:	288	144	144

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Роль и место алгебры в системе математического образования	Предмет дисциплины «Алгебра». Исторические сведения о развитии этого раздела математики. Роль и место алгебры в системе математического образования	Линейная алгебра (МОАИС)
1.2	Множества. Отображения. Отношения	Множества. Операции над множествами. Отображения. Свойства отображений. Отношения. Упорядоченные множества	Линейная алгебра (МОАИС)
1.3	Группы, кольца, поля	Группы, кольца, поля	
1.4	Матрицы и определители	Матрицы. Операции над матрицами и их свойства. Многочлены от матриц. Перестановки и их свойства. Определитель. Миноры. Алгебраические дополнения. Свойства и вычисление определителей. Определитель Вандермонда. Теорема Лапласа. Определитель ступенчатой матрицы. Определитель произведения матриц. Обратная матрица (определение, нахождение, свойства).	Линейная алгебра (МОАИС)
1.5	Системы линейных алгебраических уравнений	Решение матричных уравнений. Правило Крамера. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы. Сохранение ранга при элементарных преобразованиях матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса и LU-разложение. Фундаментальная система решений систем линейных однородных уравнений	Линейная алгебра (МОАИС)
1.6	Комплексные числа	Комплексные числа и операции над ними	Линейная алгебра (МОАИС)
1.7	Многочлены	Многочлены и операции над ними. Делители. Наибольший общий делитель двух многочленов. Отделение кратных корней. Алгоритм Евклида. Схема Горнера	Линейная алгебра (МОАИС)
1.8	Основная теорема алгебры	Основная теорема алгебры и следствия из нее. Разложение многочлена на неприводимые множители. Вычисление корней. Теорема Виета. Интерполяционная формула Лагранжа. Многочлены с действительными коэффициентами. Разложение рациональной функции на сумму многочлена и правильной дроби. Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей	Линейная алгебра (МОАИС)
1.9	Линейные пространства	Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, координаты. Размерность линейного пространства. Преобразование координат вектора при изменении базиса. Изоморфизм линейных пространств. Линейные подпространства. Линейные оболочки. Понятие аффинного пространства. Сумма и пересечение линейных подпространств. Прямая сумма. Выпуклые множества. Прямое дополнение и декартово произведение конечномерных пространств	Линейная алгебра (МОАИС)

1.10	Евклидовы и унитарные пространства	Евклидовы и унитарные пространства. Простейшие свойства. Неравенство Коши – Буняковского. Норма вектора. Теорема Пифагора. Тождество параллелограмма. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грамма – Шмидта. Ортогональное дополнение. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Матрица и определитель Грамма. Объем параллелепипеда. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Расстояние до подпространства. Расстояние до многообразия	Линейная алгебра (МОАИС)
1.11	Линейные преобразования	Линейные операторы и преобразования в линейных пространствах. Матрица линейного оператора. Линейное выражение координат образа вектора. Изменение матрицы при изменении базиса. Образ и ядро линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Операции сложения, умножения на число и умножения операторов. Обратный оператор. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Диагональный вид матрицы оператора. Понятие о жордановой форме матрицы. Теорема Жордана. Теорема Гамильтона – Кэли. Сопряженные и самосопряженные операторы в евклидовых и унитарных пространствах. Нормальные, ортогональные и унитарные операторы в евклидовых и унитарных пространствах	Линейная алгебра (МОАИС)
1.12	Линейные, билинейные и квадратичные формы	Линейные, билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Общий вид. Матрица формы. Преобразование матрицы при изменении базиса. Ранг формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод Якоби. Эквивалентность форм. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенность квадратичных форм. Критерии положительной и отрицательной определенности квадратичной формы. Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием в евклидовом пространстве	Линейная алгебра (МОАИС)
1.13	Гиперповерхности второго порядка	Гиперповерхности второго порядка	Линейная алгебра (МОАИС)
1.14	Алгебры	Алгебры. Подалгебры. Идеалы. Примеры. Свойства. Морфизмы алгебр. Конечномерные алгебры и их представления	Линейная алгебра (МОАИС)
2. Практические занятия			
2.1	Множества. Отображения. Отношения	Множества. Операции над множествами. Отображения. Свойства отображений. Отношения. Упорядоченные множества	Линейная алгебра (МОАИС)
2.2	Группы, кольца, поля	Группы, кольца, поля	Линейная алгебра (МОАИС)
2.3	Матрицы и определители	Матрицы. Операции над матрицами и их свойства. Многочлены от матриц. Перестановки и их свойства. Определитель. Миноры. Алгебраические дополнения. Свойства и вычисление определителей. Определитель Вандермонда. Теорема Лапласа. Определитель ступенчатой матрицы. Определитель произведения матриц. Обратная матрица (определение, нахождение, свойства).	Линейная алгебра (МОАИС)

2.4	Системы линейных алгебраических уравнений	Решение матричных уравнений. Правило Крамера. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы. Сохранение ранга при элементарных преобразованиях матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса и LU-разложение. Фундаментальная система решений систем линейных однородных уравнений	Линейная алгебра (МОАИС)
2.5	Комплексные числа	Комплексные числа и операции над ними	Линейная алгебра (МОАИС)
2.6	Многочлены	Многочлены и операции над ними. Делители. Наибольший общий делитель двух многочленов. Отделение кратных корней. Алгоритм Евклида. Схема Горнера	Линейная алгебра (МОАИС)
2.7	Основная теорема алгебры	Основная теорема алгебры и следствия из нее. Разложение многочлена на неприводимые множители. Вычисление корней. Теорема Виета. Интерполяционная формула Лагранжа. Многочлены с действительными коэффициентами. Разложение рациональной функции на сумму многочлена и правильной дроби. Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей.	Линейная алгебра (МОАИС)
2.8	Линейные пространства	Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, координаты. Размерность линейного пространства. Преобразование координат вектора при изменении базиса. Изоморфизм линейных пространств. Линейные подпространства. Линейные оболочки. Понятие аффинного пространства. Сумма и пересечение линейных подпространств. Прямая сумма. Выпуклые множества. Прямое дополнение и декартово произведение конечномерных пространств	Линейная алгебра (МОАИС)
2.9	Евклидовы и унитарные пространства	Евклидовы и унитарные пространства. Простейшие свойства. Неравенство Коши – Буняковского. Норма вектора. Теорема Пифагора. Тождество параллелограмма. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грамма – Шмидта. Ортогональное дополнение. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Матрица и определитель Грамма. Объем параллелепипеда. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Расстояние до подпространства. Расстояние до многообразия	Линейная алгебра (МОАИС)
2.10	Линейные преобразования	Линейные операторы и преобразования в линейных пространствах. Матрица линейного оператора. Линейное выражение координат образа вектора. Изменение матрицы при изменении базиса. Образ и ядро линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Операции сложения, умножения на число и умножения операторов. Обратный оператор. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Диагональный вид матрицы оператора. Понятие о жордановой форме матрицы. Теорема Жордана. Теорема Гамильтона – Кэли. Сопряженные и самосопряженные операторы в евклидовых и унитарных пространствах. Нормальные, ортогональные и унитарные операторы в евклидовых и унитарных пространствах	Линейная алгебра (МОАИС)
2.11	Линейные, билинейные и квадратичные формы	Линейные, билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Общий вид. Матрица формы. Преобразование матрицы при изменении базиса. Ранг формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод Якоби. Эквивалентность форм. Закон инерции	Линейная алгебра (МОАИС)

		квадратичных форм. Знакоопределенность квадратичных форм. Критерии положительной и отрицательной определенности квадратичной формы. Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием в евклидовом пространстве	
2.12	Гиперповерхности второго порядка	Гиперповерхности второго порядка	Линейная алгебра (МОАИС)
2.13	Алгебры	Алгебры. Подалгебры. Идеалы. Примеры. Свойства. Морфизмы алгебр. Конечномерные алгебры и их представления	Линейная алгебра (МОАИС)

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Роль и место алгебры в системе математического образования	1	0	0	0	**1**
2	Множества. Отображения. Отношения	1	1	0	2	**4**
3	Комплексные числа	4	3	0	4	**11**
4	Многочлены	4	4	0	6	**14**
5	Основная теорема алгебры	2	2	0	4	**8**
6	Группы, кольца, поля	2	2	0	4	**8**
7	Матрицы и определители	6	6	0	8	**24**
8	Системы линейных алгебраических уравнений	6	8	0	8	**26**
9	Линейные пространства	6	6	0	8	**22**
10	Евклидовы и унитарные пространства	10	10	0	12	**26**
11	Линейные преобразования	12	12	0	14	**42**
12	Линейные, билинейные и квадратичные формы	8	8	0	14	**24**
13	Гиперповерхности второго порядка	1	1	0	2	**3**
14	Алгебры	1	1	0	2	**3**
	Итого:	**64**	**64**	**0**	**88**	**216**

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: указание наиболее сложных разделов, работа с конспектами лекций, презентационным материалом, рекомендации по выполнению курсовой работы, по организации самостоятельной работы по дисциплине и др.)

<u>Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины</u>

Аудиторные и внеаудиторные (самостоятельные) формы учебной работы студента имеют своей целью приобретение им целостной системы знаний по дисциплине «Линейная алгебра». Используя лекционный материал, учебники, дополнительную литературу, проявляя творческий подход, студент готовится к практическим занятиям, рассматривая их как дополнение, углубление, систематизацию своих теоретических знаний. Студент должен прийти в ВУЗ с пониманием того, что самостоятельное овладение знаниями является неотъемлемой частью образовательного процесса.

Изучение каждой темы следует начинать с перечня изучаемых вопросов. Они ориентируют студента, показывают, что он должен знать по данной тематике. Вопросы темы как бы накладываются на соответствующую главу избранного учебника или учебного пособия. В итоге должно быть ясным, какие разделы программы учебного курса и с какой глубиной раскрыты в данном учебном материале.

Освоение дисциплины предполагает следующие направления работы:

- изучение понятийного аппарата дисциплины;
- изучение тем самостоятельной подготовки по учебно-тематическому плану;
- работу над основной и дополнительной литературой;
- изучение вопросов для самоконтроля (самопроверки);
- самоподготовка к практическим и другим видам занятий;
- самостоятельная работа студента при подготовке к экзамену;
- самостоятельная работа студента в библиотеке;
- изучение сайтов по темам дисциплины в сети Интернет.

Проработка лекционного курса является одной из важных активных форм самостоятельной работы. Лекция преподавателя не является озвученным учебником, а представляет плод его индивидуального творчества. Он читает свой авторский курс со своей логикой, со своими теоретическими и методическими подходами. Это делает лекционный курс конкретного преподавателя индивидуально-личностным событием, которым вряд ли студенту стоит пренебрегать. Кроме того, в своих лекциях преподаватель стремится преодолеть многие недостатки, присущие опубликованным учебникам, учебным пособиям, лекционным курсам.

В создании своего авторского лекционного курса преподаватель руководствуется двумя документами – Федеральным государственным образовательным стандартом и учебной программой. Совершенно недостаточно только слушать лекции. Студенту важно понять, что лекция есть своеобразная творческая форма самостоятельной работы. Надо пытаться стать активным соучастником лекции: думать, сравнивать известное с вновь получаемыми знаниями, войти в логику изложения материала лектором, по возможности вступать с ним в мысленную полемику. Во время лекции можно задать лектору вопрос. Вопросы можно задать и во время перерыва (письменно или устно), а также после лекции или перед началом очередной. Лектор найдет формы и способы реагирования на вопросы студентов.

Процесс освоения учебной дисциплины в течение закреплённого учебным планом периода подвергается текущему контролю, который осуществляется в следующих формах: фиксация посещения занятий, проводимых как в очном, так и дистанционном формате; проверка выполнения практических заданий; выполнение и проверка контрольных работ.

Методологические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Методологические рекомендации призваны помочь студентам организовать самостоятельную работу при изучении курса: с материалами лекций и семинарских занятий, литературы по общим и специальным вопросам. Самостоятельная работа студента должна опираться на сформированные навыки и умения, приобретенные во время обучения в средней школе. В ВУЗе студент должен повысить уровень самостоятельности. Составляющей компонентой его работы должно стать творчество. Работая с литературой по теме занятий, нужно делать выписки текста, содержащего характеристику или комментарии уже знакомого Вам источника. Умение работать с литературой означает научиться осмысленно пользоваться источниками. Прежде чем приступить к освоению научной литературы, рекомендуется чтение учебников и учебных пособий.

Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения. Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей. Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развернутый план, тезисы, цитаты, конспект.

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

При подготовке к экзамену следует в полной мере использовать лекционный материал и академический курс учебника, рекомендованного преподавателем.

Промежуточная аттестация проводится в очном или дистанционном формате в форме экзамена по билетам, каждый из которых содержит вопросы, оценивающие уровень сформированности всех заявленных дисциплинарных компетенций. Итоговая оценка по дисциплине определяется на основе оценок, полученных в ходе текущего контроля, а также результатов ответа на вопросы экзаменационного билета.

Методические рекомендации по работе в дистанционном формате

В настоящее время актуальным становится использование электронной информационно-образовательной среды Воронежского государственного университета, реализованной в виртуальной обучающей среде Moodle. Наиболее оптимальным является обучение в формате видеоконференции с презентацией, для чего необходим заранее подготовленный преподавателем материал (хотя бы частично), с дополнительным использованием web-камеры для более детального объяснения сложных моментов. Один из немногих положительных моментов такого обучения – просмотр занятий в записи.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения студент должен выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	*Ильин В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. — Москва : Проспект : Изд-во Моск. ун-та, 2015. — 393 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=251656*
2	*Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 22-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 432 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/152647*
3	*Курош А. Г. Лекции по общей алгебре Курс высшей алгебры : учебник / А. Г. Курош. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 556 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/104951*
4	*Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 476 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/152434*

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	*Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для студентов вузов / Д. В. Беклемишев. – Москва : Физматлит, 2007. – 307 с.*
6	*Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Физматлит, 2005. – 278 с.*
7	*Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры : учебник для студентов университетов / А. И. Кострикин. – Москва : Физматлит,2009. – 271 с.*

8	*Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра : учебник для студентов университетов / А. И. Кострикин. – Москва : Физматлит, 2009. – 367 с.*
9	*Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для студентов физико-математических специальностей вузов / И. В. Проскуряков. – Москва : Лаборатория базовых знаний, 2003. – 382 с.*
10	*Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике : учебное пособие для студ. втузов / А.Д. Мышкис .— Изд. 4-е, стереотип. — Москва : Наука, 1973 .— 640 с.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)**:**

№ п/п	Ресурс
15	*www.lib.vsu.ru – Зональная научная библиотека ВГУ*
16	*Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре : учебное пособие / Д. К. Фаддеев. – Санкт-Петербург : Лань, 2019. – 416 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/115199*
17	*Фаддеев, Д. К. Задачи по высшей алгебре : учебник / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. — 17-е изд.,стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 288 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/167703*
18	*Задачи по линейной алгебре : учебно-методическое пособие. Часть 1. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений / Е. М. Аристова, К. П. Лазарев. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2018. – Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-256.pdf*
19	*Бондаренко Ю. В. Линейная алгебра: алгебра матриц и системы линейных уравнений : учебное пособие / Ю. В. Бондаренко, К. В. Чудинова. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2018. – Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-160.pdf*
20	*Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений : учебно-методическое пособие для вузов / К. П. Лазарев. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012. – 74 с. – Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-20.pdf*
21	*Руководство к решению задач по алгебре: учебное пособие для вузов / Т.Н. Глушакова, И.Б. Крыжко .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010 . Режим доступа http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m10-142.pdf.*
22	*Руководство к решению задач по алгебре: учебное пособие для вузов / Т.Н. Глушакова, И.Б. Крыжко .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010 . Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m10-143.pdf.*
23	*Функции от матриц [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов : / Т.Н. Глушакова , К.П. Лазарев .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-234.pdf.*
24	*Евклидовы и унитарные пространства [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов / Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев, Ю.В. Бондаренко ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-251.pdf.*
25	*Билинейная и квадратичная формы [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов / Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016 Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m16-13.pdf.*
26	*Линейная алгебра (МОАИС)/ К. П. Лазарев. –– Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». –– Режим доступа: https://edu.moodle.ru.*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

Самостоятельная работа обучающегося должна включать подготовку к практическим занятиям, выполнение домашних заданий. Для этого рекомендуется освоить теоретический материал соответствующих тем по конспектам лекций и презентационному материалу, размещенному на ЭО ресурсах, литературу из представленного ниже перечня, материалы с тематических ресурсов сети Интернет.

№ п/п	Источник
1	*Задачи по линейной алгебре : учебно-методическое пособие. Часть 1. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений / Е. М. Аристова, К. П. Лазарев. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2018. – Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-256.pdf*

2	*Методические указания для решения задач по курсу "Алгебра" (Линейные пространства): Для студентов 1-го курса дневн. и вечерн. отделений / Сост. Ю.В.Бондаренко, Т.Н.Глушакова, Е.С.Тихомирова .— Воронеж, 2000 .— 32 с.*
3	*Алгебра и геометрия (решение систем линейных уравнений, вычисление определителей): Метод. указания для решения задач по курсу "Алгебра и геометрия" для студентов 1 курса дневн. и вечерн. отд-ний фак. ПММ / Сост.: Т.Н.Глушакова,Ю.В.Бондаренко .— Воронеж, 2000 .— 32с.*
4	*Алгебра и геометрия: Метод. указания для решения задач по курсу "Алгебра и геометрия" для студентов 1 курса дневн. и вечерн.отд-ний фак. ПММ / Сост. Ю.В.Бондаренко, Т.Н.Глушакова, Е.С.Тихомирова .— Воронеж, 2001 .— Ч. 3: Линейные пространства. - 36 с.*
6	*Функции от матриц : учебное пособие для вузов : [для студентов днев. отд-ния, изуч. дисциплины "Алгебра", "Линейная алгебра"; для направлений: 01.03.02 - Приклад. математика и информатика, 01.03.03 - Механика и мат. моделирование, 01.05.01 - Фундамент. математика и механика] / Воронеж. гос. ун-т ; сост. Т.Н. Глушакова , К.П. Лазарев .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 .— 23 с.*
7	*Евклидовы и унитарные пространства : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. 1 к. днев. отд-ния фак. прикл. математики, информатики и механики, изуч. дисциплины "Алгебра" и"Линейная алгебра"; для направлений: 01.03.02 - Приклад. математика и информатика, 01.03.03 - Механика и мат. моделирование, 01.05.01 - Фундамент. математика и механика] / Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев, Ю.В. Бондаренко ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 .— 25 с.*
8	*Билинейная и квадратичная формы [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. 1 к. всех форм обучения фак. приклад. математики, информатики и механики; для направлений: 01.03.02- Приклад. математика и информатика, 02.04.03 - Механика и мат. моделирование] / Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016 .*
9	*Руководство к решению задач по алгебре. Часть 1 / Т. Н. Глушакова, Н. Н. Удоденко, Ю. В. Бондаренко. – Воронеж, 2002. – 67 с.*
10	*Руководство к решению задач по алгебре. Часть 2. Жорданова форма матрицы и жорданов базис / Н. Н. Удоденко, Т. Н. Глушакова. – Воронеж, 2003. – 43 с.*
11	*Руководство к решению задач по алгебре. Часть 3. Линейные пространства / Ю. В. Бондаренко, Т. Н. Глушакова, Е. С. Тихомирова. – Воронеж, 2002. – 36 с.*
12	*Руководство к решению задач по алгебре. Часть 4. Комплексные числа / Т. Н. Глушакова, И. Б. Крыжко. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 21 с.*
13	*Руководство к решению задач по алгебре. Часть 5. Элементы теории многочленов / Т. Н. Глушакова, И. Б. Крыжко. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 15 с.*

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение): (*При реализации дисциплины могут проводиться различные типы лекций (вводная, обзорная и т.д.), семинарские занятия (проблемные, дискуссионные и т.д.), применяться дистанционные образовательные технологии в части освоения лекционного материала, проведения текущей аттестации, самостоятельной работы по дисциплине или отдельным ее разделам и т.д. При применении ЭО и ДОТ необходимо в п.15 в) указать используемые ресурсы (см. пример выше)*

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Линейная алгебра (МОАИС)», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

При реализации учебной дисциплины используются информационные электронно-образовательные ресурсы www.liv.vsu.ru и https://e.lanbook.com.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель, компьютер (ноутбук), мультимедиа оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения). ОС Windows 10, интернет-браузер (Mozilla Firefox), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами (LibreOffice).

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Роль и место алгебры в системе математического образования	ОПК-1	ОПК-1.1	-
2	Множества. Отображения. Отношения	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольная работа 3
3	Комплексные числа	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольная работа 4
4	Многочлены	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольная работа 4
5	Основная теорема алгебры	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 3
6	Группы, кольца, поля	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 3
7	Матрицы и определители	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольная работа 1
8	Системы линейных алгебраических уравнений	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 1
9	Линейные пространства	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 3
10	Евклидовы и унитарные пространства	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 2
11	Линейные преобразования	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 2
12	Линейные, билинейные и квадратичные формы	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 2
13	Гиперповерхности второго порядка	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 3
14	Алгебры	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Контрольная работа 3
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен(I семестр); экзамен (II семестр)				

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Контрольные работы

Комплект заданий для контрольной работы №1

Вариант 1

1. Найти значение многочлена $f(x) = 5x^2 - 7x - 3$ от матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 3 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 6 & -2 \\ 4 & d & 8 & -4 \end{vmatrix}.$$
3. Найти обратную матрицу (по определению) к матрице:
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$
4. Решить матричное уравнение с помощью элементарных преобразований:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$
5. Решить по методу Жордана-Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Вычислить выражение:
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^4.$$
2. Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель:
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \\ a & b & c & d \\ 3 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$
3. Найти ранг матрицы при помощи элементарных преобразований:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Решить матричное уравнение:
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$
5. Решить по правилу Крамера:
$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5, \\ 3x - 7y + 3z - t = -1, \\ 5x - 9y + 6z + 4t = 7, \\ 4x - 6y + 3z + t = 8. \end{cases}$$

Комплект заданий для контрольной работы №2

Вариант 1

1. Линейный оператор A в базисе $e_1 = (-4,-5), e_2 = (3,1)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

   Линейный оператор B в базисе $e_1{}' = (1,5), e_2{}' = (-2,4)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу линейного оператора A+B в базисе $e_1{}', e_2{}'$.
2. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Привести матрицу линейного оператора к диагональному виду, указать базис, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид.
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Определить знак квадратичной формы: $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 5x_2x_3$.
5. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и найти выражение новых неизвестных через старые: $f = 2x_1^2 + x_3^2 - 5x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$.

Вариант 2

1. Линейный оператор в базисе $e_1 = (-4,-5,-6), e_2 = (1,2,1), e_3 = (2,0,1)$ имеет матрицу
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$
   Найти матрицу этого же линейного оператора в базисе
   $e_1{}' = (5,1,4), e_2{}' = (2,7,3), e_3{}' = (3,-1,0)$.
2. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Привести матрицу линейного оператора к диагональному виду, указать базис, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
4. Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы $f = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 5x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$.
5. Привести квадратичную форму к каноническому виду с целыми коэффициентами методом Лагранжа и найти выражение новых неизвестных через старые:
   $f = 5x_1^2 + 11x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2x_3$.

Комплект заданий для контрольной работы №3

Вариант 1

1. Выяснить, является ли множество четных чисел кольцом или полем относительно стандартных операций сложения и умножения.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}(1+i)x+(3-i)y=5,\\(4+5i)x+(7-3i)y=4.\end{cases}$
3. Извлечь корни: $\sqrt[3]{i+5}$.
4. Чему равен показатель кратности корня (-2) для полинома
$$x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16?$$

Вариант 2

1. Выяснить, является ли множество комплексных чисел кольцом или полем относительно стандартных операций сложения и умножения.
2. Выполнить указанные действия: $\frac{(1-i)^5-3}{(1+i)^5+4}$
3. Пользуясь схемой Горнера, разложить полином $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$ по степеням $x-x_0$, где $x_0=2$.
4. Разложить на простейшие дроби над полем **C:** $\frac{1}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)}$.

Комплект заданий для контрольной работы №4

Вариант 1

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{e_1,e_2,e_3\}$ к базису $\{e_1^{/},e_2^{/},e_3^{/}\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если векторы обоих базисов заданы своими координатами:
$$e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, e_1^{/}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, e_2^{/}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, e_3^{/}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}.$$
2. Найти размерность суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, являющихся линейными оболочками векторов $\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\{b_1,b_2\}$: $a_1=(1,1,3,1,3)$, $a_2=(0,-2,-3,1,-1)$, $a_3=(-1,0,2,6,4)$, $b_1=(1,0,1,2,1)$, $b_2=(2,-3,-2,3,1)$.
3. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов $g_1=(1,0,1)$, $g_2=(3,1,2)$, $g_3=(4,0,2)$.
4. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&3\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ образуют базис в линейном пространстве $\mathrm{Matr}_2(R)$ и найти в этом базисе координаты матрицы $X=\begin{pmatrix}-4&2\\-5&1\end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{e_1,e_2,e_3\}$ к базису $\{e_1^{/},e_2^{/},e_3^{/}\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если векторы обоих базисов заданы своими координатами:
$$e_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}, e_1^{/}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}, e_2^{/}=\begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix}, e_3^{/}=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}.$$
2. Найти размерность суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, являющихся линейными оболочками векторов $\{a_1,a_2\}$ и $\{b_1,b_2\}$: $a_1=(1,3,0,2)$, $a_2=(1,1,2,0)$, $b_1=(2,0,1,0)$, $b_2=(1,4,0,1)$.
3. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов $g_1=(1,1,1,1)$, $g_2=(3,5,-1,-2)$, $g_3=(-3,0,6,9)$.

4. Доказать, что система многочленов $f_1(x) = 1 + 4x + 2x^2$, $f_2(x) = 2 + 7x + x^2$, $f_3(x) = -3 + 7x + 2x^2$ является базисом в линейном пространстве $\mathcal{P}_2(R)$ и найти в этом базисе координаты многочлена $g(x) = -4 + 3x + 2x^2$.

Критерии оценки:
- оценка «отлично» выставляется студенту за 5 правильно решённых задач;
- оценка «хорошо» выставляется студенту за 4 правильно решённые задачи;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту за 3 правильно решённые задачи;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если решено менее 3 задач.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Собеседование по билетам

Перечень вопросов для промежуточной аттестации:

I семестр

1. Матрицы. Операции над матрицами и их свойства. Многочлены от матриц.
2. Перестановки и их свойства. Определитель. Миноры. Алгебраические дополнения.
3. Свойства и вычисление определителей. Определитель Вандермонда.
4. Теорема Лапласа.
5. Определитель ступенчатой матрицы.
6. Определитель произведения матриц.
7. Обратная матрица (определение, нахождение обратной матрицы, свойства).
8. Решение матричных уравнений.
9. Правило Крамера.
10. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы. Сохранение ранга при элементарных преобразованиях матрицы. Теорема о базисном миноре.
11. Теорема Кронекера – Капелли.
12. Метод Гаусса и LU-разложение.
13. Фундаментальная система решений систем линейных однородных уравнений.
14. Комплексные числа и операции над ними.
15. Многочлены и операции над ними. Делители. Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида.
16. Схема Горнера. Отделение кратных корней многочлена.
17. Основная теорема алгебры и следствия из нее. Разложение многочлена на неприводимые множители. Вычисление корней. Теорема Виета. Интерполяционная формула Лагранжа. Многочлены с действительными коэффициентами. Разложение рациональной функции на сумму многочлена и правильной дроби. Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей
18. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, координаты. Размерность линейного пространства.
19. Линейные подпространства. Линейные оболочки. Понятие аффинного пространства.
20. Сумма и пересечение линейных подпространств. Прямая сумма.
21. Преобразование координат вектора при изменении базиса.

II семестр

1. Изоморфизм линейных пространств.

2. Выпуклые множества.
3. Прямое дополнение и декартово произведение конечномерных пространств.
4. Евклидовы и унитарные пространства. Простейшие свойства. Неравенство Коши – Буняковского. Норма вектора. Теорема Пифагора. Тождество параллелограмма.
5. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грамма – Шмидта.
6. Ортогональное дополнение. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
7. Матрица и определитель Грамма. Объем параллелепипеда.
8. Ортогональная проекция вектора на под-пространство. Расстояние до подпространства. Расстояние до многообразия
9. Линейные операторы и преобразования в линейных пространствах.
10. Матрица линейного оператора. Линейное выражение координат образа вектора. Изменение матрицы при изменении базиса. Образ и ядро линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора.
11. Операции сложения, умножения на число и умножения операторов. Обратный оператор.
12. Инвариантные подпространства.
13. Собственные векторы и собственные значения. Диагональный вид матрицы оператора. Понятие о жордановой форме матрицы. Теорема Жордана.
14. Теорема Гамильтона –Кэли.
15. Сопряженные и самосопряженные операторы в евклидовых и унитарных пространствах.
16. Нормальные, ортогональные и унитарные операторы в евклидовых и унитарных пространствах
17. Линейные, билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Общий вид. Матрица формы. Преобразование матрицы при изменении базиса. Ранг формы.
18. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод Якоби. Эквивалентность форм. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенность квадратичных форм. Критерии положительной и отрицательной определенности квадратичной формы. Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду.
19. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием в евклидовом пространстве.
20. Гиперповерхности второго порядка.
21. Алгебры. Подалгебры. Идеалы. Примеры. Свойства. Морфизмы алгебр. Конечномерные алгебры и их представления

Критерии оценивания собеседования по экзаменационным билетам:

Отлично	отличное владение теорией и решение задач не ниже хорошего уровня; или отличное решение задач и владение теорией не ниже хорошего уровня
Хорошо	владение теорией не ниже хорошего уровня и решение задач не ниже удовлетворительного уровня; или владение теорией не ниже удовлетворительного уровня и решение задач не ниже хорошего уровня
Удовлетворительно	удовлетворительное владение теорией и удовлетворительное решение задач
Неудовлетворительно	неудовлетворительное владение теорией; или неудовлетворительное решение задач