


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
_ системного анализа и управления
наименование кафедры, отвечающей за реализацию дисциплины
 В.Г. Курбатов
подпись, расшифровка подписи
23.03.2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.12 Алгебра

Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.03.02 Прикладная математика и информатика _____

2. Профиль подготовки/специализация:

Прикладная математика и компьютерные технологии

3. Квалификация выпускника: бакалавр _____

4. Форма обучения: Очная _____

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: кафедра системного анализа и управления

6. Составители программы: Курбатов В.Г., д.ф.-м.н., проф.

(ФИО, ученая степень, ученое звание)

7. Рекомендована: Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики (протокол №5 от 22.03.2024)

(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: 2024/2025

Семестр(ы): 1, 2.

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- формирование у студентов глубоких теоретических знаний в области линейной алгебры;
- знакомство с абстрактными моделями общей алгебры и спектральной теории;
- подготовка студентов к применению алгебраических методов в научных исследованиях и прикладной деятельности.

Задачи учебной дисциплины:

- отработать навыки работы с матричным представлением операторов и билинейными и квадратичными функционалами;
- сформировать базовые знания и навыки решения типовых задач по основным разделам алгебры, относящейся к базовым дисциплинам математики;
- улучшение навыков формулирования и доказательства математических утверждений и теорем в контексте алгебры;
- практическое применение алгебраических знаний для решения задач из других разделов математики.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина относится к базовому циклу Б1, обязательная часть.

Требуется знание курса «Аналитической геометрии» и общая математическая культура, приобретенная в школе. Используется практически во всех базовых математических курсах: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Численные методы», «Методы оптимизации», «Уравнения математической физики», «Компьютерная графика» и другие.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Демонстрирует знания, относящиеся к базовым дисциплинам математики, информатики и естественных наук.	Знать: знание основ теории Уметь: умение решать типовые задачи применять методы и идеи алгебры Владеть: навыками применения полученных знаний в учебной и научной деятельности
		ОПК-1.3	Использует современные математические инструментальные средства для решения поставленной задачи, анализирует и интерпретирует результаты.	Знать: знание основ теории Уметь: умение решать типовые задачи применять методы и идеи алгебры Владеть: навыками применения полученных знаний в учебной и научной деятельности

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 8/288.

Форма промежуточной аттестации 2 зачета и экзамен

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			1	2	...
Контактная работа		160	48	112	
в том числе:	лекции	96	32	64	
	практические	64	16	48	
Самостоятельная работа		92	42	50	
Промежуточная аттестация (для экзамена)		36	отсутствует	36	
Итого:		288	90	198	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Множества и функции	Понятие множества. Операции над множествами. Определение функции, обратной функции, композиции функций. Отношение эквивалентности.	Алгебра 2023
1.2	Числа и многочлены	Аксиомы натуральных чисел. Математическая индукция. Деление целых чисел с остатком. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Определение сравнения. Приведенная система вычетов. Кольцевые свойства. Рациональные числа. Варианты определения комплексных чисел. Декартова, тригонометрическая и экспоненциальная формы. Геометрический смысл операций. Алгебраические и функциональные многочлены. Операции. Деление с остатком и теорема Безу. Разложение на комплексные и действительные множители.	Алгебра 2023
1.3	Матрицы. Определители 2-го и 3-го порядка	Определение и терминология, связанные с матрицами. Действия с матрицами. Определения и правила вычисления. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Примеры вычисления. Разложение определителя по строке и столбцу. Определение обратной матрицы. Метод присоединенной матрицы.	Алгебра 2023
1.4	Системы линейных уравнений.	Терминология, связанная с системами линейных уравнений. Метод Крамера. Матричная запись системы линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Матричные уравнения. Ступенчатые матрицы. Прямой и обратный ход метода Гаусса в случае невырожденной системы. Модификация метода Гаусса для нахождения обратной матрицы. Критерий несовместности, основанный на методе элементарных преобразований. Базисные и свободные неизвестные. Метод элементарных преобразований для решения неопределенной системы. Модификация метода Гаусса для вычисления определителя матрицы	Алгебра 2023
1.5	Определители произвольного порядка	Перестановки. Определение определителя n-го порядка и его свойства. Блочные матрицы. Разложение по строке (столбцу). Линейная независимость строк (столбцов). Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Метод окаймляющих миноров вычисления ранга. Метод элементарных преобразований вычисления ранга.	Алгебра 2023

		Теорема Кронекера–Капелли.	
1.5	Линейные пространства	Определение линейного пространства. Арифметическое линейное пространство. Линейная независимость в линейном пространстве. Базис. Размерность. Подпространства и линейные оболочки. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Фактор-пространство. Преобразование координат вектора при замене базиса.	Алгебра 2023
1.7	Линейные операторы	Определение линейного оператора. Действия с линейными операторами. Обратимые линейные операторы. Изоморфизм линейных пространств. Однотипность линейных операторов. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Ранг линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.	Алгебра 2023
1.8	Начала спектральной теории	Определитель оператора. Характеристический многочлен. Операторные уравнения. Собственные значения и собственные векторы. Базис из собственных векторов. Формулировка теоремы Жордана.	Алгебра 2023
1.9	Евклидовы пространства	Определение евклидова пространства. Норма в евклидовом пространстве. Ортогональный базис. Ортогонализация Грама–Шмидта. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Метод наименьших квадратов. Ортогональное дополнение. Разложение Шура.	Алгебра 2023
1.10	Линейные, билинейные и квадратичные функционалы	Определение линейного функционала. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Определение билинейного функционала. Матрица билинейного функционала. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса. Симметричные билинейные функционалы. Квадратичные функционалы. Метод Лагранжа приведения квадратичного функционала к нормальному виду. Критерий Сильвестра.	Алгебра 2023
1.11	Алгебраические структуры	Внутренние и внешние законы композиции. Группы, кольца, тела, поля и алгебры. Морфизмы и фактор-структуры. Понятие о категориях.	Алгебра 2023
2. Практические занятия			
2.1	Множества и функции	Понятие множества. Операции над множествами. Определение функции, обратной функции, композиции функций. Отношение эквивалентности.	Алгебра 2023
2.2	Числа и многочлены	Аксиомы натуральных чисел. Математическая индукция. Деление целых чисел с остатком. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Определение сравнения. Приведенная система вычетов. Кольцевые свойства. Рациональные числа. Варианты определения комплексных чисел. Декартова, тригонометрическая и экспоненциальная формы. Геометрический смысл операций. Алгебраические и функциональные многочлены. Операции. Деление с остатком и теорема Безу. Разложение на комплексные и действительные множители.	Алгебра 2023
2.3	Матрицы. Определители 2-го и 3-го порядка	Действия с матрицами. Определения и правила вычисления. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Примеры вычисления. Разложение определителя по строке и столбцу. Определение обратной матрицы. Метод присоединенной матрицы.	Алгебра 2023

2.4	Системы линейных уравнений.	Терминология, связанная с системами линейных уравнений. Метод Крамера. Матричная запись системы линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Матричные уравнения. Ступенчатые матрицы. Прямой и обратный ход метода Гаусса в случае невырожденной системы. Модификация метода Гаусса для нахождения обратной матрицы. Критерий несовместности, основанный на методе элементарных преобразований. Базисные и свободные неизвестные. Метод элементарных преобразований для решения неопределенной системы. Модификация метода Гаусса для вычисления определителя матрицы	Алгебра 2023
2.5	Определители произвольного порядка	Перестановки. Определение определителя n -го порядка и его свойства. Блочные матрицы. Разложение по строке (столбцу). Линейная независимость строк (столбцов). Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Метод окаймляющих миноров вычисления ранга. Метод элементарных преобразований вычисления ранга. Теорема Кронекера–Капелли.	Алгебра 2023
2.6	Линейные пространства	Определение линейного пространства. Арифметическое линейное пространство. Линейная независимость в линейном пространстве. Базис. Размерность. Подпространства и линейные оболочки. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Фактор-пространство. Преобразование координат вектора при замене базиса.	Алгебра 2023
2.7	Линейные операторы	Определение линейного оператора. Действия с линейными операторами. Обратимые линейные операторы. Изоморфизм линейных пространств. Однотипность линейных операторов. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Ранг линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.	Алгебра 2023
2.8	Начала спектральной теории	Определитель оператора. Характеристический многочлен. Операторные уравнения. Собственные значения и собственные векторы. Базис из собственных векторов. Формулировка теоремы Жордана.	Алгебра 2023
2.9	Евклидовы пространства	Определение евклидова пространства. Норма в евклидовом пространстве. Ортогональный базис. Ортогонализация Грама–Шмидта. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Метод наименьших квадратов. Ортогональное дополнение. Разложение Шура.	Алгебра 2023
2.10	Линейные, билинейные и квадратичные функционалы	Определение линейного функционала. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Определение билинейного функционала. Матрица билинейного функционала. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса. Симметричные билинейные функционалы. Квадратичные функционалы. Метод Лагранжа приведения квадратичного функционала к нормальному виду. Критерий Сильвестра.	Алгебра 2023
2.11	Алгебраические структуры	Внутренние и внешние законы композиции. Группы, кольца, тела, поля и алгебры. Морфизмы и фактор-структуры. Понятие о категориях.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Множества и функции	4	2		4	8
2	Числа и многочлены	10	5		6	20
3	Матрицы. Определители 2-го и 3-го порядка	6	3		6	12
4	Системы линейных уравнений	12	6		8	24
5	Определители произвольного порядка	8	6		8	22
6	Линейные пространства	8	6		8	22
7	Линейные операторы	8	6		8	22
8	Начала спектральной теории	8	6		8	22
9	Евклидовы пространства	8	6		8	22
10	Линейные, билинейные и квадратичные функционалы	8	6		8	22
11	Алгебраические структуры	16	12		18	46
	Итого:	96	64		92	252

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Курс предполагает отведение ряда разделов на самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами эти разделы.

Изложение материал по каждой теме предполагает использование ранее введенных определений, обозначений и доказательств. Поэтому необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного на занятиях материала.

Рекомендуется также просмотр материала по данной учебной дисциплине с опережением лекций с использованием рекомендуемой в данной учебной программе литературы.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения необходимо выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Курбатов В.Г. Алгебра : учебное пособие // В.Г. Курбатов – Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2022. – 604 с. – URL: https://disk.yandex.ru/i/Lq3W1HNR3cUauw или Образовательный портал «Электронный университет ВГУ», Алгебра 2023 — Режим доступа: https://edu.moodle.ru
2	Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 556 с. — ISBN 978-5-8114-6477-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/147341 . (дата обращения: 15.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3	Постников, М. М. Линейная алгебра : учебное пособие / М. М. Постников. — 3-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-0890-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167777 (дата обращения: 15.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4	Мальцев, И. А. Линейная алгебра : учебное пособие / И. А. Мальцев. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 384 с. — ISBN 978-5-8114-1011-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167832 (дата обращения: 15.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Кряквин, В. Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях : учебное пособие / В. Д. Кряквин. — 3-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 592 с. — ISBN 978-5-8114-2090-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/72583
2	Сборник задач по алгебре. Ч. 3. Основные алгебраические структуры / Ю.А. Артамонов, Э.Б. Бахтурин, Е.С. Винберг [и др.] ; Под ред. А.И. Кострикина.— М. : Физматлит, 2007.— Т. 2.— 168 с
3	Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Г. Д. Ким.— 3-е изд.— М. : Московский университет, 1998.— 320 с.
4	Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре / Д. К. Фаддеев.— М. : Лань, 2020.— 416 с.
5	Проскуряков, И. В. Числа и многочлены / И. В. Проскуряков.— Второе изд.— М. : Просвещение, 1965.— 284 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1.	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online (доступ осуществляется по адресу: https://biblioclub.ru/);
2.	Алгебра, 2023 / В.Г. Курбатов— Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.moodle.ru или URL: https://disk.yandex.ru/i/Lq3W1HNR3cUauw
3.	Электронная библиотека технического ВУЗа «Консультант студента» (доступ осуществляется по адресу: https://www.studmedlib.ru/);
4.	Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: https://e.lanbook.com/).

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы, онлайн-курсы, ЭУМК

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Баскаков, А. Г. Лекции по алгебре / А. Г. Баскаков.— Воронеж : ВГУ, 2017.— 158 с.
2	Алгебра 2023 / В.Г. Курбатов— Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.moodle.ru . Или URL: https://disk.yandex.ru/i/Lq3W1HNR3cUauw

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение): лекции и практические занятия (с домашними заданиями), контрольные, зачеты и экзамен.

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Алгебра, 2023», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.5.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения лекций: специализированная мебель, компьютер (ноутбук), мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения).

ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Google Chrome, Mozilla Firefox). ПО Adobe Reader 394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I, ауд., 226, 329, 433, 435,

Учебная аудитория для проведения практических занятий: специализированная мебель, доска (меловая или маркерная)

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I, ауд. 226, 227, 319, 321, 323, 329, 428, 430, 433, 435

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Все разделы	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.3	<i>Контрольные работы (3 шт.)</i>
Промежуточная аттестация форма контроля – 2 зачета и экзамен				Перечень вопросов приведен ниже.

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Перечень оценочных средств по дисциплине «Алгебра»

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Образцы вариантов контрольных

Контрольная 1

1. Вычислить определитель разложением по строке/столбцу и по правилу Саррюса: $\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Найти матрицу, обратную матрице A , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти матрицу X из матричного уравнения $X \cdot A + X + C = 3B$,

если $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Контрольная 2

1. Проверить, что отображение $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = (x - 2y, 2x - 3z, 2y - x)$, является линейным оператором.
2. Найти матрицу оператора из задания 1.
3. Найти матрицу линейного оператора, отображающего систему векторов

a_1, a_2, a_3 в систему векторов b_1, b_2, b_3 , где $a_1=(0, -4, -1)$, $b_1=(16, -8, 6)$, $a_2=(1, -5, -5)$, $b_2=(21, -22, 15)$, $a_3=(2, 4, 1)$, $b_3=(-14, 14, -6)$.

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $Q(x,y,z)=x^2-2y^2+4z^2-4xy+6xz-4yz$.

Контрольная 3

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $A:R^2 \rightarrow R^2$, $A(x,y)=(3x-8y, -2x+3y)$.

2. Найти ядро, образ, ранг и дефект оператора, имеющего матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти все собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Найти Жорданову форму оператора, имеющего матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Требования к выполнению заданий контрольных (шкалы и критерии оценивания)

Оценка «5» (отлично) выставляется, если обучающийся показывает всесторонние и глубокие знания программного материала, знание основной и дополнительной литературы; последовательно и четко отвечает на вопросы билета и дополнительные вопросы; уверенно ориентируется в проблемных ситуациях; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании программного материала; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «4» (хорошо) выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала, основной и дополнительной литературы; дает полные ответы на теоретические вопросы, допуская некоторые неточности; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «3» (удовлетворительно) выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; при ответе на вопросы не допускает грубых ошибок, но испытывает затруднения в последовательности их изложения; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по разделу; не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускает грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на задаваемые преподавателем вопросы или затрудняется с ответом; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по билетам к зачету, собеседование по экзаменационным билетам к экзамену.

Перечень практических навыков к зачету в 1-м семестре

1. Проверка соотношений между множествами.
2. Проверка соотношений, содержащих обратную функцию.
3. Умение проверять свойства отношений эквивалентности.
4. Решение задач на математическую индукцию.

5. Решение задач из теории целых чисел.
6. Умение проверять свойства сравнений.
7. Умение выполнять арифметические операции с комплексными числами, преобразовывать их из одной формы в другую.
8. Разложение многочлена на комплексные и действительные множители.
9. Действия с матрицами.
10. Вычисление определителей.
11. Разложение определителя по строке и столбцу.
12. Определение обратной матрицы. Ее нахождение методом присоединенной матрицы.
13. Метод Крамера.
14. Метод обратной матрицы. Матричные уравнения.
15. Метод Гаусса в случае невырожденной системы.
16. Метод Гаусса для нахождения обратной матрицы. Критерий несовместности, основанный на методе элементарных преобразований.
17. Метод элементарных преобразований решения неопределенной системы.
18. Метод Гаусса для вычисления определителя матрицы.

Образец билета к зачету в 1-м семестре

1. Сформулировать определение отношения эквивалентности.
2. Выполнить деление $(1-i)/(2+3i)$.
3. Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы.
4. Решить систему линейных уравнений.

Перечень практических навыков к зачету во 2-м семестре

1. Вычисление определителей произвольного размера.
2. Проверка линейной зависимости и независимости.
3. Вычисление ранга матрицы.
4. Проверка базисности и разложение по базису.
5. Преобразование координат вектора при замене базиса.
6. Нахождение матрицы линейного оператора. Нахождение ядра и образа.
7. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.
8. Нахождение собственных значений и собственных векторов.
9. Вычисление скалярных произведений в различных пространствах.
10. Разложение по ортогональному базису.
11. Ортогонализация Грама–Шмидта.
12. Построение ортогонального базиса из собственных векторов.
13. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса.
14. Метод Лагранжа приведения квадратичного функционала к нормальному виду.
15. Критерий Сильвестра.
16. Проверка аксиом алгебраических структур.
17. Нахождение ядер и образом морфизмов. Проверка изоморфности.

Образец билета к зачету в 2-м семестре

1. Сформулировать определение ранга матрицы.
2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.
3. Сформулировать определение скалярного произведения.
4. Проверить положительную определенность квадратичного функционала.

Описание технологии проведения зачета

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Оценка «зачтено» выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций; выполнил не менее 2/3 всех предложенных заданий и задач или допустил не более одной грубой

ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочетов, при наличии четырех-пяти недочетов; допускает незначительные ошибки при оформлении работы; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине; если число ошибок и недочетов в работе превысило норму для оценки «зачтено» или обучающийся выполнил правильно менее 2/3 всех заданий и задач; допускает грубые ошибки при оформлении работы; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Перечень вопросов к экзамену в 2-м семестре

1. Определение линейного пространства. Примеры. Простейшие свойства линейных пространств.
2. Арифметическое линейное пространство.
3. Линейная независимость в линейном пространстве. Линейная независимость одного, двух и нескольких векторов. Подсистема линейно независимой системы.
4. Полные системы. Базис в линейном пространстве: два определения, их эквивалентность. Определение координат вектора относительно базиса.
5. Размерность. Теорема о базисности максимальных линейно независимых систем и минимальных полных систем.
6. Определение подпространства линейного пространства. Размерность подпространства. Примеры подпространств. Линейная оболочка: два определения и их эквивалентность. Размерность линейной оболочки.
7. Сумма и пересечение подпространств. Правило включений-исключений.
8. Прямая сумма двух подпространств: два определения и их эквивалентность. Примеры прямых сумм. Базис и размерность прямой суммы. Определение прямой суммы нескольких подпространств.
9. Преобразование координат вектора при замене базиса: обратимость матрицы перехода от одного базиса к другому, теорема о переходе от координат вектора в одном базисе к координатам в другом.
10. Нормированные пространства: определение нормы, примеры норм в \mathbb{K}^n .
11. Определение линейного оператора. Примеры.
12. Действия с линейными операторами (сумма, умножение на число, произведение; их свойства).
13. Определение обратного к линейному оператору, его линейность. Обратный к произведению двух операторов.
14. Изоморфизм линейных пространств. Сохранение базисности, полноты и размерности. Изоморфизм между конечномерным пространством и арифметическим пространством.
15. Слабое подобие линейных операторов: определение, выполнение аксиом отношения эквивалентности.
16. Матрица линейного оператора (случай оператора, действующего между арифметическими пространствами): теорема о биективном соответствии между матрицами и операторами, сохранение трех алгебраических операций и обратимости.
17. Матрица линейного оператора (случай оператора, действующего между произвольными пространствами): теорема о биективном соответствии между матрицами и операторами, сохранение трех алгебраических операций и обратимости.
18. Представление оператора блочной матрицей. Инвариантность подпространств в терминах блочности матрицы.
19. Ядро и образ линейного оператора: определение, их свойства. Фундаментальная система решений однородного уравнения $\mathcal{A}x = 0$. Базис в образе линейного оператора, заданного матрицей.
20. Теорема Фредгольма о размерностях ядра и образа с леммой о базисе в образе линейного оператора. Необходимое и достаточное условие слабого подобия линейных операторов. Ранг линейного оператора.

21. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Пример (по своему выбору).
22. Фактор-пространство: определение, строение фактор-классов, определение линейных операций.
23. Фактор-оператор. Линейность фактор-проекции j . Теорема о существовании фактор-оператора.
24. Подобие операторов: определение, выполнение аксиом отношения эквивалентности.
25. Определитель оператора: определение, его независимость от выбора базиса.
26. Характеристический многочлен: его степень и старший коэффициент.
27. Операторные уравнения: описание совместности уравнения $\mathcal{A}x = b$ в терминах образа оператора \mathcal{A} , завершение доказательства теоремы Крамера, существование нетривиального решения у однородной системы.
28. Собственные значения и собственные векторы (определение). Собственное подпространство. Связь собственных значений с корнями характеристического уравнения. Пример на нахождение собственных векторов (по своему выбору).
29. Базис из собственных векторов: вид матрицы оператора в базисе из собственных векторов. Достаточные условия существования базиса из собственных векторов.
30. Формулировка теоремы Жордана (два варианта, без доказательства). Необходимое и достаточное условие подобия линейных операторов.
31. Определение евклидова пространства. Примеры.
32. Норма в евклидовом пространстве: неравенство Коши–Буняковского, проверка аксиом нормы.
33. Ортогональный базис: определение ортогональности, варианты тождества Пифагора. Линейная независимость ортогональной системы, определение ортонормированного базиса, нахождение коэффициентов разложения по ортогональному базису, нахождение элементов матрицы оператора относительно ортонормированного базиса.
34. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Изоморфизм евклидовых пространств.
35. Ортогонализация Грама–Шмидта: описание алгоритма, его обоснование, пример (по своему выбору). Существование ортонормированного базиса в конечномерном евклидовом пространстве.
36. Метод наименьших квадратов. Тождество наименьших квадратов.
37. Ортогональное дополнение: определение, теорема о разложении в прямую сумму, следствие о представлении ортогональных проекторов.
38. Унитарные матрицы: определение, теорема об эквивалентных определениях. Определение унитарного подобия.
39. Разложение Шура.
40. Определение линейного функционала. Общий вид линейного функционала на \mathbb{K}^n и на произвольном линейном пространстве.
41. Сопряженное пространство. Общий вид линейного функционала на евклидовом пространстве.
42. Эрмитов сопряженный оператор, его существование и единственность. Матрица эрмитова сопряженного оператора. Свойства эрмитова сопряжения. Ядро и образ эрмитова сопряженного оператора.
43. Самосопряженный оператор: определение, симметричность его матрицы.
44. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора: действительность собственных значений, ортогональность собственных векторов, существование действительного собственного значения, лемма об инвариантном подпространстве, существование ортонормированного базиса из собственных векторов. Унитарные операторы: определение, связь с унитарными матрицами, эквивалентные определения.
45. Определение билинейного и сопряженно билинейного функционалов. Примеры. Определение суммы и произведения на число.
46. Матрица билинейного функционала: теорема о биективном соответствии между матрицами и функционалами. Пример (по своему выбору). Следствие о знаке определителя матрицы.
47. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса.

48. Симметричные билинейные и сопряженно билинейные функционалы. Описание симметричности в терминах матрицы. Биективное соответствие между функционалами и матрицами. Представление симметричного сопряженно билинейного функционала диагональной матрицей.
49. Квадратичные функционалы: определение, примеры (по своему выбору). Поляра квадратичного функционала. Канонический вид. Индекс. Положительная и отрицательная определенность, знакопеременность. Закон инерции.
50. Метод Лагранжа приведения квадратичного функционала к каноническому виду (на примере по своему выбору).
51. Критерий Сильвестра положительной определенности.
52. Законы композиции (внутренние и внешние). Ассоциативность, коммутативность. Определение нейтрального элемента и противоположного элемента, их единственность. Дистрибутивность. Определение алгебраической структуры, гомологичность, изоморфизм и морфизм алгебраических структур. Отношение эквивалентности, согласованное с алгебраической структурой. Законы композиции в фактор-множестве. Теорема о сохранении свойств при переходе к фактор-множеству.
53. Группы: определение и примеры. Подгруппы, изоморфизмы и морфизмы групп, примеры (по своему выбору), ядро и образ морфизма.
54. Нормальные делители и фактор-группы. Теорема о биективном соответствии между отношениями эквивалентности, согласованными с законом композиции, и нормальными подгруппами (без доказательства), следствие о строении классов эквивалентности.
55. Кольца: определение, примеры (по своему выбору). Определение кольца Ли, два примера. Подкольца, изоморфизмы и морфизмы колец.
56. Идеалы и фактор-кольца. Теорема о биективном соответствии между отношениями эквивалентности, согласованными с законами композиции в кольце, и идеалами (без доказательства).
57. Тела и поля, примеры. Тело кватернионов.
58. Алгебры: определение, примеры. Определение алгебры Ли, два примера. Подалгебры, изоморфизмы и морфизмы алгебр.
59. Идеалы и фактор-алгебры. Теорема о биективном соответствии между отношениями эквивалентности, согласованными с законами композиции в алгебре, и идеалами.
60. Понятие о категориях: определение, примеры. Определение функтора, примеры (по своему выбору).

Образец экзаменационного билета

- Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса.
- Ортогональное дополнение: определение, теорема о разложении в прямую сумму, следствие о представлении ортогональных проекторов.
- Группы: определение и примеры. Подгруппы, изоморфизмы и морфизмы групп, примеры (по своему выбору), ядро и образ морфизма.

Описание технологии проведения экзамена

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Оценка «отлично» выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, содержащегося в основных и дополнительных рекомендованных литературных источниках, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы, за умение анализировать изучаемые явления в их взаимосвязи и диалектическом развитии, применять теоретические положения при решении практических задач; обучающийся подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «хорошо» выставляется за твердое знание основного (программного) материала, включая расчеты (при необходимости), за грамотные, без существенных неточностей ответы на по-

ставленные вопросы, за умение применять теоретические положения для решения практических задач; обучающийся демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «удовлетворительно» выставляется за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала, за слабое применение теоретических положений при решении практических задач; обучающийся подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в расчетах, за незнание основных понятий дисциплины; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Вопросы с вариантами ответов

1. Какой из следующих операторов, рассматриваемых в пространстве геометрических векторов на плоскости, не является линейным?

а) $Ax = 3x$

б) $Ax = \langle x, x \rangle x$

в) $Ax = 0$

г) $Ax = [a, x]$, где a – фиксированный вектор

Ответ: б)

2. Какое из следующих подмножеств геометрических векторов не является подпространством?

а) множество векторов, компланарных данной плоскости

б) множество векторов, ортогональных данному вектору a

в) множество векторов, удовлетворяющих условию $|x|=1$

г) множество векторов, параллельных данной прямой

Ответ: в)

3. Характеристическим многочленом матрицы A называют

а) $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

б) $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

в) $Ax = \lambda x$

г) $\dim \text{Ran } A - \dim \text{Ker } A$

Ответ: а)

4. Линейное пространство называют евклидовым, если

а) в нем нет нетривиальных подпространств

б) в нем любой вектор отличен от нуля

в) на нем задано скалярное произведение

г) на нем заданы операции сложения и умножения на число

Ответ: в)

Вопросы с кратким текстовым ответом

1. Как называют множество векторов, которое линейный оператор переводит в ноль?

Ответ: Ядро

Описание технологии проведения:

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 30 минут

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности) :

1 балл – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень

2 балла – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).