

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
Системного анализа и управления

наименование кафедры, отвечающей за реализацию дисциплины

В.Г. Курбатов

подпись, расшифровка подписи

23.03.2024 г.

Курбатов

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.16 Функциональный анализ

Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.03.02 прикладная математика и информатика

2. Профиль подготовки/специализация:

Прикладная математика и компьютерные технологии

3. Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: кафедра системного анализа и управления

6. Составители программы: (ФИО, ученая степень, ученое звание)

Курбатов В. Г., д. ф.-м.н., профессор

7. Рекомендована: Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики (протокол №5 от 22.03.2024)

отметки о продлении вносятся вручную

8. Учебный год: 2025/26

Семестр(ы): 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- изучение студентами теоретических основ функционального анализа, составляющих фундамент ряда математических и прикладных дисциплин;
- развитие умений модифицировать и использовать математические модели функционального анализа для решения прикладных задач;
- формирование навыков логических рассуждений и математической культуры студентов.

Задачи учебной дисциплины:

- познакомить с основными идеями, результатами и принципами функционального анализа: теорией метрических и понятиями полноты и компактности, теорией банаховых и гильбертовых пространств, линейных ограниченных операторов и функционалов, спектральной теории и основным положениям теории интеграла Лебега;

- обучить студентов теоретическим основам курса;
- овладение методами решения как вычислительных, так и теоретических задач;
- формирование компетенций, установленных учебным планом.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина относится к базовому циклу Б1, обязательная часть. От студентов требуется знание курсов «Алгебры» и «Математического анализа». Данная дисциплина необходима для глубокого понимания курсов «Дифференциальных уравнений», «Уравнений математической физики» и «Методов вычислений». Идеология данной дисциплины используется во многих математических прикладных курсах.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Демонстрирует знания, относящиеся к базовым дисциплинам математики, информатики и естественных наук.	Знать: знание основ теории Уметь: умение решать типовые задачи, применять методы и идеи дисциплины Владеть: навыками применения полученных знаний в учебной и научной деятельности
		ОПК-1.2	Осуществляет формализацию поставленной задачи и выбирает математические методы для ее решения.	Знать: знание основ теории Уметь: умение формализовывать типовые задачи, выбирать методы их решения Владеть: навыками формализации в учебной и научной деятельности

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 5/180.

Форма промежуточной аттестации: зачет и экзамен.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		4		...
Аудиторные занятия	96	96		
в том числе:	лекции	48	48	
	практические	48	48	

	лабораторные			
Самостоятельная работа		48	48	
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час. / экзамен – ___ час.)		36	36	
Итого:		180	180	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Множества и функции	Бесконечные операции с множествами. Прообразы функций. Отношение эквивалентности. Мощность. Понятие об аксиоме выбора.	Функциональный анализ 2023-2024
1.2	Метрические пространства	Определение метрического пространства. Определение линейного пространства. Определение нормированного пространства. Шары и ограниченные множества. Открытые и замкнутые множества.	Функциональный анализ 2023-2024
1.3	Пределы и полнота	Предел последовательности. Эквивалентные метрики и нормы. Сходимость в K_n и l_p . Сходимость в $C[a,b]$. Пространство $C^1[a,b]$. Полные метрические пространства. Пополнение метрического пространства. Определение банахова пространства. Предел и непрерывность функций.	Функциональный анализ 2023-2024
1.4	Компактность	Компактные множества. Отделимость компактных множеств. Компактность и замкнутость. Множество Кантора. Вполне ограниченные множества. Выделение сходящихся подпоследовательностей. Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. Критерий компактности в K_n . Критерий компактности в $C[a,b]$. Топологические пространства.	Функциональный анализ 2023-2024
1.5	Принцип сжимающих отображений	Принцип сжимающих отображений. Сжимающие отображения на отрезке. Локализация сжимающего отображения.	Функциональный анализ 2023-2024
1.6	Линейные ограниченные операторы	Определение линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Непрерывные линейные операторы. Норма линейного оператора. Норма оператора, действующего в K_n . Нормы четырех операторов в $C[a,b]$. Пространство линейных операторов. Обратимые линейные операторы.	Функциональный анализ 2023-2024
1.7	Основы спектральной теории	Спектр и резольвентное множество. Формула Бёрлинга–Гельфанда	Функциональный анализ 2023-2024
1.8	Интегральные операторы и уравнения	Операторы Вольтерра. Метод итераций для уравнения Фредгольма. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	Функциональный анализ 2023-2024
1.9	Евклидовы пространства	Определение евклидова пространства. Ортогональность. Свойства ортогональных систем. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля. Существование ор-	Функциональный анализ

		тонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Ортогональное дополнение. Прямая сумма.	2023-2024
1.10	Линейные функционалы	Определение линейного функционала. Непрерывные линейные функционалы. Сопряженное пространство. Сопряженные операторы.	Функциональный анализ 2023-2024
1.11	Мера Лебега	Строение открытых множеств на прямой. Мера открытого множества на прямой. Мера компактного множества на прямой. Мера Лебега. Измеримость и суммируемость неограниченных множеств. σ -алгебры.	Функциональный анализ 2023-2024
1.12	Интеграл Лебега	Измеримые функции. Интеграл Лебега от простых функций. Суммируемые функции. Пренебрежимые множества и функции. Пространство Лебега L_1 . Пространство Лебега L_2 . Понятие о пространствах Лебега L_p .	Функциональный анализ 2023-2024
2. Практические занятия			
2.1	Множества	Бесконечные операции с множествами. Прообразы функций. Отношение эквивалентности. Мощность. Понятие об аксиоме выбора.	Функциональный анализ 2023-2024
2.2	Метрические пространства	Определение метрического пространства. Определение линейного пространства. Определение нормированного пространства. Шары и ограниченные множества. Открытые и замкнутые множества.	Функциональный анализ 2023-2024
2.3	Пределы и полнота	Предел последовательности. Эквивалентные метрики и нормы. Сходимость в K_n и l_p . Сходимость в $C[a,b]$. Пространство $C^1[a,b]$. Полные метрические пространства. Пополнение метрического пространства. Определение банахова пространства. Предел и непрерывность функций.	Функциональный анализ 2023-2024
2.4	Компактность	Компактные множества. Отделимость компактных множеств. Компактность и замкнутость. Множество Кантора. Вполне ограниченные множества. Выделение сходящихся подпоследовательностей. Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. Критерий компактности в K_n . Критерий компактности в $C[a,b]$. Топологические пространства.	Функциональный анализ 2023-2024
2.5	Принцип сжимающих отображений	Принцип сжимающих отображений. Сжимающие отображения на отрезке. Локализация сжимающего отображения.	Функциональный анализ 2023-2024
2.6	Линейные ограниченные операторы	Определение линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Непрерывные линейные операторы. Норма линейного оператора. Норма оператора, действующего в K_n . Нормы четырех операторов в $C[a,b]$. Пространство линейных операторов. Обратимые линейные операторы.	Функциональный анализ 2023-2024
2.7	Основы спектральной теории	Спектр и резольвентное множество. Формула Бёрлинга-Гельфанда	Функциональный анализ 2023-2024
2.8	Интегральные операторы и уравнения	Операторы Вольтерра. Метод итераций для уравнения Фредгольма. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	Функциональный анализ 2023-2024
2.9	Евклидовы пространства	Определение евклидова пространства. Ортогональность. Свойства ортогональных систем. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидо-	Функциональный анализ 2023-2024

		вом пространстве. Гильбертовы пространства. Ортогональное дополнение. Прямая сумма.	
2.10	Линейные функционалы	Определение линейного функционала. Непрерывные линейные функционалы. Сопряженное пространство. Сопряженные операторы.	Функциональный анализ 2023-2024
2.11	Мера Лебега	Строение открытых множеств на прямой. Мера открытого множества на прямой. Мера компактного множества на прямой. Мера Лебега. Измеримость и суммируемость неограниченных множеств. σ -алгебры.	Функциональный анализ 2023-2024
2.12	Интеграл Лебега	Измеримые функции. Интеграл Лебега от простых функций. Суммируемые функции. Пренебрежимые множества и функции. Пространство Лебега L_1 . Пространство Лебега L_2 . Пространства Лебега L_p .	Функциональный анализ 2023-2024

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Множества	4	4		4	12
2	Метрические пространства	4	4		4	12
3	Пределы и полнота	4	4		4	12
4	Компактность	4	4		4	12
5	Принцип сжимающих отображений	4	4		4	12
6	Линейные ограниченные операторы	4	4		4	12
7	Основы спектральной теории	4	4		4	12
8	Интегральные операторы и уравнения	4	4		4	12
9	Евклидовы пространства					
10	Линейные функционалы	4	4		4	12
11	Мера Лебега					
12	Интеграл Лебега	4	4		4	12
	Итого:	48	48		48	144

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Курс предполагает отведение большого числа разделов на самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами данные разделы.

Материал по каждой теме излагается последовательно с использованием ранее введенных определений, обозначений и доказательств. Необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного на занятиях материала.

Желателен просмотр материала по данной учебной дисциплине с опережением лекций с использованием рекомендуемой в данной учебной программе литературы.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Павлов, Е. А. Основы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Павлов. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 88 с. — ISBN 978-5-8114-3635-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/116362 (дата обращения: 16.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
	Додонов, А.Е. Функциональный анализ : учебное пособие / А.Е. Додонов – Владимир : Изд-во Владимир. гос. ун-та, 2023. - 144 с. - ISBN 978-5-9984-1715-3. - URL [^] https://dspace.www1.vlsu.ru/bitstream/123456789/10671/1/02501.pdf (дата обращения 15.05.2024)
2	Власова, Е. А. Элементы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-1958-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168870 (дата обращения: 16.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А.Треногин. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
2	Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа/Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Лань, 2009. - 272с.
3	Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу / А.Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2014. - 560 с.
4	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2012. - 572 с.
5	Леонтьева Т.А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями. / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. – М.: Инфра-М, 2013. - 164 с.
6	Курбатов, В. Г. Основы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова.— Воронеж : Научная книга, 2015.— 122 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1.	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online (доступ осуществляется по адресу: https://biblioclub.ru/);
2.	Функциональный анализ, 4-6 / В.Г. Курбатов— Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.moodle.ru .
3.	Электронная библиотека технического ВУЗа «Консультант студента» (доступ осуществляется по адресу: https://www.studmedlib.ru/);
4.	Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: https://e.lanbook.com/).

№ п/п	Ресурс
5.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: http://www.ru/lib.vsu/ru
6.	Функциональный анализ 2023-2024 / В. Г. Курбатов. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.moodle.ru .

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: http://www.ru/lib.vsu/ru
2	Функциональный анализ 2023-2024 / В. Г. Курбатов. — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.moodle.ru .

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс

«Функциональный анализ 2023-2024», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.5.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения лекций: специализированная мебель, компьютер (ноутбук), мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения).

ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Google Chrome, Mozilla Firefox). ПО Adobe Reader

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I, ауд., 226, 329, 433, 435,

Учебная аудитория для проведения практических занятий: специализированная мебель, доска (меловая или маркерная)

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I, ауд. 226, 227, 319, 321, 323, 329, 428, 430, 433, 435

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Раздел 1. Множества Раздел 2. Метрические пространства Раздел 3. Пределы и полнота Раздел 4 Компактность Раздел 5. Принцип сжимающих отображений Раздел 6. Линейные ограниченные операторы Раздел 7. Основы спектральной теории Раздел 8. Интегральные операторы и уравнения Раздел 9. Евклидовы пространства Раздел 10. Линейные функционалы Раздел 11. Мера Лебега Раздел 12. Интеграл Лебега	ОПК-1 ОПК-3	ОПК-1.1 ОПК-1.3	<i>Контрольная 1, контрольная 2</i>
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет и экзамен				<i>Перечень вопросов см. ниже.</i>

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Образцы вариантов контрольных

Образец заданий к контрольной 1

1. Найдите мощность множества точек, лежащих на графике непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Вычислите расстояние между функциями $x_1(t)=t+1$ и $x_2(t)=\cos t$ в пространстве $C[0,1]$.

- Докажите эквивалентность норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ в K^n .
- Докажите, что множество $\{x \in C[0,1] : x(t) < 1\}$ открыто.
- Сходится ли в C_2 последовательность $x^{(n)} = (2^{-n}, 2^{-n-1}, \dots)$?
- Сформулируйте определение точки прикосновения.
- Сформулируйте определение предела последовательности в нормированном пространстве.

Образец заданий к контрольной 2

- Докажите непрерывность функционала $f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_4$, заданного на l_∞ .
- В $C[0,1]$ вычислите норму оператора $(\mathcal{A}x)(t) = \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds$.
- Методом последовательных приближений решите следующее интегральное уравнение Вольтерра $x(t) = \int_0^t -x(s) ds + \frac{t^2}{2} + t$, $x_0(t) = 1$.
- Функцию $f(t) = \frac{\pi-t}{2}$ разложите в комплексный тригонометрический ряд Фурье в пространстве $C_2[0, 2\pi]$.
- Найдите сопряженный к следующему оператору, действующему в $C_2(-\infty, \infty)$: $(\mathcal{A}x)(t) = \alpha(t)x(t+h)$.

Требования к выполнению заданий контрольных (шкалы и критерии оценивания)

Оценка «зачтено» выставляется, если обучающийся выполнил не менее 2/3 всех предложенных заданий на контрольных или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочетов, при наличии четырех-пяти недочетов; допускает незначительные ошибки при оформлении работы; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине; если число ошибок и недочетов при выполнении контрольных работ превышает норму для оценки «зачтено» или обучающийся выполнил правильно менее 2/3 всех заданий и задач; допускает грубые ошибки при оформлении работы; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: зачет и экзамен.

Описание технологии проведения зачета

В случае хорошей посещаемости, активного поведения на занятиях и успешного написания двух контрольных зачет выставляется «по результатам работы в семестре». При плохой посещаемости и неудовлетворительного написания контрольных проводится дополнительное собеседование, состоящее в решении дополнительных задач типа тех, что были на контрольных, и проверке знания основных определений и теорем.

Перечень вопросов к экзамену

- Мощность множества. Понятие об аксиоме выбора.
- Определение метрического пространства. Примеры.
- Определение нормированного пространства. Примеры.
- Открытые и замкнутые шары и ограниченные множества в метрическом пространстве.
- Открытые множества в метрическом пространстве.
- Замкнутые множества в метрическом пространстве.
- Свойства открытых и замкнутых множеств в метрическом пространстве.

8. Предельные точки, эквивалентность трех определений. Связь между точками прикосновения, предельными и граничными точками. Равносильность трех определений замкнутого множества.
9. Плотные подмножества.
10. Предел последовательности в метрическом пространстве.
11. Эквивалентные метрики и нормы.
12. Сходимость в \mathbb{K}^n . Эквивалентность любых двух норм. Покоординатное вычисление предела.
13. Сходимость в \mathbb{R}^p . Особенности покоординатного вычисления предела в \mathbb{R}^p .
14. Сходимость в $C[a,b]$, связь с равномерной сходимостью. Свойства равномерной сходимости.
15. Пространство $C^1[a,b]$. Проверка аксиом нормы. Связь сходимости в $C^1[a,b]$ с равномерной сходимостью.
16. Полные метрические пространства. Отсутствие полноты пространства $C^1[a,b]$.
17. Пополнение метрического пространства. Теорема о существовании пополнения (без доказательства).
18. Определение банахова пространства. Пополнение нормированного пространства.
19. Предел и непрерывность функций. Равномерная непрерывность метрики. Определение непрерывности в терминах прообразов открытых и замкнутых множеств.
20. Два определения компактного множества в метрическом пространстве. Их равносильность.
21. Компактность и замкнутость.
22. Вполне ограниченные множества. Связь с компактностью.
23. Множество Кантора: определение и его мощность.
24. Определение компактного множества в терминах выделения сходящихся подпоследовательностей (без доказательства). Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях (без доказательства).
25. Критерий компактности в \mathbb{K}^n .
26. Некомпактность шаров в \mathbb{R}^2 и $C[a,b]$.
27. Критерий компактности в $C[a,b]$.
28. Определение линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Непрерывные линейные операторы. Связь с ограниченностью.
29. Норма линейного оператора: основное свойство, эквивалентность трех определений.
30. Норма оператора, действующего в \mathbb{K}^n .
31. Нормы четырех операторов в $C[a,b]$.
32. Пространство линейных ограниченных операторов.
33. Обратимые линейные операторы Теоремы Банаха и Неймана.

34. Спектр и резольвентное множество.
35. Формула Бёрлинга--Гельфанда (без доказательства).
36. Спектр оператора Вольтерра. Решение интегральных уравнений 2-го рода с помощью ряда Неймана.
37. Интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром.
38. Определение евклидова пространства. Ортогональность. Свойства ортогональных систем. Единственность разложения по ортогональной системе, формула для коэффициентов.
39. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля.
40. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
41. Гильбертовы пространства.
42. Ортогональное дополнение. Прямая сумма и ортогональное дополнение.
43. Определение линейного функционала. Непрерывные линейные функционалы.
44. Сопряженное пространство. Теорема Рисса. Евклидов сопряженный оператор.
45. Строение открытых множеств на прямой.
46. Мера открытого множества на прямой.
47. Мера компактного множества на прямой.
48. Мера Лебега ограниченных множеств.
49. Измеримость и суммируемость неограниченных множеств.
50. σ -алгебры. Абстрактная мера. Аксиоматическое определение меры.
51. Измеримые функции.
60. Интеграл Лебега от простых функций.
61. Интеграл Лебега от измеримой функции.
62. Пренебрежимые множества и функции.
63. Пространство Лебега L_1 .
64. Пространство Лебега L_2 .

Образец билета к экзамену

1. Мера компактного множества на прямой.
2. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
3. Норма линейного оператора.

Описание технологии проведения экзамена

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Оценка «отлично» выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, содержащегося в основных и дополнительных рекомендованных литературных источниках, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы, за умение анализировать изучаемые явления в их взаимосвязи и диалектическом развитии, применять теоретические положения при решении практических задач; обучающийся подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «хорошо» выставляется за твердое знание основного (программного) материала, включая расчеты (при необходимости), за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы, за умение применять теоретические положения для решения практических задач; обучающийся демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «удовлетворительно» выставляется за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала, за слабое применение теоретических положений при решении практических задач; обучающийся подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в расчетах, за незнание основных понятий дисциплины; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-1.1 Демонстрирует знания, относящиеся к базовым дисциплинам математики, информатики и естественных наук

Вопросы с вариантами ответов

1. Множество A называют счетным, если

- а) существует биективное соответствие между ним и множеством натуральных чисел
- б) на нем задана метрика
- в) все его подмножества являются компактными
- г) каждая фундаментальная последовательность в нем имеет предел

Ответ: а)

2. Подмножество A метрического пространства называют открытым, если

- а) оно содержит каждую свою точку вместе с некоторой ε -окрестностью
- б) оно содержит все свои точки прикосновения
- в) оно содержит все свои граничные точки
- г) каждая фундаментальная последовательность в нем имеет предел

Ответ: а)

3. Как называют оператор вида $(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds$?

- а) интегральным
- б) оператором композиции
- в) оператором умножения
- г) сжимающим оператором

Ответ: а)

Вопросы с кратким текстовым ответом

1. Как называют множество, всякое покрытие которого открытыми множествами содержит конечное подпокрытие?

Ответ: Компактным

2. Как называют функцию, для которой прообраз любого промежутка вида $(-\infty, b)$ является измеримым множеством?

Ответ: Измеримой

ОПК-1.2 Осуществляет формализацию поставленной задачи и выбирает математические методы для ее решения.

Вопросы с вариантами ответов

1. Какую из следующих формул называют неравенством треугольника?

а) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

б) $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$

в) $\sum_{k=1}^n |c_k| \leq \|x\|$

г) $\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$

Ответ: а)

2. Из чего состоит сопряженное к нормированному пространству?

а) из всевозможных линейных ограниченных функционалов, определенных на этом пространстве

б) из операторов, действующих в этом пространстве

в) из всевозможных подмножеств этого пространства

г) из всевозможных подпространств этого пространства

Ответ: а)

3. Подмножество \mathbb{R}^n является компактным, если

а) оно замкнуто и ограничено

б) оно совпадает со всем \mathbb{R}^n

в) на нем задано скалярное произведение

г) оно непрерывно

Ответ: а)

4. Точку x_* называют неподвижной точкой отображения F , если

а) $F(x_*) = x_*$

б) $F(x_n) = 0$

в) $\rho(F(x), F(y)) \leq q \rho(x, y)$

г) $x_{n+1} = F(x_n)$

Ответ: а)

5. Что называют мерой Лебега ограниченного множества на прямой?

а) общее значение его внешней и внутренней мер

б) длину наименьшего отрезка, содержащего это множество

в) наибольшую длину содержащегося в нем интервала

г) число содержащихся в нем точек

Ответ: а)

6. Каким из перечисленных ниже свойств не обладает функция Дирихле

$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$, рассматриваемая на множестве определения $[-1, 1]$?

а) непрерывность

б) измеримость

в) суммируемость

г) ограниченность

Ответ: а)

Вопросы с кратким текстовым ответом

1. Как называют линейное пространство, на котором задана норма?

Ответ: Нормированным

2. Как называют нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность имеет предел?

Ответ: Полным или банаховым.

Описание технологии проведения:

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 50 минут

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности):

1 балл – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень

2 балла – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).