

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_ системного анализа и управления \_  
наименование кафедры, отвечающей за реализацию дисциплины

*Курбатов*

\_\_\_\_\_ Курбатов В.Г.  
подпись, расшифровка подписи

23.03.2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ФТД.01 Методы возмущений в управлении нелинейными системами  
*Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом*

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.03.02 Прикладная математика и информатика

2. Профиль подготовки/специализация: \_ Прикладная математика и компьютерные технологии \_

3. Квалификация выпускника: \_ бакалавр \_\_\_\_\_

4. Форма обучения: \_\_ очная \_\_\_\_\_

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: системного анализа и  
управления \_\_\_\_\_

6. Составители программы: Белоусова Е.П., к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_  
(ФИО, ученая степень, ученое звание)

7. Рекомендована: \_ Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и  
механики (протокол №5 от 22.03.2024) \_\_\_\_\_  
(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола)

8. Учебный год: 2026/2027 \_\_\_\_\_ Семестр(ы)/Триместр(ы): \_\_\_\_\_ 6 \_\_\_\_\_

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- знакомство с основными методами, применяемыми для исследования периодических и ограниченных на всей числовой оси решений нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
- знакомство с задачами оптимального управления, принципом минимума и принципом максимума Понтрягина;
- формирование умений и навыков использования математических и компьютерных методов в задачах анализа динамических систем, оптимизации и оптимального управления.

*Задачи учебной дисциплины:*

- обучить практическим методам исследованию поведения траекторий различных автономных систем;
- сформировать практические навыки использования современных технологий и пакетов прикладных программ для решения задач анализа динамических систем, оптимизации и оптимального управления;
- сформировать навыки и умения осуществления правильного выбора алгоритма и средств его реализации при решении задач управления и оптимизации.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к факультативной части.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-2	Способен подготовить элементы документации, проекты планов и программы проведения отдельных этапов работ	ПК-2.2	Проводит эксперименты в соответствии с поставленными задачами по отдельным этапам работ	<p>Знать: документацию, проекты планов и программы проведения отдельных этапов работ.</p> <p>Уметь: подготовить элементы документации, проекты планов и программы проведения отдельных этапов работ.</p> <p>Владеть: навыками проведения эксперименты в соответствии с поставленными задачами по отдельным этапам работ.</p>
ПК-3	Способен осуществить выполнение экспериментов и оформить результаты исследований и разработок	ПК-3.2	Применяет при обработке данных стандартное и оригинальное программное обеспечение.	<p>Знать: стандартное и оригинальное программное обеспечение.</p> <p>Уметь: применять при обработке данных стандартное и оригинальное программное обеспечение.</p> <p>Владеть: навыками выполнения экспериментов и оформления результатов исследований и разработок.</p>

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (в соответствии с учебным планом) —   1   /  36 .

Форма промежуточной аттестации *зачет* \_\_\_\_\_

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		6 семестра	№ семестра	...
Аудиторные занятия	16	16		
в том числе:	лекции			
	практические			
	лабораторные	16	16	
Самостоятельная работа	20	20		
Форма промежуточной аттестации (зачет.)				
Итого:	36	36		

### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
<b>1. Лабораторные занятия</b>			
1.1	Нелинейные автономные системы.	Сосредоточенные системы. Системы с запаздыванием. Распределенные системы.	Методы возмущений в управлении нелинейными системами ФТД.01
1.2	Методы исследования устойчивости автономных систем.	Второй метод Ляпунова. Теорема Четаева о неустойчивости. Реактор с постоянным отводом тепла. Модель Вольтерра конкурирующих видов.	Методы возмущений в управлении нелинейными системами ФТД.01
1.3	Задача оптимального управления.	Примеры задач оптимального управления.	Методы возмущений в управлении нелинейными системами ФТД.01
1.4	Элементарная задача оптимального управления.	Принцип минимума в элементарной задаче оптимального управления.	Методы возмущений в управлении нелинейными системами ФТД.01
1.5	Общая задача оптимального управления.	Принцип максимума Понтрягина. Связь между принципом максимума Понтрягина и классическим вариационным исчислением.	Методы возмущений в управлении нелинейными системами ФТД.01

\* заполняется, если отдельные разделы дисциплины изучаются с помощью онлайн-курса. В колонке Примечание необходимо указать название онлайн-курса или ЭУМК. В других случаях в ячейки ставятся прочерки.

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Нелинейные автономные системы.			2	4	6
2	Методы исследования устойчивости автономных систем.			2	4	6
3	Задача оптимального управления. Примеры.			3	4	7
4	Элементарная задача оптимального управления.			4	4	8
5	Общая задача оптимального управления.			5	4	9
	Итого:			16	20	36

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Курс предполагает отведение почти одинакового числа часов на аудиторную и самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами необходимые разделы.

Материал по каждой теме будет изучаться практически самостоятельно. Необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного в литературе материала.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

**15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины** (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Методы вычислительной математики [Электронный ресурс] / Марчук Г. И. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 608 с. — Книга из коллекции Лань - Математика. — ISBN 978-5-8114-0892-4. — <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=255">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=255</a> >.
2	Скубов, Д. Ю. Основы теории нелинейных колебаний [Электронный ресурс] / Скубов Д. Ю. — 1-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 320 с. — Книга из коллекции Лань - Физика. — ISBN 978-5-8114-1470-3. — <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=30203">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=30203</a> >.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Охорзин, В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Электронный ресурс] / Охорзин В. А. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 352 с. — Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированного специалиста 160400 — «Системы управления движением и навигации» и специальности 160403 — «Системы управления летательными аппаратами» .— Книга из коллекции Лань - Математика. — ISBN 978-5-8114-0814-6. — <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=294">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=294</a> >.
2	Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах [Электронный ресурс] / Копченова Н. В., Марон И. А. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 368 с. — Рек. НМС по математике Министерства образования и науки РФ в качестве уч.пособия для студентов вузов, обуч. по направлениям 510000 - "Естественные науки и математика", 550000 - "Технические науки", 540000 - "Педагогические науки" .— Книга из коллекции Лань - Математика. — ISBN 978-5-8114-0801-6. — <URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/96854">https://e.lanbook.com/book/96854</a> >.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1	Электронная библиотека рабочих учебных программ дисциплин. Режим доступа: <a href="http://smwww.main.vsu.ru">http://smwww.main.vsu.ru</a>
2	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: <a href="https://lib.vsu.ru">https:// lib.vsu.ru</a>
	Методы возмущений в управлении нелинейными системами Б1.В.06/ Е.П. Белоусова — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы, онлайн-курсы, ЭУМК

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Гелиг, Аркадий Хаимович. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем / А. Х. Гелиг, И. Е. Зубер, А. Н. Чурилов ; С.-Петерб. гос. ун-т. — СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. — 269 с. — Предм. указ.: с. 266-267. — Библиогр.: с. 244-265. — ISBN 5-288-04098-2, 300 экз.
2	Анищенко, Вадим Семенович. Знакомство с нелинейной динамикой : Лекции соросовского профессора / В. С. Анищенко. — М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. — 143 с. : ил. — Библиогр.: с. 174-175. — ISBN 5-93972-116-8

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Методы возмущений в управлении нелинейными системами ФТД.01», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория для проведения лабораторных работ: специализированная мебель, персональные компьютеры для индивидуальной работы с возможностью подключения к сети «Интернет», мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения).

ОС Windows 10, ОС Linux, ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами, таблицами и т.п. (MS Office, МойОфис, LibreOffice), ПО Matlab, ПО Free Pascal Microsoft Visual Studio Community Edition

В случае применения электронного обучения, дистанционных образовательных технологий допускается замена специально оборудованных помещений их виртуальными аналогами, позволяющими обучающимся осваивать умения и навыки, предусмотренные профессиональной деятельностью.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Нелинейные автономные системы.	ПК-2, ПК-3	ПК-2.2, ПК-3.2	Лабораторная работа
2.	Методы исследования устойчивости автономных систем.	ПК-2, ПК-3	ПК-2.2, ПК-3.2	Лабораторная работа
3.	Задача оптимального управления. Примеры.	ПК-2, ПК-3	ПК-2.2, ПК-3.2	Лабораторная работа
4.	Элементарная задача оптимального управления.	ПК-2, ПК-3	ПК-2.2, ПК-3.2	Лабораторная работа
5.	Общая задача оптимального управления.	ПК-2, ПК-3	ПК-2.2, ПК-3.2	Лабораторная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				Перечень вопросов Практическое задание

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Темы лабораторных работ

1. Задача об оптимальной остановке.
2. Исследование устойчивости уравнений Хилла и Матье.
3. Исследование уравнения переноса в атмосфере.
4. Управление процессом очистки сточных вод от органических загрязнений.
5. Разработка системы управления цепочки закупок.
6. Модели боевых действий
7. Сценарии распространения информации в социуме
8. Качественный и численный анализ моделей Лотки-Вольтерры

#### Технология проведения лабораторных работ

1. Обучающийся проводит анализ поставленной задачи и ее математической модели.
2. Обучающийся составляет алгоритм решения поставленной задачи.
3. Обучающийся реализует алгоритм на удобном ему языке программирования или с помощью известных ему пакетов прикладных программ.
4. Обучающийся проводит тестирование созданного им алгоритма на известных примерах.

### 20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:  
зачет

*(наименование оценочного средства промежуточной аттестации)*

#### Перечень вопросов к зачету:

1. Автономные системы. Положение равновесия.
2. Второй метод Ляпунова. Примеры.
3. Теорема Четаева. Примеры.

4. Замкнутые фазовые траектории. Критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий.
5. Теорема Ляпунова о предельной ограниченности.
6. Реактор с постоянным отводом тепла.
7. Качественные методы в динамике биологических систем.
8. Постановка задачи оптимального управления.
9. Примеры задач оптимального управления.
10. Элементарная задача оптимального управления. Принцип минимума.
11. Теорема о существовании решения в элементарной задаче оптимального управления.
12. Задача оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.
13. Задача оптимального управления. Связь между принципом максимума и классическим вариационным исчислением.
14. Задача оптимального управления со смешанными фазовыми ограничениями.
15. Задача оптимального управления. Теорема о достаточных условиях оптимальности.

### Контрольно-измерительные материалы № 1

1. Определить количество положений равновесия и типы траекторий системы

$$dN/dt = \delta N/l, \quad mc \, dT/dt = N - N_0.$$

2. Решить задачу оптимального управления

$$I(u) = \int_0^T (u^2 + tu) dt \rightarrow \inf, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T], \quad T > 2.$$

3. Провести исследования и построить оптимальное решение в задаче управления

$$I(u) = \int_0^T (4u_1 + 3u_2) dt \rightarrow \inf, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad t \in [0, T].$$

### Контрольно-измерительные материалы № 2

1. Определить количество положений равновесия системы

$$dN_1/dt = (k_1 - k_2 N_2) N_1, \quad dN_2/dt = (-k_3 + k_4 N_1) N_2$$

и их типы в зависимости от коэффициентов.

2. Решить задачу оптимального управления

$$I(u) = \int_{-1}^1 (u^2 t - ut^3) dt \rightarrow \inf, \quad |u| \leq 1/2.$$

3. Провести исследования и построить оптимальное решение в задаче управления

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t) u_1 u_2 dt \rightarrow \inf, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq A^2, \quad \varphi(t) \geq 0.$$

Описание технологии проведения

Подготовка к ответу на вопрос происходит в течение 30 минут в учебной аудитории. Затем собеседование с преподавателем.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Для оценивания результатов обучения на зачете используется шкала: «зачет», «незачет».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки и успешно применяет его для решения практических задач.</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Зачет</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Зачет</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует всем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки</i>	-	<i>Незачет</i>

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### Вопросы с вариантами ответов

Критерий оценивания	Шкала оценок
Верный ответ	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

1. Модель взаимодействия двух биологических видов

$$\dot{N}_1 = (k_1(N_1^* - N_1) - k_2 N_2)N_1$$

$$\dot{N}_2 = (k_3(N_2^* - N_2) - k_4 N_1)N_2$$

имеет несколько положений равновесия. А именно

а) 2

б) 3

в) 6

Ответ: а), б).

2. Любая модель, описывающая динамику биологических систем, предполагает обязательное взаимодействие видов между собой

а) да

б) нет

Ответ: б).

3. Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (k_1 - k_2 N_2)N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = (-k_3 + k_4 N_1)N_2 \end{cases}$$

носит название

- а) система Вольтерра
- б) система Дуффинга

Ответ: а).

4. Элементарная задача оптимального управления решается с использованием принципа

- а) максимума Понтрягина
- б) принципа минимума

Ответ: б).

5. Задача оптимального управления для модели, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений связана с

- а) классическим вариационным исчислением
- б) методом штрафных функций
- в) методом Пуанкаре

Ответ: а).

#### Вопросы с кратким текстовым ответом

Критерий оценивания	Шкала оценок
Верный ответ	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

1. Метод Пуанкаре исследования динамики нелинейных систем относится к качественным методам.

Ответ: нет.

2. Среди особых точек системы двух конкурирующих видов есть устойчивый фокус.

Ответ: нет.

3. Задача вида

$$I(u) = \int_a^b h(t, u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad u(t) \in U(t) \in R^r, \quad t \in [a, b]$$

является элементарной задачей оптимального управления.

Ответ: да.

4. Уравнение Эйлера для экстремалей и условия Вейерштрасса сильного минимума являются следствием принципа максимума.

Ответ: да.

*Описание технологии проведения:*



Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 50 минут

*Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:*

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности) :

1 балл – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень

2 балла – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**