

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

*Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии*



**Е.М. Семенов**  
11.04.2024 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.11 Теория графов**

**1. Код и наименование специальности:**

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

**2. Специализация:** Теория функций и приложения

**3. Квалификация выпускника:** \_Математик. Механик. Преподаватель

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

0503 теории функций и геометрии

**6. Составители программы:** Семенов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор

**7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета ВГУ,  
протокол № 0500-03 от 28.03.2024 г.

**8. Учебный год:** 2028/2029 уч. год

**Семестр(ы):** 9

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- ознакомление студентов с основными теоремами, проблемами и методами теории графов.
- овладение качественными математическими и естественно-научными знаниями, востребованными обществом.

*Задачи учебной дисциплины:*

- формирование у студентов системы представлений о начальных понятиях и фактах теории графов;
- формирование способности действовать алгоритмически при решении некоторых основных оптимизационных задач;
- формирование способности применять методы теории графов при решении нестандартных задач, задач занимательных и олимпиадного характера;
- воспитание самостоятельности и настойчивости студентов в достижении поставленной цели.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина Теория графов относится к части формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

Опирается на курсы: «Математический анализ», «Линейная алгебра» «Теория вероятностей» и помогает студентам решать конкретные задачи, возникающие в различных разделах математики

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1.	Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики	ПК-1.3.	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике	Знать: - базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. Уметь: - собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области теории функций. Владеть навыками: - практического проведения научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике.
ПК-2.	Способен проводить исследования по обработке и анализу научной информации и результатов исследований	ПК-2.1.	Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	Знать: - современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций.
		ПК-2.2.	Умеет разрабатывать	Уметь:

	методами теории функций.		математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	- разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования.  Владеть навыками: - проведения научно-исследовательской деятельности в области решения задач аналитического характера
ПК-3.	Способен к построению моделей и оптимальному решению теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии	ПК-3.1.	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	Знать: - современные методы разработки и реализации математических моделей.
		ПК-3.2.	Владеет навыками построения моделей прикладных процессов и навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач	Уметь: - строить модели и оптимальные решения теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии. Владеть навыками: - построения моделей прикладных процессов; - навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.**(в соответствии с учебным планом) — 4/144.

**Форма промежуточной аттестации** – экзамен.

### 13. Виды учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость (часы)		
		Всего	По семестрам	
			9 сем.	
Аудиторные занятия		40	40	
в том числе:	лекции	24	24	
	практические	16	16	
	лабораторные			
Самостоятельная работа		68	68	
в том числе: курсовая работа (проект)		-	-	
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 36 часов..)		36	36	
Итого:		<b>144</b>	<b>144</b>	

### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Неориентированные графы. Изоморфизм, степени, самодополнительные графы.	Дается определение графа, изоморфных графов и приводятся их простейшие свойства.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.2	Эйлеровы графы, деревья, хроматическое число.	Доказывается теорема об эйлеровых графах, дается определение и свойства хроматического числа графа.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.3	Цикломатическое число.	Дается определение и доказывается Теорема о цикломатическом числе графа.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.4	Планарные графы, формула Эйлера. Плоские графы.	Доказывается формула Эйлера и приводятся следствия из нее. Примеры неплоских графов	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.5	Ориентированные графы, порядковая функция.	Дается определение ориентированного графа и порядковой функции.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.6	Неплоские графы, теорема Понтрягина-Каратовского, хроматическое число плоского графа.	Доказывается теорема о хроматическом числе плоского графа.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.7	Функция Гранди.	Приводятся свойства функции Гранди и примеры на нахождение функций Гранди.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.8	Внутренние и внешние устойчивые множества, ядро графа.	Приводятся определения внутренне и внешне устойчивого множества и ядра графа.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.9	Игры на графе.	Доказывается теорема об игре на графе, анализируется игра НИМ.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.10	Теорема Кенига-Холла. Приложения к матрицам.	Доказывается теорема Кенига-Холла. Дается применение теоремы Кенига-Холла к матрицам.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.11	Теорема Биркгофа-фон Неймана	Доказывается теорема Биркгофа-фон Неймана.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
1.12	Выпуклые множества и крайние точки. Теорема Биркгофа-фон Неймана.	Теорема о бистохастических матрицах	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Неориентированные графы. Изоморфизм, степени, самодополнительные графы.	Дается определение графа, изоморфных графов и приводятся их простейшие свойства.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.2	Эйлеровы графы, деревья, хроматическое число.	Доказывается теорема об эйлеровых графах, дается определение и свойства хроматического числа графа.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>

2.3	Цикломатическое число.	Дается определение и доказывается Теорема о цикломатическом числе графа.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.4	Планарные графы, формула Эйлера. Плоские графы.	Доказывается формула Эйлера и приводятся следствия из нее. Примеры неплоских графов	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.5	Ориентированные графы, порядковая функция.	Дается определение ориентированного графа и порядковой функции.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.6	Неплоские графы, теорема Понтрягина-Каратовского, хроматическое число плоского графа.	Доказывается теорема о хроматическом числе плоского графа.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.7	Функция Гранди.	Приводятся свойства функции Гранди и примеры на нахождение функций Гранди.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.8	Внутренние и внешние устойчивые множества, ядро графа.	Приводятся определения внутренне и внешне устойчивого множества и ядра графа.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.9	Игры на графе.	Доказывается теорема об игре на графе, анализируется игра НИМ.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.10	Теорема Кенига-Холла. Приложения к матрицам.	Доказывается теорема Кенига-Холла. Дается применение теоремы Кенига-Холла к матрицам.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.11	Теорема Биркгофа-фон Неймана	Доказывается теорема Биркгофа-фон Неймана.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>
2.12	Выпуклые множества и крайние точки. Теорема Биркгофа-фон Неймана.	Теорема о бистохастических матрицах	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Неориентированные графы. Изоморфизм, степени, самодополнительные графы.	2	2	-	6	10
2	Эйлеровы графы, деревья, хроматическое число.	2	2	-	8	12
3	Цикломатическое число.	2	1	-	2	5
4	Планарные графы, формула Эйлера.	2	1	-	4	7
5	Ориентированные графы, порядковая функция.	2	1	-	6	9
6	Неплоские графы, теорема Понтрягина-Каратовского,	2	2	-	4	6

	хроматическое число плоского графа.					
7	Функция Гранди.	2	2	-	6	10
8	Внутренние и внешние устойчивые множества, ядро графа.	2	1	-	4	7
9	Игры на графе.	2	1	-	8	11
10	Теорема Кенига-Холла. Приложения к матрицам.	2	1	-	8	11
11	Теорема Биркгофа-фон Неймана	2	1	-	6	9
12	Выпуклые множества и крайние точки. Теорема Биркгофа-фон Неймана.	2	1	-	6	9
	Всего:	<b>24</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>68</b>	<b>144</b>

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях излагается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в течении семестра.

При изучении курса «Теория графов» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке или в системе «Электронный университет».

Самостоятельная работа организуется в следующих формах: самостоятельное изучение разделов теоретического материала, подготовка к практическим занятиям, подбор и изучение литературных источников, самостоятельное выполнение контрольной работы, подготовка к экзамену по дисциплине.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	<u><a href="#">Дистель, Рейнгард</a></u> . Теория графов / Рейнгард Дистель ; пер. с англ. О.В. Бородина .— Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2002 .— 335 с. : ил.
2.	<u><a href="#">Оре, Ойстин</a></u> . Графы и их применение / О. Оре ; Пер. с англ. Л. И. Головиной; Под ред. И. М. Яглома .— Новокузнецк : Новокузнец. физ.-мат. ин-т, 2000 .— 173, [1] с. : ил.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3.	<u><a href="#">Оре, Ойстин</a></u> . Теория графов / О. Оре ; Пер. с англ. И. Н. Врублевской; Под ред. Н. Н. Воробьева .— 2-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1980 .— 336 с. : ил.
4.	<u><a href="#">Уилсон, Р.</a></u> Введение в теорию графов / Р. Уилсон ; Пер. с англ. И.Г. Никитиной; Под ред. Г.П. Гаврилова .— М. : Мир, 1977 .— 207 с. : ил.
5.	Лекции по теории графов : учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В.А. Емеличев [и др.] .— М. : Наука : Физматлит, 1990 .— 382, [1] с. : ил., табл.
6.	Оре О. Графы и их применение. М.: 1965. – 170 с.
7.	Берж К. Теория графов и ее применение. М.: 1962. – 319 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
8.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – ( <a href="http://www.lib.vsu.ru/">http // www.lib.vsu.ru/</a> )
9.	Google, Yandex, Rambler
10.	ЭБС «Лань» : <a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>
11.	Электронный курс <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	<u><a href="#">Шевелев, Юрий Павлович</a></u> . Дискретная математика : учеб. пособие / Ю. П. Шевелев .— Москва : Лань, 2008 .— 591 с. : рис., табл.
2.	<u><a href="#">Асанов, М. О.</a></u> Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы [Текст] : — Москва : Лань, 2010 .— 368 с.

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение)

Все лекционные и практические занятия реализуются в активной и интерактивной формах.

Все лекции носят проблемный характер, стимулируют учебную исследовательскую деятельность студентов, поскольку изучение нового теоретического материала всегда строится как решение математической задачи, ранее для студентов не известной.

На практических занятиях используются индивидуальные задания, поисковая исследовательская работа, работа в группах. Дисциплина может реализовываться с

применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462>).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft Windows 10 Enterprise, LibreOffice 5 (*Writer (текстовый процессор), Math (редактор формул)*), браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

---

### **18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории со специализированной мебелью, аудитории соответствуют действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется Компьютерный класс (ауд.310) с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop> ); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/> ); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/> ); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.lazarus-ide.org/index.php> ); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.freepascal.org/faq.html> ); NetBeans IDE (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://netbeans.org/cddl-gplv2.html> ); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://docs.python.org/3/license.html> ); 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.gimp.org/about/> ); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://inkscape.org/about/license/> ); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://miktex.org/copying> ); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://texstudio.org/> ); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://maxima.sourceforge.net/faq.html> ); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://www.denwer.ru/faq/other.html> ); 1С: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions\\_licence.htm](https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm) ); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия [https://www.foxitsoftware.com/pdf\\_reader/eula.html](https://www.foxitsoftware.com/pdf_reader/eula.html) ); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf> ); WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://windjview.sourceforge.io/ru/> ); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.7-zip.org/license.txt> ); Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.mozilla.org/en-US/MPL/> ); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.vmware.com/download/open\\_source.html](https://www.vmware.com/download/open_source.html) ); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing\\_FAQ](https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ) ); Astra Linux Common Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/> ); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.postgresql.org/about/licence/> ); GeoGebra (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.geogebra.org/license> ); R (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.r-project.org/Licenses/> ); Wing-101 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://wingware.com/license/wing101> ); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://loginom.com/platform/pricing> ); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия)

---



При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Неориентированные графы. Изоморфизм, степени, самодополнительные графы.	ПК-2.	ПК-2.1. ПК-2.2.	Устный опрос.
2.	Эйлеровы графы, деревья, хроматическое число.	ПК-1. ПК-2. ПК-3.	ПК-1.3. ПК-2.2. ПК-3.1.	Опрос по материалам лекции
3.	Цикломатическое число.	ПК-1. ПК-2. ПК-3.	ПК-1.3. ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1, ПК-3.2	Устный опрос.
4.	Планарные графы, формула Эйлера. Плоские графы.	ПК-1. ПК-2. ПК-3.	ПК-1.3. ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1. ПК-3.2.	Устный опрос.
5.	Ориентированные графы, порядковая функция.	ПК-1. ПК-2. ПК-3.	ПК-1.3. ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1.	Устный опрос. Индивидуальные задания
6.	Неплоские графы, теорема Понтрягина-Каратовского, хроматическое число плоского графа.	ПК-1. ПК-2. ПК-3.	ПК-1.3. ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1. ПК-3.2.	Устный опрос.
7.	Функция Гранди.	ПК-2. ПК-3.	ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1. ПК-3.2.	Устный опрос.
8.	Внутренние и внешние устойчивые множества, ядро графа.	ПК-1. ПК-2. ПК-3.	ПК-1.3. ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1. ПК-3.2.	Устный опрос.
9.	Игры на графе.	ПК-1. ПК-2. ПК-3.	ПК-1.3. ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1. ПК-3.2.	Устный опрос. Индивидуальные задания
10.	Теорема Кенига-	ПК-1.	ПК-1.3.	Устный опрос.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
	Холла. Приложения к матрицам.	ПК-2 ПК-3.	ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1. ПК-3.2.	
11.	Теорема Биркгофа-фон Неймана	ПК-1. ПК-2. ПК-3	ПК-1.3. ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1. ПК-3.2.	Устный опрос.
12.	Выпуклые множества и крайние точки. Теорема Биркгофа-фон Неймана.	ПК-1. ПК-2. ПК-3.	ПК-1.3. ПК-2.1. ПК-2.2. ПК-3.1. ПК-3.2.	Фронтальный опрос.
	Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен			Вопросы к экзамену

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Примерный перечень вопросов опроса на практическом занятии

1. Понятие графа. Неориентированный и ориентированный графы.
2. Конечные, бесконечные графы.
3. Элементы графа. Соседние вершины.
4. Смежные и кратные ребра.
5. Смешанные графы.
6. Определение, степени, изоморфизмы.
7. Самодополнительные графы.
8. Эйлеровы графы.
9. Метрика графов.
10. Экстремальные графы.
11. Числа Рамсея.
12. Хроматическое число.
13. Деревья.
14. Цикломатическое число. (1,2)
15. Плоские графы, формула Эйлера.
16. Примеры неплоских графов.
17. Хроматическое число плоского графа.
18. Ориентированные графы, порядковая функция.
19. Функция Гранди.
20. Внутренне устойчивые множества.
21. Внешне устойчивые множества.
22. Ядро графа.
23. Игры на графе, игра Ним.
24. Паросочетания. Теорема Кенига-Холла.
25. Приложения к матрицам.

26. Бистохастические матрицы.
27. Теорема Биркгофа-фон Неймана.
28. Транспортные сети.
29. Теорема о насыщении.
30. Теорема о полустепенях.

### Пример индивидуальных заданий

#### Задание 1.

Доказать:

- 1) Всякий путь, соединяющий две вершины, содержит элементарный путь, соединяющий те же две вершины.
- 2) Всякий простой неэлементарный путь содержит элементарный *цикл*.

Ответить на вопросы:

- 1) Количество ребер полного графа с  $n$  вершинами?
- 2) Как называется вершина, не принадлежащую ни одному ребру?

#### Задание 2.

Доказать:

- 1) Всякий простой *неэлементарный* путь содержит элементарный *цикл*.
- 2) Всякий *простой* цикл, проходящий через некоторую вершину (или ребро), содержит *элементарный* (под-)цикл, проходящий через ту же вершину (или ребро).

Ответить на вопросы:

- 1) Что называется циклом?
- 2) Сколько рёбер в полном графе с 20 вершинами?

Описание технологии проведения

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением опросов по теоретическому материалу, выполнением индивидуальных заданий, содержащих вопросы по содержанию курса и задачи на доказательство.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении текущего контроля успеваемости используются следующие **показатели**:

- 1) знание основных понятий и определений;
- 2) умение использовать стандартные методы для решения типовых задач;
- 3) оптимальность хода решения;
- 4) логика рассуждений.

**Шкала оценивания:**

Зачтено: выполнение заданий и ответы в ходе опроса соответствуют перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, проводить доказательства, возможно с некоторыми ошибками.

Не зачтено: в ходе опроса ответы обучающегося не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины и проводится в форме экзамена.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### Перечень вопросов к экзамену

- 1) Определение, степени, изоморфизмы.
- 2) Самодополнительные графы.
- 3) Эйлеровы графы.
- 4) Метрика графов.
- 5) Экстремальные графы.
- 6) Числа Рамсея.
- 7) Хроматическое число.
- 8) Деревья.
- 9) Цикломатическое число. (1,2)
- 10) Плоские графы, формула Эйлера.
- 11) Примеры неплоских графов.
- 12) Хроматическое число плоского графа.
- 13) Ориентированные графы, порядковая функция.
- 14) Функция Гранди.
- 15) Внутренне устойчивые множества.
- 16) Внешне устойчивые множества.
- 17) Ядро графа.
- 18) Игры на графе, игра Ним.
- 19) Паросочетания. Теорема Кенига-Холла.
- 20) Приложения к матрицам.
- 21) Бистохастические матрицы.
- 22) Теорема Биркгофа-фон Неймана.
- 23) Транспортные сети.
- 24) Теорема о насыщении.
- 25) Теорема о полустепенях.

Примерное содержание контрольно-измерительного материала

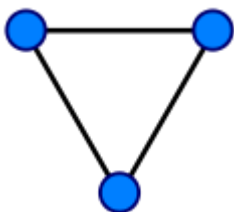
#### Билет 1.

1. Дать определение и сформулировать свойства неориентированного графа.
2. Доказать теорему Кенига-Холла.
3. Задача: Найти минимальное количество рёбер, которое нужно убрать из полного графа с 15 вершинами, чтобы он перестал быть связным.

Примерный ответ на задания:

1. Задание.

Схематично неориентированный граф можно изобразить, например, таким образом:



Граф или неориентированный граф  $G$  — это упорядоченная пара  $G = (V, E)$ , для которой выполнены следующие условия:

- $V$  это множество вершин или узлов,
- $E$  это множество пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) различных вершин, называемых рёбрами.

$V$  (а значит и  $E$ ) обычно считаются конечными множествами. Многие хорошие результаты, полученные для конечных графов, неверны (или каким-либо образом отличаются) для *бесконечных графов*. Это происходит потому, что ряд утверждений становятся ложными в случае бесконечных множеств.

Вершины и рёбра графа называются также элементами графа, число вершин в графе  $|V|$  — порядком, число рёбер  $|E|$  — размером графа.

Вершины  $u$  и  $v$  называются концевыми вершинами (или просто концами) ребра  $e = \{u, v\}$ . Ребро, в свою очередь, соединяет эти вершины.

Две концевые вершины одного и того же ребра называются соседними.

Два ребра называются смежными, если они имеют общую концевую вершину.

Два ребра называются кратными, если множества их концевых вершин совпадают.

Ребро называется петлёй, если его концы совпадают, то есть  $e = \{v, v\}$ .

Степенью  $\deg V$  вершины  $V$  называют количество рёбер, для которых она является концевой (при этом петли считают дважды).

Вершина называется изолированной, если она не является концом ни для одного ребра; висячей (или листом), если она является концом ровно одного ребра.

3. Задание.

Ответ: 14 ребер.

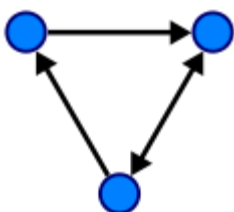
Билет 2.

1. Дать определение и сформулировать свойства ориентированного графа.
2. Доказать теорему о полустепенях.
3. Задача: определить количество ребер в графе, степени вершин которого равны : 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5?

Примерный ответ на задания:

1. Задание.

Ориентированный граф:



Ориентированный граф (сокращённо орграф)  $G$  — это упорядоченная пара  $G: = (V, A)$ , для которой выполнены следующие условия:

- $V$  это множество вершин или узлов,
- $A$  это множество (упорядоченных) пар различных вершин, называемых дугами или ориентированными рёбрами.

Дуга — это упорядоченная пара вершин  $(v, w)$ , где вершину  $v$  называют началом, а  $w$  — концом дуги. Можно сказать, что дуга  $v \rightarrow w$  ведёт от вершины  $v$  к вершине  $w$ .

Путём (или цепью) в графе называют конечную последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершин ребром.

Ориентированным путём в орграфе называют конечную последовательность вершин  $v_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), для которой все пары  $(v_i, v_{i+1})$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ) являются (ориентированными) рёбрами.

Циклом называют путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. При этом длиной пути (или цикла) называют число составляющих его *рёбер*. Заметим, что если вершины  $u$  и  $v$  являются концами некоторого ребра, то согласно данному определению, последовательность  $(u, v, u)$  является циклом. Чтобы избежать таких «вырожденных» случаев, вводят следующие понятия.

Путь (или цикл) называют простым, если ребра в нём не повторяются; элементарным, если он простой и вершины в нём не повторяются.

### 3.Задание.

Ответ: 18 ребер.

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация проводится в формате собеседования с преподавателем. Обучающийся получает 2 теоретических вопроса на знание понятий и определений, формулировок и доказательств теорем и одну задачу. Оценивание производится по пятибалльной шкале.

Время подготовки к ответу не должно превышать одного академического часа. При необходимости, в ходе ответа преподаватель может задавать уточняющие и дополнительные вопросы.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

При проведении промежуточной аттестации используются следующие **показатели**:

- 1) знание основных понятий, определений и свойств математических объектов;
- 2) корректность формулировок утверждений и теорем;
- 3) логика рассуждений в ходе доказательства;
- 4) умение решать задачи вычислительного и теоретического характера.

Критерии оценивания	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические	Повышенный уровень	отлично

знания для решения практических задач		
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), допускает не значительные ошибки при ответе.	Базовый уровень	хорошо
Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен дать ответ .	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки,	–	Неудовлетворительно

### 20.3. Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### 1. Теория графов является разделом:

- *элементарной математики*
- *дискретной математики*
- *математического анализа*
- *экономического анализа*

Правильный ответ: *дискретной математики*

#### 2. Родоначальником теории графов является:

- *Эйлер*
- *Кениг*
- *Гамильтон*
- *Берж*

Правильный ответ: *Эйлер*

#### 3. Математическая формализация понятия графа дана:

- *Эйлером*
- *Кенигом*
- *Гамильтоном*
- *Бержем*

Правильный ответ: *Бержем*

#### 4. Какой граф нельзя начертить одним росчерком:

- *граф, все вершины которого четные*
- *граф с одной нечетной вершиной*
- *граф с двумя нечетными вершинами*
- *граф с более, чем двумя нечетными вершинами*

Правильный ответ: *граф с двумя нечетными вершинами*

#### 5. Эйлер доказал, что задача о семи кенигсбергских мостах:

- *имеет одно решение*
- *имеет несколько решений*

- имеет бесконечно много решений
  - не имеет решений
- Правильный ответ: имеет несколько решений

**6. Хроматическим числом графа называется:**

- число красок, необходимых для «правильной» раскраски графа
  - максимальное число красок, необходимых для «правильной» раскраски графа
  - минимальное число красок, необходимых для «правильной» раскраски графа
- Правильный ответ: минимальное число красок, необходимых для «правильной» раскраски графа

**7. Число нечетных вершин графа:**

- всегда четно
  - всегда нечетно
  - может быть как четно, так и нечетно
  - равно нулю
- Правильный ответ: всегда четно

**8. Если полный граф имеет  $n$  вершин, то количество ребер равно:**

- $n$
  - $n/2$
  - $n(n-1)/2$
  - $(n-1)/2$
- Правильный ответ:  $n(n-1)/2$

**9. Сколько всего ребер в графе, степени вершин которого равны 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5?**

- 10
- 20
- 18

Правильный ответ: 18

**10. Эйлерова характеристика любого дерева равна**

- 2
- 3
- 1

Правильный ответ: 1

**11. Чему равна сумма степеней входа всех вершин графа, если сумма степеней выхода всех вершин равна 45?**

- 45
- 30
- 25

Правильный ответ: 45

**12. Вершину, не принадлежащую ни одному ребру, называют**

- изолированной



- висячей
  - отдельной
- Правильный ответ: изолированной

**13. В деревне Вишкиль 9 домов. Из каждого дома тянется четыре шланга к четырём другим домам. Сколько шлангов в деревне?**

- 16
- 18
- 36

Правильный ответ: 18

**14. Сколько рёбер в полном графе с 20 вершинами?**

- 180
- 200
- 190

Правильный ответ: 190

**15. Какое минимальное количество рёбер нужно убрать из полного графа с 15 вершинами, чтобы он перестал быть связным?**

- 18
- 14
- 15

Правильный ответ: 14

**16. Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень, называется**

- регулярным
- двудольным
- звёздным

Правильный ответ: регулярным

**17. Если полный граф имеет  $n$  вершин, то количество ребер будет равно:**

- $n$
- $n/2$
- $n(n-1)/2$
- $(n-1)/2$

Правильный ответ:  $(n-1)/2$

**18. Для того, чтобы граф обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы:**

- а) степени всех вершин были нечетными
- б) степени ровно двух вершин были четными
- в) степени всех вершин были четными
- г) степени ровно двух вершин были нечетными

Правильный ответ: в) степени всех вершин были четными

**Количество циклов в любом дереве  $D$ :**

- а) 1; б) 0; в) 2; г) 3

**19. Цикломатическое число графа равно**

- а) количеству компонент связности
- б) размерности пространства базисов циклов графа
- в) количеству циклов в графе
- г) количеству ребер в цикле

Правильный ответ: б) размерности пространства базисов циклов графа

## 20. Установите соответствие между элементами столбцов:

Граф	Характеристика
1. полный граф	А. каждая пара вершин соединена ребром
2. нулевой граф	Б. каждая пара вершин соединена хотя бы одним путем
3. связный граф	В. Ребра графа имеют направление, изображаемое стрелками
4. плоский граф	Г. схема, состоящая из изолированных вершин
5. дерево	Д. связный граф, не содержащий циклов
6. Эйлеров граф	Е. связный граф, содержащий путь, по которому можно пройти все ребра по одному разу, выйдя из любой вершины и вернувшись в нее же
7. ориентированный граф	Ж. можно представить на плоскости в таком виде, при котором ребра пересекаются только в вершинах

## 21. Впишите в текст пропущенные слова, изменив, если нужно, их падеж.

Теория графов, как и любая другая математическая дисциплина, включает в себя необходимые понятия  — это совокупность конечного числа точек, называемых  графа, и попарно соединяющих некоторые из них линий, называемых  графа  — это число ребер, которые выходят из данной вершины  данного графа называется граф, состоящий из  и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить  граф. Многоугольник плоского графа, не содержащий внутри себя никаких  или ребер  называется  . Последовательность  , соединенных без повторов  , это путь.  —  , в котором совпадают начальная и конечная точка. Граф со стрелками называется  , а  .

**Словарь:** граф, вершины, ребра, степень вершины, дополнение, полный, грань, цикл, путь, ориентированный, неориентированный.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

### 1) Тестовые задания.

- Задания закрытого типа – средний уровень сложности (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

- Задания закрытого типа - средний уровень сложности (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- за каждый верный ответ ставится 1 балл, при этом за каждый неверный ответ вычитается 1 балл;
- 0 баллов — не выбрано ни одного верного ответа.

- Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

- Задания открытого типа (короткий ответ):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

## 2) Расчетные задачи ситуационные, практико-ориентированные задачи

- 5 баллов – выполнено верно (получен правильный ответ, обоснован (аргументирован) ход выполнения (при необходимости));
- 2 балла – выполнение задания содержит незначительные ошибки, но приведен правильный ход рассуждений, или получен верный ответ, но отсутствует обоснование хода его выполнения (если оно было необходимым), или выполнено не полностью, но получены промежуточные (частичные) результаты, отражающие правильность хода выполнения задания, или, в случае если состоит из выполнения нескольких подзаданий, 50% которых выполнено верно;
- 0 баллов – не выполнено или выполнено неверно (ход выполнения ошибочен или содержит грубые ошибки, значительно влияющие на дальнейшее его изучение).
  - повышенный уровень сложности:
- 10 баллов – задача решена верно (получен правильный ответ, обоснован (аргументирован) ход решения);
- 5 баллов – решение задачи содержит незначительные ошибки, но приведен правильный ход рассуждений, или получен верный ответ, но отсутствует обоснование хода ее решения, или задача решена не полностью, но получены промежуточные результаты, отражающие правильность хода решения задачи;
- 0 баллов – задача не решена или решение неверно (ход решения ошибочен или содержит грубые ошибки, значительно влияющие на дальнейшее изучение задачи).