МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии
_______Семенов Е.М.
11.04.2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.07 Элементы спектральной теории

1. Код и наименование специальности:
01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Специализация: **Т**еория функций и приложения

3. Квалификация выпускника: Математик. Механик. Преподаватель

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:
кафедра теории функций и геометрии

6. Составители программы: Сухочева Л.И., к.ф.-м.н., доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим Советом математического факультета, протокол № 0500-06 от 28.03.2024 г.

8. Учебный год: 2027-2028 **Семестр(ы):** 7

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели освоения учебной дисциплины:

- дать глубокие знания студентам о методах, задачах и теоремах спектральной теории линейных операторов в гильбертовых пространствах;
- применение студентами полученных знаний при решении прикладных задач естествознания.

Задачи учебной дисциплины:

- научить студентов владеть теоретическим материалом;
- научить студентов решать задачи, использовать современные методы и подходы функционального анализа при решении прикладных задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина Элементы спектральной теории относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

Данный курс непосредственно связан с дисциплинами «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения с частными производными», изучаемыми в рамках программы подготовки.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1.	Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики	ПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Знать: - базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. Уметь: - собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области теории функций, в Владеть навыками: - практического проведения научно-исследовательской деятельности в математике
ПК-2.	Способен проводить исследования по обработке и анализу научной информации и результатов исследований методами теории функций.	ПК-2.1.	Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	Знать: - современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций
		ПК-2.2.	Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических	Уметь: - разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов

			моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	прикладных программ моделирования. Владеть навыками: -проведения научно-исследовательской деятельности в области решения задач аналитического характера.
ПК-3.	Способен к построению моделей и оптимальному решению теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии	ПК-3.1.	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	Знать: - современные методы разработки и реализации математических моделей. Уметь: - строить модели и оптимальные решения теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии. Владеть навыками: - построения моделей прикладных процессов; - навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах – 3/108.

Форма промежуточной аттестации - экзамен

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			7 семестр	…	…
Аудиторные занятия		32	32		
в том числе:	лекции	16	16		
	практические	16	16		
	лабораторные	0			
Самостоятельная работа		40	40		
Промежуточная аттестация		36	36		
Итого:		108	108		

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
		1. Лекции	
1.1	Гильбертово пространство. Линейный оператор	Неравенство Коши-Буняковского, слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Ограниченные и непрерывные операторы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791;

		Эквивалентность. Замкнутые линейные операторы. Свойства. Теорема Банаха.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
1.2	Сопряженный оператор.	Свойства сопряженного оператора. Примеры сопряженных операторов в различных пространствах .Основные теоремы о сходимости линейных операторов	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
1.3	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов. Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=67914 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
1.4	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Простейшие свойства самосопряженных операторов, свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция. Критерии существования самосопряженных расширений. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
1.5	Операторный пучок	Основные понятия и определения. Спектральная теория операторных пучков: спектр, регулярное множество, жорданова цепочка. Линеаризатор	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
1.6	Квадратичные операторные пучки.	Приемы и методы исследования спектральных свойств квадратичных операторных пучков. Задачи гидродинамики, приводящие к понятию операторного пучка.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
1.7	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре. Основные теоремы о спектре	Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
1.8	Максиминимальный принцип. Приложения	Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
		2. Практические занятия	
2.1	Гильбертово пространство. Линейный оператор.	Неравенство Коши-Буняковского, слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.2	Гильбертово пространство. Линейный оператор.	Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность. Замкнутые линейные операторы. Свойства. Теорема Банаха.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.3	Сопряженный оператор.	Определение. Существование и единственность. Свойства.	https://edu.vsu.ru/course/view.p

			hp?id=6791
2.4	Сопряженный оператор.	Пространство графика линейного оператора.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552;
2.5	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=67914 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552;
2.6	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552; h
2.7	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Простейшие свойства самосопряженных операторов, свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.8	Краевая задача и ее оператор	Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=67914 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.9	Квадратичные операторные пучки.	Примеры. .	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.10	Обобщенное решение операторного уравнения	Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве. Примеры. Представление обобщенного решения в виде ряда.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.11	Задачи на собственные значения	Свойства собственных элементов и собственных значений самосопряженных операторов. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=67914 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.12	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре.	Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=67914 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=285524 https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.13	Основные теоремы о спектре	Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791;

			https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552
2.14	Приложения	Задача Штурма-Лиувилля. Классические спектральные задачи математической физики. Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Гильбертово пространство. Линейный оператор	2	1	0	6	**9**
2	Сопряженный оператор.	2	1	0	6	**9**
3	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	2	2	0	6	**10**
4	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	2	6	0	8	**16**
5	Краевая задача и ее оператор. Квадратичные операторные пучки.	2	6	0	8	**16**
6	Обобщенное решение операторного уравнения Расширение положительно определенного оператора Задачи на собственные значения	2	6	0	8	**16**
7	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре. Основные теоремы о спектре	2	6		8	**16**
8	Максиминимальный принцип. Приложения	2	6		8	**16**
	Итого:	**16**	**16**	**0**	**40**	**108**

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Аудиторные и внеаудиторные (самостоятельные) формы учебной работы студента имеют своей целью приобретение им целостной системы знаний по дисциплине «Элементы спектральной теории». Используя лекционный материал, учебники, дополнительную литературу, проявляя творческий подход, студент готовится к практическим занятиям, рассматривая их как пополнение, углубление, систематизацию своих теоретических знаний. Студент должен прийти в ВУЗ с полным пониманием того, что самостоятельное овладение знаниями является главным, определяющим. Высшая школа лишь создает для этого необходимые условия.

Изучение каждой темы следует начинать с внимательного ознакомления с набором вопросов. Они ориентируют, показывают, что необходимо знать по данной теме. Вопросы темы как бы накладываются на соответствующую главу избранного учебника или учебного пособия. В итоге должно быть ясным, какие вопросы темы программы учебного курса, и с какой глубиной раскрыты в данном учебном материале, а какие вообще опущены.

Освоение дисциплины предполагает следующие направления работы:

- изучение понятийного аппарата дисциплины;
- изучение тем самостоятельной подготовки по учебно-тематическому плану;
- работу над основной и дополнительной литературой;
- изучение вопросов для самоконтроля (самопроверки);
- самоподготовка к практическим и другим видам занятий;
- самостоятельная работа студента при подготовке к экзамену;
- самостоятельная работа студента в библиотеке;
- изучение сайтов по темам дисциплины в сети Интернет.

Требуется творческое отношение и к самой программе учебного курса. Вопросы, составляющие ее содержание, обладают разной степенью важности. Есть вопросы, выполняющие функцию логической связки содержания темы и всего курса, имеются вопросы описательного или разъяснительного характера. Все эти вопросы не составляют сути, понятийного, концептуального содержания темы, но необходимы для целостного восприятия изучаемых проблем.

Проработка лекционного курса является одной из важных активных форм самостоятельной работы. Лекция преподавателя не является озвученным учебником, а представляет плод его индивидуального творчества. Он читает свой авторский курс со своей логикой со своими теоретическими и методическими подходами. Это делает лекционный курс конкретного преподавателя индивидуально-личностным событием, которым вряд ли студенту стоит пренебрегать. Кроме того, в своих лекциях преподаватель стремится преодолеть многие недостатки, присущие опубликованным учебникам, учебным пособиям, лекционным курсам.

Совершенно недостаточно только слушать лекции. Важно студенту понять, что лекция есть своеобразная творческая форма самостоятельной работы. Надо пытаться стать активным соучастником лекции: думать, сравнивать известное с вновь получаемыми знаниями, войти в логику изложения материала лектором, по возможности вступать с ним в мысленную полемику. Во время лекции можно задать лектору вопрос. Вопросы можно задать и во время перерыва (письменно или устно), а также после лекции или перед началом очередной. Лектор найдет формы и способы реагирования на вопросы студентов.

Важной составной частью освоения дисциплины являются практические занятия, которые требуют помимо знаний теоретического материала еще и навыков решения практических задач, что помогает глубже усвоить учебный материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

При подготовке к практическим занятиям следует повторить основные понятия по темам, рассмотреть примеры. Решая задачи, предварительно понять какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к ответам на все теоретические вопросы рассматриваемой темы.

<u>Методологические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов</u>

Методологические рекомендации призваны помочь студентам организовать самостоятельную работу при изучении курса: с материалами лекций и семинарских занятий, литературы по общим и специальным вопросам. Самостоятельная работа студента должна опираться на сформированные навыки и умения, приобретенные во время обучения в средней школе. В ВУЗе студент должен повысить уровень самостоятельности. Составляющим компонентом его работы должно стать творчество. Работая с литературой по теме занятий, делайте выписки текста, содержащего характеристику или комментарии уже знакомого Вам источника. Умение работать с литературой означает научиться осмысленно пользоваться источниками. Прежде чем приступить к освоению научной литературы, рекомендуется чтение учебников и учебных пособий.

Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения. Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей. Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развернутый план, тезисы, цитаты, конспект.

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

При подготовке к экзамену следует в полной мере использовать лекционный материал и академический курс учебника, рекомендованного преподавателем.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	*Копачевский Н.Д., Операторные методы математической физики / Копачевский Н.Д. – Симферополь, ООО «Форма», 140 с.* ***http://nikolay-d-kopachevsky.com/posobia.html***

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	*Копачевский Н.Д., Операторные методы в линейной гидродинамике. эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан .— М. : Наука, 1989 .— 413,[3] с. — Библиогр.: с. 398-410 .— Предм. указ. : с.411-413 .— ISBN 5-02-014203-4.*
3	*Покорный Ю.В., Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный [и др.] // .— .— 191 с. — Библиогр.: с. 184-187 .— Предм. указ.: с. 188-191.*
4	*Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: УРСС, 2004*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)**:**

№ п/п	Ресурс
5	*www.lib.vsu.ru – Зональная научная библиотека ВГУ*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	*Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: УРСС, 2004.*

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение): (

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

Изложение учебного материала основано на принципе системности, преемственности и последовательности и направлено на развитие интеллектуальных умений, профессиональных компетенций, формирование творческой личности высококвалифицированного специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Важнейшая цель преподавателя – систематизация большого объема теоретического материала и обучение студента умению ориентироваться в этом материале.

Рекомендуется использование, как традиционных форм организации лекционного материала, так и внедрение таких интерактивных технологий, как проблемная лекция, когда знания вводятся как «неизвестное», которое необходимо «открыть».

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6791; https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=28552). При реализации учебной дисциплины используются информационные электронно-образовательные ресурсы www.liv.vsu.ru и https://e.lanbook.com.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации используется учебная аудитория: специализированная мебель.

Для самостоятельной работы обучающихся – компьютерный класс, оснащенный оргтехникой, необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями, законодательно-правовой нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://ubuntu.com/download/desktop); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://ru.libreoffice.org/about-us/license/); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.lazarus-ide.org/index.php); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.freepascal.org/faq.html); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://docs.python.org/3/license.html); 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.gimp.org/about/); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://inkscape.org/about/license/); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://miktex.org/copying); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://texstudio.org/); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: http://maxima.sourceforge.net/faq.html); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: http://www.denwer.ru/faq/other.html); 1С: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия https://www.foxitsoftware.com/pdfreader/eula.html); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf); WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://windjview.sourceforge.io/ru/); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.7-zip.org/license.txt); Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.mozilla.org/en-US/MPL/); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.vmware.com/download/open_source.html); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ); Astra Linux Common Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.postgresql.org/about/licence/);

GeoGebra (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.geogebra.org/license); R (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.r-project.org/Licenses/); Wing-101 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://wingware.com/license/wing101); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://loginom.com/platform/pricing); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://downloads.mysql.com/docs/licenses/)

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Гильбертово пространство. Линейный оператор	ПК-1	ПК-1.1	-
2	Сопряженный оператор.	ПК-1	ПК-1.1	Практико-ориентированные задания. Устный/ письменный опрос
3	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	ПК-1	ПК-1.1	Практико-ориентированные задания Устный/ письменный опрос
4	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	ПК-1	ПК-1.1	Практико-ориентированные задания Устный/ письменный опрос
5	Краевая задача и ее оператор	ПК-2	ПК-2.1	Практико-ориентированные задания. Устный/ письменный опрос
6	Обобщенное решение операторного уравнения Расширение положительно определенного оператора Задачи на собственные значения	ПК-2	ПК-2.2	Практико-ориентированные задания. Устный/ письменный опрос
7	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре. Основные теоремы о спектре	ПК-3	ПК-3.1	Практико-ориентированные задания. Устный/ письменный опрос
8	Максиминимальный принцип. Приложения.	ПК-3	ПК-3.1	Практико-ориентированные задания. Устный/ письменный опрос
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				Перечень вопросов Практическое задание

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

1. Практико-ориентированные задания/домашние задания

Задача 1. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на [0;1] функций x(t) таких, что $\left|x(0)\right| \le K_1$, $\int\limits_0^1 \left|x'(t)\right|^2 dt \le K_2$ где $K_1, K_2 > 0$ – постоянные, компактно в пространстве C[0;1].

Указание. Согласно теореме Арцела-Асколи, для предкомпактности семейства функций $M \subset C[a;b]$ $\Leftrightarrow$ равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность этого семейства. Если предкомпактное множество замкнуто, то оно компактно.

Задача 2. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве вполне ограничено.

Указание. Единичная сфера S в пространстве l_2 ограничена. Рассмотрим точки вида e_k (где на k-ом месте в последовательности стоит 1, а на остальных - 0). Расстояние между любыми двумя различными точками e_m и e_n равно $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ для $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ в S не существует конечной ε-сети (в каждом шаре радиуса ε с центром в узле такой ε-сети будет лежать не более одной точки e_k).

Задача 3. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество относительно компактно.

Указание. В конечномерном пространстве компактность означает замкнутость и ограниченность, поэтому замыкание всякого ограниченного множества компактно.

Задача 4. Доказать, что следующие функционалы в пространстве C[-1;1] являются линейными и непрерывными; найти их нормы.

а) $f(x) = \frac{1}{3}\left[x(-1) + x(1)\right]$

Указание. Любой функционал вида $g[x;t_0] = x(t_0)$, очевидно, является линейным и непрерывным. f(x) является линейной комбинацией таких функционалов. $\| g[x;t_0] \| \equiv 1$. $\| f \| = 2/3$.

б) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$

Указание. Линейность следует из линейности интеграла Римана I(x;[a;b]). Функционал вида I(x;[a;b]) ограничен и имеет норму (b-a). $\| f \| = 2$

в) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t x(t)dt$

Указание. Любой функционал вида $J(x;y_0;[a;b]) = \int\limits_a^b y_0(t)x(t)dt$ линеен по x и ограничен. $\| J \| = \int\limits_a^b | y_0(t) | dt$. Таким образом, $\| f \| = 1$.

Задача 5. Пусть X – множество функций f(x), определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max_x |f(x)|$. Будет ли пространство X банаховым?

Ответ. Нет.
Указание. Докажем, что пространство X не будет полным. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$ = {$exp(- x^2)$, если |x|≤n; 0, если |x|>n}. Очевидно, что эта последовательность фундаметальна, но сходится к функции $f(x)=exp(- x^2)\notin$X.

Задача 6. Является ли пространство непрерывных на отрезке [0;1] функций гильбертовым пространством, если скалярное произведение задается следующим образом: $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$?

Ответ. Нет.
Указание. Если предположить, что C[0;1] с заданным таким образом скалярным произведением есть гильбертово, то имеем подпространство в гильбертовом пространстве L_2[0;1]. Можно подобрать последовательность непрерывных функций {f_n} из L_2, сходящуюся к разрывной функции $f(x)$ = {0, if x ≤ 1/2, 1, otherwise}. Таким образом, подпространство C[0;1] не полно ⇒ противоречие.

Задача 7. Показать, что если в гильбертовом пространстве H последовательность x_n слабо сходится к x и $||x_n||\to||x||$, то последовательность x_n сходится сильно, т.е. $||x_n - x|| \to 0$.
Указание. Предположим, что H сепарабельно. Тогда оно изоморфно пространству l_2. Поэтому достаточно доказать это утверждение для пространства l_2. Действительно, $||x_n - x||^2=(x_n-x,x_n-x)=||x_n||^2+||x||^2-2(x,x_n)= ||x_n||^2-||x||^2+2(x,x-x_n)\to0$ (т.к. согласно слабой сходимости, $(x,x_n-x) \to0$).

Задача 8. Доказать, что любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H достигает нормы на замкнутом единичном шаре.
Указание. Считаем, что пространство H сепарабельно. Функционал F(x)=(a,x) достигает нормы ||F||=||a|| на элементе a/||a||.

Задача 9. Найти норму оператора A, действующего в пространстве C[0;1], (или в пространстве L_2[0;1]): $Ax = tx(t)$.

Ответ. ||A|| = sup {||Ax|| (||x|| ≤ 1)} = 1.

Задача 10. Определить оператор A^* и нормы операторов A и A^*, если $A: l_2\to l_2$, где $A(x_1,\ldots,x_n,\ldots)= A(0,x_1,\ldots,x_n,\ldots)$.
Указание. Сопряженным к l_2 является пространство функционалов вида G(x)=(g,x), где $g\in l_2$. Нужно подобрать оператор A^* на множестве таких функционалов, такой что $(g,Ax)=(A^*g,x)$. Для функционала G(x)=(g,x), где $g=(g_1,g_2,\ldots,g_n,\ldots)$ положим $A^*G(x)=G'(x)=(g',x)$, где $g'=(g_2,g_3,\ldots, g_n,\ldots)$. Поскольку A переводит единичный шар в единичный шар, то ||A|| = 1. Поскольку оператор A ограничен и пространство l_2 банахово, то $||A^*|| = ||A|| = 1$.

Задача 11. В пространстве l_2 задан оператор A: $A(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots) = \left(0,\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\ldots,\frac{x_n}{n},\ldots\right)$.

Доказать, что оператор A компактен, найти его спектр.
Ответ. σ(A) = {0}.

Указание. Оператор A компактен, т.к. является композицией компактного оператора из задачи 52 и ограниченного оператора (сдвига). Поскольку оператор задан в гильбертовом пространстве и компактен, то число 0 входит в его спектр. Легко показать, что собственных значений у оператора нет: из $(A-\lambda I)x = 0$, $\lambda\neq 0$ следует $x = 0$.

Задача 12. Привести пример линейного, но не непрерывного функционала.
Пример. Пространство $\{P_i(x)\}$ всевозможных многочленов над **R**. Норма: $||P||=\max(|P(x)|)$ на отрезке [0;1/2]. Функционал $f(P) = P(1)$. Функционал f не является непрерывным. В самом деле, рассмотрим последовательность $P_n=x^n$. Очевидно, что $||P_n|| \to 0$, но $f(P_n)\to\infty$.

2. Вопросы устного, письменного опроса: Устно или письменно в виде развернутых ответов на вопросы с обоснованием и необходимыми примерам

1. Чем отличаются линейные многообразия от линейных подпространств?
2. Приведите пример линейного многообразия в пространстве C[0,1], которое не является подпространством.
3. Выполняется ли тождество параллелограмма в пространстве непрерывных функций?
4. Как осуществляется процесс ортогонализации?
5. Как применяется процесс ортогонализации для построения систем ортогональных многочленов?
6. В чем состоит экстремальное свойство коэффициентов Фурье?
7. Чем отличается ортонормированный базис от ортонормированной системы?
8. Как определяется ортогональное дополнение для произвольного множества гильбертова пространства?
9. Является ли это множество замкнутым?
10. Как определяется замкнутая ортонормированная система?
11. Приведите примеры ортонормированных базисов.
12. Является ли линейный ограниченный оператор в ЛНП непрерывным?
13. Верно ли обратное утверждение?
14. Как определяется норма ограниченного оператора?
15. Как оценивается норма интегрального оператора в пространстве квадратично суммируемых функций?
16. Как формулируется теорема о продолжении оператора по непрерывности?
17. Как определяются действия над линейными операторами?
18. При каких условиях полно пространство операторов?
19. Как определяется сопряженное пространство к ЛНП?
20. Почему оно всегда полное?
21. Как определяются поточечная и равномерная сходимости последовательностей операторов?
22. Как связаны эти понятия?
23. Как понимается поточечная полнота пространства операторов?
24. В чем смысл принципа фиксации особенности?
25. Как связана обратимость оператора с разрешимостью операторного уравнения?
26. Является ли переход к обратному оператору непрерывной операцией?

27. Как понимается близость оператора к единичному или обратимому
в соответствующих теоремах об обратимости?
28. Какой вид имеет оператор, обратный к оператору вида "единичный + интегральный с малой нормой"?
29. Как решаются интегральные уравнения с вырожденными ядрами?
30. Является ли регулярным значением число a, если
уравнение (A- a I)x=y имеет единственное решение при любой
правой части y ?
31. Как в доказательстве теоремы Хана - Банаха осуществляется
продолжение функционала на одно измерение?
32. В каком смысле функционал может разделять элемент и
подпространство?
33. Как определяется сопряженное пространство к линейному
нормированному пространству?
34. Как определяется норма в сопряженном пространстве?
35. Является ли сопряженное пространство полным?
36. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в
гильбертовом пространстве?
37. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в
пространстве непрерывных функций?
38. Как определяется второе сопряженное пространство?
39. Как осуществляется вложение банахова пространства во второе
сопряженное?
40. Как определяется сопряженный оператор?
41. Как связаны матрицы оператора и сопряженного оператора в
Rn ?
42. Как определяется слабая сходимость последовательностей
функционалов?
43. Как связаны слабая сходимость и сходимость по норме?
44. Как вопрос о сходимости квадратурных формул сводится к вопросу
о слабой сходимости функционалов?
45. При каком условии из слабой сходимости последовательности
элементов в гильбертовом пространстве следует ее сходимость по
норме?
46. Как определяется понятие слабой компактности множества
элементов?
47. Как определяется вполне непрерывный оператор?
48. Является ли он ограниченным?
49. Является ли единичный оператор вполне непрерывным?
50. На основании какого результата устанавливается полная
непрерывность интегрального оператора в пространстве непрерывных
функций?
51. Как устанавливается полная непрерывность оператора Гильберта - Шмидта?
52. Почему ядро оператора вида "единичный плюс вполне
непрерывный"является конечномерным подпространством?
53. Может ли ядро вполне непрерывного оператора быть
бесконечномерным?
54. Является ли образ оператора вида "единичный плюс вполне
непрерывный" замкнутым?
55. Следует ли из теоремы о спектре вполне непрерывного оператора
существование ненулевого собственного значения?
56. Может ли вполне непрерывный оператор для ненулевого
собственного значения иметь бесконечную линейно независимую

систему собственных векторов?
57. Пусть при некоторой фиксированной правой части операторное уравнение с оператором вида "единичный плюс вполне непрерывный" имеет единственное решение. Что можно сказать о разрешимости этого уравнения при любой правой части? Сохранится ли единственность?
58. Как формулируются условия разрешимости операторного уравнения.
59. Как определяется гильбертово сопряженный оператор?
60. На основании какой теоремы утверждается его существование?
61. Как устанавливается вещественность собственных значений самосопряженного оператора?
62. Как используется вещественность собственных значений ССО в доказательстве теоремы о регулярном значении?
63. Как устроен спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора?
64. Из каких результатов следует существование ненулевого собственного значения у самосопряженного вполне непрерывного оператора?

Оценка знаний, умений, навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущего контроля в форме устного/письменного опроса и проверки выполнения решений практических заданий.

Описание технологии проведения

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением опросов по теоретическому материалу, выполнением практических заданий.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено». Систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний обучающихся.

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении текущего контроля успеваемости используются следующие **показатели:**

1) знание основных понятий и определений;
2) умение использовать стандартные методы для решения типовых задач;
3) оптимальность хода решения;
4) логика изложения, рассуждений;

Критерии оценки компетенций (результатов обучения) при текущей аттестации:

Зачтено: выполнение практических заданий и ответы в ходе опроса соответствуют перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками.

Незачтено: в ходе опроса ответы обучающегося не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования. Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины и проводится в форме экзамена.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень вопросов:

1. Неравенство Коши-Буняковского.
2. Слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве.
3. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.
4. Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность.
5. Замкнутые линейные операторы.
6. Свойства. Теорема Банаха.
7. Определение. Существование и единственность. Свойства. Пространство графика линейного оператора.
8. Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек.
9. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов.
10. Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.
11. Простейшие свойства самосопряженных операторов,
12. Свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция
13. Критерии существования самосопряженных расширений.
14. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.
15. Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.
16. Симметрические и положительно определенные операторы. Примеры. Неравенство Фридрихса.
17. Функционал энергии. Энергетическое пространство. Главные и естественные краевые условия.
18. Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве. Примеры. Представление обобщенного решения в виде ряда.
19. Сопряженные и самосопряженный операторы. Расширение Фридрихса с сохранением нижней грани.
20. Свойства собственных элементов и собственных значений самосопряженных операторов. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.
21. Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения.
22. Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.
23. Принцип Куранта. Теорема о монотонности спектра. Спетральная задача с двумя положительными операторами.
24. Задача Штурма-Лиувилля. Классические спектральные задачи математической физики. Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида.

Примерный перечень задач:

Задача 1. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на [0;1] функций x(t) таких, что $|x(0)| \le K_1$, $\int_0^1 |x'(t)|^2 dt \le K_2$ где $K_1, K_2 > 0$ – постоянные, компактно в пространстве C[0;1].

Указание. Согласно теореме Арцела-Асколи, для предкомпактности семейства функций $M \subset C[a;b]$ $\Leftrightarrow$ равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность этого семейства. Если предкомпактное множество замкнуто, то оно компактно.

Задача 2. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве вполне ограничено.

Указание. Единичная сфера S в пространстве l_2 ограничена. Рассмотрим точки вида e_k (где на k-ом месте в последовательности стоит 1, а на остальных - 0). Расстояние между любыми двумя различными точками e_m и e_n равно $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ для $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ в S не существует конечной ε-сети (в каждом шаре радиуса ε с центром в узле такой ε-сети будет лежать не более одной точки e_k).

Задача 3. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество относительно компактно.

Указание. В конечномерном пространстве компактность означает замкнутость и ограниченность, поэтому замыкание всякого ограниченного множества компактно.

Задача 4. Доказать, что следующие функционалы в пространстве C[-1;1] являются линейными и непрерывными; найти их нормы.

а) $f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$

Указание. Любой функционал вида $g[x;t_0] = x(t_0)$, очевидно, является линейным и непрерывным. f(x) является линейной комбинацией таких функционалов. $\| g[x;t_0] \| \equiv 1$. $\| f \| = 2/3$.

б) $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$

Указание. Линейность следует из линейности интеграла Римана I(x;[a;b]). Функционал вида I(x;[a;b]) ограничен и имеет норму (b-a). $\| f \| = 2$

в) $f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$

Указание. Любой функционал вида $J(x;y_0;[a;b]) = \int_a^b y_0(t)x(t)dt$ линеен по x и ограничен. $\| J \| = \int_a^b |y_0(t)|dt$. Таким образом, $\| f \| = 1$.

Задача 5. Пусть X – множество функций f(x), определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max_x |f(x)|$. Будет ли пространство X банаховым?

Ответ. Нет.

Указание. Докажем, что пространство X не будет полным. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \{exp(-x^2)$, если $|x| \le n$; 0, если $|x| > n\}$. Очевидно, что эта последовательность фундаметальна, но сходится к функции $f(x) = exp(-x^2) \notin X$.

Задача 6. Является ли пространство непрерывных на отрезке [0;1] функций гильбертовым пространством, если скалярное произведение задается следующим образом: $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$?

Ответ. Нет.

Указание. Если предположить, что C[0;1] с заданным таким образом скалярным произведением есть гильбертово, то имеем подпространство в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$. Можно подобрать последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ из L_2, сходящуюся к разрывной функции $f(x)$ = {0, if $x \le 1/2$, 1, otherwise}. Таким образом, подпространство C[0;1] не полно $\Rightarrow$ противоречие.

Задача 7. Показать, что если в гильбертовом пространстве H последовательность x_n слабо сходится к x и $||x_n||\to||x||$, то последовательность x_n сходится сильно, т.е. $||x_n - x|| \to 0$.

Указание. Предположим, что H сепарабельно. Тогда оно изоморфно пространству l_2. Поэтому достаточно доказать это утверждение для пространства l_2. Действительно,
$||x_n - x||^2=(x_n-x,x_n-x)=||x_n||^2+||x||^2-2(x,x_n)= ||x_n||^2-||x||^2+2(x,x-x_n)\to 0$ (т.к. согласно слабой сходимости, $(x,x_n-x) \to 0$).

Задача 8. Доказать, что любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H достигает нормы на замкнутом единичном шаре.

Указание. Считаем, что пространство H сепарабельно. Функционал F(x)=(a,x) достигает нормы ||F||=||a|| на элементе a/||a||.

Задача 9. Найти норму оператора A, действующего в пространстве C[0;1], (или в пространстве $L_2[0;1]$): $Ax = tx(t)$.

Ответ. $||A|| = \sup \{||Ax|| \ (||x|| \le 1)\} = 1$.

Задача 10. Определить оператор A^* и нормы операторов A и A^*, если $A:l_2\to l_2$, где $A(x_1,\ldots,x_n,\ldots)= A(0,x_1,\ldots,x_n,\ldots)$.

Указание. Сопряженным к l_2 является пространство функционалов вида G(x)=(g,x), где $g\in l_2$. Нужно подобрать оператор A^* на множестве таких функционалов, такой что $(g,Ax)=(A^*g,x)$. Для функционала G(x)=(g,x), где $g=(g_1,g_2,\ldots,g_n,\ldots)$ положим $A^*G(x)=G'(x)=(g',x)$, где $g'=(g_2,g_3,\ldots, g_n,\ldots)$. Поскольку A переводит единичный шар в единичный шар, то ||A|| = 1. Поскольку оператор A ограничен и пространство l_2 банахово, то $||A^*|| = ||A|| = 1$.

Задача 11. В пространстве l_2 задан оператор A: $A(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)=\left(0,\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\ldots,\frac{x_n}{n},\ldots\right)$.

Доказать, что оператор A компактен, найти его спектр.

Ответ. $\sigma(A) = \{0\}$.

Указание. Оператор A компактен, т.к. является композицией компактного оператора из задачи 52 и ограниченного оператора (сдвига). Поскольку оператор задан в гильбертовом пространстве и компактен, то число 0 входит в его спектр. Легко показать, что собственных значений у оператора нет: из $(A-\lambda I)x = 0$, $\lambda\neq 0$ следует $x = 0$.

Задача 12. Привести пример линейного, но не непрерывного функционала.

Пример. Пространство $\{P_i(x)\}$ всевозможных многочленов над **R**. Норма: $||P||=\max(|P(x)|)$ на отрезке [0;1/2]. Функционал $f(P) = P(1)$. Функционал f не является непрерывным. В самом деле, рассмотрим последовательность $P_n=x^n$. Очевидно, что $||P_n|| \to 0$, но $f(P_n)\to\infty$.

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация по дисциплине преследует цель оценить работу обучающихся за курс, полученные обучающимися знания, умения и уровень приобретенных компетенций, их прочность, развитие творческого мышления, приобретение навыков самостоятельной работы, умение синтезировать полученные знания и применять их при решении практических задач.

Экзамен проводится в форме собеседования с преподавателем. Обучающийся получает два теоретических вопроса на знание понятий и определений, формулировок и доказательств утверждений и задачу из перечня практических заданий. По результатам ответа выставляется оценка по пятибалльной шкале.

Время подготовки к ответу не должно превышать одного астрономического часа. При необходимости, в ходе ответа преподаватель может задавать уточняющие и дополнительные вопросы.

При проведении промежуточной аттестации в форме экзамена используются следующие **показатели:**

1)знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
2) логика изложения;
3) корректность формулировок и доказательств утверждений и теорем;
4) умение связывать теорию с практикой;
5) умение иллюстрировать ответ примерами;
6) умение применять формулы, решать задачи.

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области комплексного анализа, корректно формулирует и доказывает утверждения, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач в области комплексного анализа	Повышенный уровень	Отлично
Ответ обучающегося не соответствует одному (двум) из перечисленных показателей, но студент дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ обучающегося не соответствует любым двум (трем) из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичные знания, или имеет не полное представлении понятий комплексного анализа, допускает существенные ошибки в решении задач	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ обучающегося не соответствует любым четырем и более из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки, не умеет решать задачи.	–	Неудовлетворительно

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Примерные тестовые задания

1. Выберите верный ответ из предложенных:

Будет ли компактным множество всех степеней x^n ($n \in \mathbf{N}$) в пространстве C[0;1].

1) Да;
2) Нет.

Ответ. Нет.
Решение. Из последовательности элементов любого полного компакта можно выделить сходящуюся в нем подпоследовательность. Но любая бесконечная подпоследовательность из $\{x^n\}$ сходится к разрывной функции f(x) = {1, if x = 1; 0 otherwise}.

2. Определите спектр оператора A, действующего в пространстве

l_2: $A(x_1,\ldots,x_n,\ldots)=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots,\frac{x_n}{n},\ldots\right)$.

Ответ. $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n=1/n,\ n\in N\}$.
Указание. Оператор A компактен, поэтому его спектр состоит из нуля и собственных значений. Числа λ_n являются собственными значениями, т.к. $Ker(A-\lambda_n I)\neq\{0\}$.

3. Вставьте пропущенное слово:

Дополнение множества регулярных точек оператора A до всей комплексной плоскости называется ………оператора A
Ответ: спектром (спектр)

4. Выберите верный ответ из предложенных:

Множество регулярных точек оператора A всегда:
- открыто;
- замкнуто.

5. Выберите верный ответ из предложенных:

спектр оператора A является:
- открытым множеством;
- замкнутым множеством.

6. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ равны

а) –1 и 3,
б) $1\pm 2i$,
в) $\pm\sqrt{5}$.

Ответ: а.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=(-1-\lambda)(3-\lambda)=0,$$

откуда $\lambda \in \{-1; 3\}$.

7. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ равны

а) $1 \pm 2i$,
б) –1 и 3,
в) $\pm\sqrt{5}$.

Ответ: в.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае
$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5 = 0,$$
откуда $\lambda = \pm\sqrt{5}$.

8. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ равны

а) –1 и 3,
б) $1 \pm 2i$,
в) $\pm\sqrt{5}$.

Ответ: б.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае
$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = 0,$$
откуда $\lambda = 1 \pm 2i$.

9. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ равны

а) –1 и 3,
б) $1 \pm 2i$,
в) $\pm\sqrt{5}$.

Ответ: б.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+4=0,$$

откуда $\lambda=1\pm 2i$.

10. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ равны

а) –1 и 3,
б) $1\pm 2i$,
в) $\pm\sqrt{5}$.

Ответ: в.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5=0,$$

откуда $\lambda=\pm\sqrt{5}$.

11. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ равны

а) $\pm i\sqrt{3}$,
б) –1 и 3,
в) $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: а.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+3=0,$$

откуда $\lambda=\pm i\sqrt{3}$.

12. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ равны

а) $\pm\sqrt{5}$,
б) –1 и 3,

в) $\pm i\sqrt{3}$.

Ответ: в.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+3=0,$$

откуда $\lambda=\pm i\sqrt{3}$.

13. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ равны

а) 1 и –3,
б) –1 и 3,
в) $\pm 3i$.

Ответ: а.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)^2-4=0,$$

откуда $\lambda\in\{1;-3\}$.

14. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ равны

а) 1 и –3,
б) –1 и 3,
в) $\pm 3i$.

Ответ: б.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=(-1-\lambda)(3-\lambda)=0,$$

откуда $\lambda\in\{-1;3\}$.

15. Собственные значения матрицы $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ равны

а) 1 и –3,

б) –1 и 3,
в) $\pm i\sqrt{3}$.

Ответ: в.

Решение.

Собственные значения матрицы *A* есть корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где *E* – единичная матрица. В данном случае

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+3=0,$$

откуда $\lambda=\pm i\sqrt{3}$.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

1) Тестовые задания.

<u>- Задания закрытого типа – средний уровень сложности (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):</u>

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

<u>- Задания закрытого типа - средний уровень сложности (множественный выбор):</u>

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- за каждый верный ответ ставится 1 балл, при этом за каждый неверный ответ вычитается 1 балл;
- 0 баллов — не выбрано ни одного верного ответа.

<u>- Задания закрытого типа (на соответствие):</u>

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

<u>- Задания открытого типа (короткий ответ):</u>

- 2 балла – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ