

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
математической физики и  
информационных технологий



С.А.  
Переселков  
28.06.2023г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.11.08 Интегральные уравнения и вариационное исчисление**

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

14.03.02 Ядерная физика и технологии

2. Профиль подготовки/специализация: Физика атомного ядра и частиц

3. Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: 0803 кафедра математической физики и информационных технологий.

6. Составители программы: Чернов Владислав Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор.

7. Рекомендована: Научно-методическим советом физического факультета, протокол №6 от 27.06.2023г, продлена НМС физического факультета, протокол №6 от 26.06.24.

8. Учебный год: 2025/2026 Семестр(ы): 4

### 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

- цель дисциплины – формирование у обучающихся знаний об основах интегральных уравнений и вариационного исчисления. Обучение студентов умению использования аппарата интегральных уравнений и вариационного исчисления в профессиональной деятельности.

- задачи дисциплины: изучить классификацию интегральных уравнений, изучить основные свойства симметричных и самосопряжённых операторов, освоить методы решения уравнения Фредгольма, уравнения Вольтера и уравнения типа свёртки, подготовить обучающихся к применению полученных знаний для решения задач естествознания.

### 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» относится к дисциплинам базовой части цикла Б1 основной образовательной программы подготовки бакалавров. Интегральные уравнения и вариационное исчисление относятся к числу фундаментальных разделов современной математики. Знание основ теории интегральных уравнений и вариационного исчисления является важной составляющей общей математической культуры выпускника.

### 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК1	Способен применять базовые знания в области физикоматематических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Владеет знаниями фундаментальных разделов математики.	Знает основные понятия теории интегральных уравнений и вариационного исчисления, которые используются для построения моделей и конструирования алгоритмов решения практических задач.
		ОПК-1.2	Создает и применяет математические модели в своей практической деятельности.	Умеет применять методы теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения практических задач.

		ОПК-1.3	Умеет оценивать границы применимости используемых математических моделей при решении типовых профессиональных задач.	Владеет навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения практических задач.
--	--	---------	--	--

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.** (в соответствии с учебным планом) — 2/72.

**Форма промежуточной аттестации:** зачёт.

**13. Виды учебной работы:**

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			4 семестр
Аудиторные занятия		44	44
в том числе:	лекции	14	14
	практические	30	30
	лабораторные	0	0
Самостоятельная работа		28	28
в том числе: курсовая работа (проект)		0	0
Форма промежуточной аттестации		0	0
Итого:		72	72

**13.1. Содержание дисциплины:**

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Введение в предмет. История. Основные понятия. Вариационное исчисление.	История развития вариационного исчисления. Труды Эйлера. Понятие функционала. Примеры функционалов. Линейный функционал. Вариация функционала. Ее вычисление с помощью параметра. Максимумы и минимумы функционалов. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Функционал Эйлера.	

1.2	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	Уравнение Эйлера для экстремалей. Частные случаи. Первый интеграл. Задача о брахистохроне. Функционал, зависящий от нескольких функций. Вариационная задача для такого функционала. Условный экстремум функционала. Геодезические линии. История развития интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма и уравнения Вольтерра первого и второго рода. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма. Характеристические значения и собственные функции уравнения Фредгольма. Случай	
-----	--	---	--

		вырожденного ядра.	
--	--	--------------------	--

1.3	Интегральные уравнения первого рода.	Теорема существования и единственности решения уравнения Фредгольма второго рода. Метод последовательных приближений. Резольвента. Решение через резольвенту. Симметричное ядро. Свойства характеристических значений и собственных функций в случае симметричного ядра. Спектр итерированных ядер. Теорема существования характеристического числа Лемма к теореме Гильберта-Шмидта. Следствия. Теорема Гильберта-Шмидта. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром.	
-----	--------------------------------------	---	--

1.4	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	Теорема существования и единственности для уравнения Вольтерра второго рода. Решение через резольвенту. Уравнения типа свертки по Фурье. Интегральные уравнения первого рода. Уравнение Абеля. Сведение уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода. Уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром. Неустойчивость решения уравнения первого рода.	
-----	--	---	--

## 2. Практические занятия

2.1	Введение в предмет. История. Основные понятия. Вариационное исчисление.	История развития вариационного исчисления. Труды Эйлера. Понятие функционала. Примеры функционалов. Линейный функционал. Вариация функционала. Ее вычисление с помощью параметра. Максимумы и минимумы функционалов. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Функционал Эйлера.	
-----	---	--	--

2.2	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	Уравнение Эйлера для экстремалей. Частные случаи. Первый интеграл. Задача о брахистохроне. Функционал, зависящий от нескольких функций. Вариационная задача для такого функционала. Условный экстремум функционала. Геодезические линии. История развития интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма и уравнения Вольтерра первого и второго рода. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма. Характеристические значения и собственные функции уравнения Фредгольма. Случай вырожденного ядра.	
2.3	Интегральные уравнения первого рода.	Теорема существования и единственности решения уравнения Фредгольма второго рода. Метод последовательных приближений. Резольвента. Решение через резольвенту. Симметричное ядро. Свойства характеристических значений и собственных функций в случае симметричного ядра. Спектр итерированных ядер. Теорема существования	
		характеристического числа Лемма к теореме Гильберта-Шмидта. Следствия. Теорема Гильберта-Шмидта. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром.	
2.4	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	Теорема существования и единственности для уравнения Вольтерра второго рода. Решение через резольвенту. Уравнения типа свертки по Фурье. Интегральные уравнения первого рода. Уравнение Абеля. Сведение уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода. Уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром. Неустойчивость решения уравнения первого рода.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Введение в предмет. История. Основные понятия. Вариационное исчисление.	3	6	0	6	15
2.	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	3	6	0	6	15
3.	Интегральные уравнения первого рода.	4	9	0	8	21

4.	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	4	9	0	8	21
	Итого:	14	30	0	28	72

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:

- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- методические указания и пособия;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Форма организации самостоятельной работы: подготовка к аудиторным занятиям; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к online занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Омельченко А.В., Методы интегральных преобразований в задачах математической физики / А.В. Омельченко. — Москва: МЦНМО, 2010. — 182 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=63290">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=63290</a> )
2	Вержбицкий В.М., Численные методы математической физики / В.М. Вержбицкий. — Москва: Директ-Медиа, 2013. — 212 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=214562">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=214562</a> )

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Зон Б.А., Лекции по интегральным уравнениям: учебное пособие для вузов / Б.А. Зон. — Москва: Высшая школа, 2004. — 92 с.
2	Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию: учебное пособие для студ. вузов / М.Л. Краснов. — Изд. 2-е, стер. — М.: КомКнига: URSS, 2006. — 301с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1	<a href="http://www.lib.vsu.ru">www . lib . vsu . ru</a> – ЗНБ ВГУ
2	<a href="http://e.lanbook.com/">http://e.lanbook.com/</a> - ЭБС «Лань»
3	<a href="http://www.book.ru/">http://www.book.ru/</a> - ЭБС «Book.ru»

#### 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
-------	----------

1	Задачи по интегральным уравнениям: учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сост. А.Ф. Курин. — Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2007. — 34 с
---	---

### **17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

### **18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Лекционная аудитории.

### **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-4	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольные работы
2.	Разделы 1-4		ОПК-1.2	Контрольные работы
3.	Разделы 1-4		ОПК-1.3	Контрольные работы
Промежуточная аттестация форма контроля — экзамен				Перечень вопросов Практическое задание

### **20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

#### **20.1 Текущий контроль успеваемости**

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Для оценивания результатов обучения на экзамене/зачете используются следующие показатели:

- 1) знание основных понятий теории интегральных уравнений и вариационного исчисления и их методов, которые используются для построения моделей и конструирования алгоритмов решения практических задач;
- 2) знание постановки классических задач;
- 3) знание методов формулировки и доказательства математических утверждений;
- 4) умение применять методы теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения задач профессиональной деятельности;
- 5) умение применять аппарат теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для доказательства утверждений и теорем;
- 6) владение навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения практических задач решения различных задач;
- 7) владение навыками использования методов решения классических задач теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения различных естественнонаучных задач.

Для оценивания результатов обучения на экзамене (зачете с оценкой) используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Для оценивания результатов обучения на зачете используется – зачтено, не зачтено. Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины.	Повышенный уровень	Отлично
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.	Базовый уровень	Хорошо



<p>Обучающийся частично владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.</p>	<p>Пороговый уровень</p>	<p>Удовлетворительно</p>
<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем (четырем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.</p>	<p>–</p>	<p>Неудовлетворительно</p>

## 20.2 Перечень вопросов к экзамену (зачету):

1. Понятие функционала. Примеры функционалов. Линейный функционал. Вариация функционала. Ее вычисление с помощью параметра.
2. Максимумы и минимумы функционалов. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления.
3. Функционал Эйлера. Уравнение Эйлера для экстремалей. Частные случаи.
4. Первый интеграл. Задача о брахистохроне.
5. Функционал, зависящий от нескольких функций. Вариационная задача для такого функционала.
6. Условный экстремум функционала. Геодезические линии.
7. Уравнения Фредгольма и первого и второго рода.
8. Уравнения Вольтерра.
9. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром.
10. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма.
11. Характеристические значения и собственные функции уравнения Фредгольма.
12. Теорема существования и единственности решения уравнения Фредгольма второго рода.
13. Метод последовательных приближений.
14. Резольвента. Решение через резольвенту.
15. Симметричное ядро. Свойства характеристических значений и собственных функций в случае симметричного ядра.
16. Теорема Гильберта-Шмидта и следствия из неё.

17. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром.
18. Теорема существования и единственности для уравнения Вольтерра второго рода.

Решение через резольвенту.

19. Уравнения типа свертки по Фурье.
20. Интегральные уравнения первого рода. Уравнение Абеля.
21. Сведение уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода.
22. Уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром.
23. Неустойчивость решения уравнения первого рода. Понятие о некорректных задачах.

### **20.3 Перечень практических заданий**

1. Вычисление вариации линейного функционала с помощью параметра.
2. Нахождение экстремума функционала с помощью уравнений Эйлера.
3. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром – решение методом последовательных приближений.
4. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром – решение через резольвенту.
5. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром.
6. Решение уравнения Вольтерра второго рода через резольвенту.
7. Уравнения типа свертки по Фурье.
8. Интегральные уравнения первого рода. Сведение уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода.
9. Уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром.

### **20.4 Тестовые задания**

**Контрольно-измерительный материал № 1.**

1. Найти вариацию функционала

$$J[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2) dx$$

2. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2) dx; y(1) = 1, y(2) = 0.$$

$$\int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{x-t}} = \sin x$$

3. Решить уравнение Абеля

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x-t) \varphi(t) dt = \frac{x}{6}$$

4. С помощью резольвенты решить уравнение

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 e^{\arcsin x} \varphi(t) dt = \operatorname{tg} x$$

5. Решить уравнение с вырожденным ядром

6. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения с вырожденным

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt = 0$$

ядром:

7. Решить интегральное уравнение Вольтерра типа свёртки:

$$\varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

$$\int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = \operatorname{sh} x$$

8. Решить интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода:

**Контрольно-измерительный материал № 2.**

1. Найти вариацию функционала

$$J[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + y'^2) dx.$$

2. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx; \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0$$

$$\int_0^x (x-t)^{1/4} \varphi(t) dt = x + x^2$$

3. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t) \varphi(t) dt = 1$$

Абеля

4. С помощью резольвенты решить уравнение

$$\varphi(x) - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \varphi(t) dt = 2x - \pi$$

5. Решить уравнение с вырожденным ядром:

6. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения с вырожденным

ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = 0$$

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

7. Решить интегральное уравнение Вольтерра типа свёртки:

8. Решить интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода:

$$\int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = \sin x.$$

## 20.5 Перечень заданий для контрольных работ

### Текущая аттестация № 1

1. Понятие о функционале. Вариационная производная. Уравнения Эйлера. Вариационный экстремум.
2. Уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода. Метод последовательных приближений.

### Текущая аттестация № 2

1. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Спектр и резольвента. Теорема Гильберта–Шмидта.
2. Уравнения типа свертки по Фурье. Уравнения Фредгольма и Вольтерра первого рода.

## ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ

### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление/специальность 14.03.02 Ядерные физика и технологии

Дисциплина Б1.О.11.08 Интегральные уравнения и вариационное исчисление.

Профиль подготовки Физика атомного ядра и частиц

Форма обучения очная

Учебный год 2024/2025

Ответственный исполнитель

Заведующий кафедрой  
математической  
физики и информационных  
технологий  
28.06.2023



технологий Переселков С.А.

Исполнители

Профессор кафедры математической физики и информационных технологий  
\_\_\_\_\_ Чернов В.Е. 28.06.2023

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП

по направлению/специальности \_\_\_\_\_ 2023  
*подпись                      расшифровка подписи*

Начальник отдела обслуживания ЗНБ \_\_\_\_\_ 2023 *подпись*  
*расшифровка подписи*

Программа рекомендована Научно-методическим советом физического факультета,  
протокол №6 от 27.06.2023г.