

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и операторных уравнений

 Каменский М.И.  
подпись, расшифровка подписи  
11.04.2024

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.ДВ.01.01.02 Разрешимость нелинейных уравнений**

1. Код и наименование направления подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки
2. Профиль подготовки: Математическое и компьютерное моделирование
3. Квалификация выпускника: Бакалавр
4. Форма обучения: очная
- 5 Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: функционального анализа и операторных уравнений
6. Составители программы: Леженина Ирина Федоровна к.ф.-м.н.
7. Рекомендована: НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 28.03.2024
8. Учебный год: 2027-2028 Семестр(ы): 7

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

*Целью курса является:*

-знакомство студентов с некоторыми методами исследования однозначной разрешимости нелинейных уравнений в банаховых пространствах.

*Задачами курса являются:*

- изучение основных понятий теории положительных операторов;
- использование этой теории для исследования обратимости линейных и нелинейных операторов;
- использование методов теории продолжаемости по параметру для исследования разрешимости уравнений.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина относится к модулю по выбору Б1.В.ДВ.01 Методы исследования математических моделей вариативной части блока Б1 Дисциплины (модули).

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения дисциплины:

Математический анализ (Дифференцируемость по Фреше, непрерывность),  
Функциональный анализ (Нормированные пространства, линейные ограниченные операторы, замкнутые операторы)

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен решать задачи, предполагающие выбор и многообразие актуальных способов решения задач математического моделирования	ПК -1.1	Изучает математические модели явлений реального мира, сред, тел и конструкций	Знать: основные закономерности теории положительных операторов  Уметь: строго доказывать основные утверждения, сформулированные в курсе  Владеть: основными методами, используемыми в теории положительно обратимых операторов и в теории продолжаемости по параметру
		ПК -1.2	Применяет теоретико-понятийный аппарат математической науки к широкому спектру задач математического моделирования	знать: постановки некоторых классических задач математики  уметь: применять методы теории положительно обратимых операторов к исследованию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений  владеть (иметь навык(и)): методами исследования нелинейных уравнений, в частности, методами исследования краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью теории положительных операторов

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 4/144.**

## Форма промежуточной аттестации экзамен.

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра 7	№ семестра	...
Аудиторные занятия	68	68		
в том числе:	лекции	34	34	
	практические	34	34	
	лабораторные			
Самостоятельная работа	40	40		
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 36 час.)	36	36		
Итого:	144	144		

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Пространства конусом	Определение и простейшие свойства конуса. Свойства отношения «полуупорядоченности». Воспроизводящий конус. Нормальный конус. Эквивалентная норма в пространстве с воспроизводящим и нормальным конусом.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11608">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11608</a>
1.2	Положительные операторы	Определение, свойства. Примеры. Теорема о непрерывности положительного оператора, переводящего воспроизводящий конус в конус. Теоремы об оценках спектрального радиуса линейного оператора.	
1.3	Теоремы об обратимости линейных операторов	Теорема о положительной обратимости линейных операторов. Применение к разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.	
1.4	Теоремы о разрешимости нелинейных уравнений	Сжатия на сравнимых элементах. Уравнения с положительно обратимыми операторами. Об условии Липшица для обратного оператора.	
1.5	Теоремы о локальном гомеоморфизме	Отображения, дифференцируемые по Фреше, и их свойства. Формула конечных приращений. Локальная теорема о неявной функции. Теорема о дифференцируемости неявной функции. Теорема об обратной функции (локальная). Теорема о локальном гомеоморфизме.	

1.6	Теоремы о связи локального и глобального гомеоморфизмов	Свойство продолжаемости. Теорема о существовании и единственности $p(t)$ . Теорема о продолжаемости для линейных отображений. Основная теорема о гомеоморфизме. Теоремы Адамара, Мейера, Пластока. Теорема о коэрцитивности по норме. Теорема о гомеоморфизме (для отображений, удовлетворяющих конусным неравенствам).	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11608">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11608</a>
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Пространства с конусом	Примеры конусов. Воспроизводящий конус. Нормальный конус. Эквивалентная норма в пространстве с воспроизводящим и нормальным конусом.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11608">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11608</a>
2.2	Положительные операторы	Примеры положительных операторов. Применение теоремы об оценке спектрального радиуса линейного оператора сверху.	
2.3	Теоремы об обратимости линейных операторов	Применение теоремы о положительной обратимости линейных операторов к исследованию обратимости матриц. Исследование разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.	
2.4	Теоремы о разрешимости нелинейных уравнений	Применение теоремы об уравнениях с положительно обратимыми операторами для исследования разрешимости краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений	
2.5	Теоремы о локальном гомеоморфизме	Отображения, дифференцируемые по Фреше. Применение локальной теоремы о неявной функции. Применение теоремы о локальном диффеоморфизме.	
2.6	Теоремы о связи локального и глобального гомеоморфизмов	Примеры отображений, обладающих свойством продолжаемости. Основная теорема о гомеоморфизме. Применение теорем Адамара, Мейера, Пластока к исследованию разрешимости задачи Коши.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1.	Пространства с конусом	4	4		6	14
2.	Положительные операторы	4	4		6	14
3.	Теоремы об обратимости линейных операторов	6	6		8	20
4.	Теоремы о разрешимости нелинейных уравнений	6	6		6	18
5.	Теоремы о локальном гомеоморфизме	6	6		6	18
6.	Теоремы о связи локального и глобального гомеоморфизмов	8	8		8	24

	Итого:	34	34		40	108
--	--------	----	----	--	----	-----

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Аудиторные занятия по дисциплине проводятся в виде лекций и практических занятий. На лекциях излагается теоретический материал, на практических занятиях разбираются примеры и решаются задачи по темам дисциплины.

Перед каждой лекцией студентам рекомендуется подробно изучить конспект предыдущей лекции, разобрать примеры.

Перед каждым практическим занятием рекомендуется проанализировать необходимый для занятия теоретический материал, разобрать решенные задачи, решить, заданные задачи, подготовить вопросы.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа/ М.А. Красносельский, П.П. Забрейко.- М. : Наука, 1975 .— 510 с.
2.	Красносельский, М.А. Положительные решения операторных уравнений : Гл. нелинейного анализа / М. А. Красносельский .— М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962 .— 394 с
2	Люстерник, Л.С. <i>Краткий курс функционального анализа : учебное пособие</i> / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев .— Изд. 2-е, стер. — СПб ; М. ; Краснодар : Лань, 2009 .— 270 <a href="https://e.lanbook.com/book/245#authors">https://e.lanbook.com/book/245#authors</a>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1.	Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— Москва : Физматлит, 2004 .— 570 с.
2.	Смагин, В.В. <i>Сжимающие отображения и их обобщения : учебное пособие для вузов : [для направления: 010100 - Математика; для специальности: 010101 - Математика]</i> / В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011 .— 47 с. <a href="https://lib.vsu.ru/cgi-bin/zgate?follow+4986+RU%5CVSU%5Celectr%5C429%5B1,12%5D+rus">https://lib.vsu.ru/cgi-bin/zgate?follow+4986+RU%5CVSU%5Celectr%5C429%5B1,12%5D+rus</a>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1.	ЭБС «Лань» <a href="https://e.lanbook.com">https://e.lanbook.com</a>
2.	электронный каталог ЗНБ ВГУ <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> -

#### 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1.	Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Д. Ортега, В. Рейнболдт ; Пер. с англ. Э.В. Вешкова, Н.П. Жидкова, И.В. Коновальцева; Под ред. И.В. Коновальцева .— М. : Мир, 1975 .— 558 с. : ил.
2.	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):** Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11608>) Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linex, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, Calc, Math, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория со специализированной мебелью. Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющей выход в глобальную сеть.

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Пространства с конусом	ПК -1	ПК -1.1	опрос
2.	Положительные операторы	ПК -1	ПК -1.1	Контрольная №1
3.	Теоремы об обратимости линейных операторов	ПК -1	ПК -1.1, ПК -1.2	Контрольная №1
4.	Теоремы разрешимости нелинейных уравнений	ПК -1	ПК -1.1, ПК -1.2	Контрольная №1
5.	Теоремы локальном	ПК -1	ПК -1.1	Контрольная №2

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
	гомеоморфизме			
6.	Теоремы о связи локального и глобального гомеоморфизмов	ПК -1	ПК -1.1, ПК -1.2	Контрольная №2
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				Перечень вопросов Практические задания

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: опрос, контрольные работы.

#### Комплект заданий для контрольных работ

##### Вариант 1

.....

Задание 1 Проверить, что в пространстве  $R^n$  множество векторов с неотрицательными координатами образуют конус.

Задание 2 Определение конуса.

Задание 3 Привести пример положительного оператора.

Задание 4 Доказать, что из условий  $x_n \leq y_n$ ,  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ , следует неравенство  $x \leq y$ .

Задание 5 Теорема об оценке спектрального радиуса линейного оператора сверху.

##### Вариант 2

.....

Задание 1. Определение воспроизводящего конуса.

Задание 2. Доказать, что любой телесный конус является воспроизводящим.

Задание 3. Определение положительного оператора.

Задание 4. Теорема об оценке положительного оператора сверху.

Задание 5. Показать, что конус неотрицательных функций в пространстве непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций является нормальным.

##### Вариант 3

Задание 1 Проверить, что в пространстве  $R^n$  множество векторов с неотрицательными координатами образуют конус.

Задание 2 Определение конуса.

Задание 3 Привести пример положительного оператора.

Задание 4 Свойства отношения " $\leq$ ".

Задание 5 Теорема об оценке спектрального радиуса линейного оператора сверху.

**Тема** Теоремы об обратимости линейных операторов. Теоремы о разрешимости нелинейных уравнений.

**Вариант 1**

---

Задание 1 Определение положительно обратимого оператора.

Задание 2 Теорема о положительно обратимом операторе.

Задание 3 Теорема о сжатии на сравнимых элементах.

Задание 4 Исследовать разрешимость краевой задачи  $x''+2x=0$ ,  $x(0)=x(1)=0$ .

**Вариант 2**

---

Задание 1 Теорема о положительно обратимых матрицах.

Задание 2 Теорема об уравнении с положительно обратимыми операторами.

Задание 3 Исследовать разрешимость краевой задачи  $x''-tx'-x=0$ ,  $x(0)=x(1)=0$ .

Задание 4 Пусть линейный оператор  $A: X \rightarrow Y$ , где  $X, Y$  – банаховы пространства. В пространстве  $Y$  задан конус  $K$ . Пусть оператор  $A$ - обратим.

Будет ли множество  $A^{-1}(K)$  конусом в пространстве  $X$

**Контрольная № 2**

Задание 1 Свойства функций дифференцируемых по Фреше.

Задание 2 Показать, что отображение  $F(x)=x^3$ , действующее из  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обладает свойством продолжаемости для любой непрерывной функции  $q:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Задание 3 Показать, что отображение  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x,y) = (e^x y, x^3 + \cos y)$  дифференцируемо по Фреше в пространстве  $\mathbb{R}^2$ .

Задание 4 Теорема о продолжаемости для линейных функций.

Задание 1 Показать, что отображение  $G(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $G(x,y) = (\exp(x)\cos(y), \exp(x)\sin(y))$  является локальным гомеоморфизмом в каждой точке пространства  $\mathbb{R}^2$

**20.2 Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по экзаменационным билетам

**Перечень вопросов к экзамену :**

1. Определение и простейшие свойства конуса.
2. Свойства отношения «полуупорядоченности».
3. Воспроизводящий конус. Нормальный конус. Примеры.
4. Эквивалентная норма в пространстве с воспроизводящим и нормальным конусом.
5. Теорема о непрерывности положительного оператора, переводящего воспроизводящий конус в конус
6. Теорема об оценке спектрального радиуса линейного положительного оператора.
7. Теорема об оценке спектрального радиуса линейного оператора.
8. Теорема о положительной обратимости линейных операторов.

9. Применение теоремы о положительной обратимости линейных операторов к разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
10. Сжатия на сравнимых элементах.
11. Уравнения с положительно обратимыми операторами.
12. Об условии Липшица для обратного оператора.
13. Отображения, дифференцируемые по Фреше, и их свойства.
14. Формула конечных приращений.
15. Локальная теорема о неявной функции.
16. Теорема о дифференцируемости неявной функции.
17. Теорема об обратной функции (локальная).
18. Теорема о локальном гомеоморфизме.
19. Свойство продолжаемости.
20. Теорема о существовании и единственности  $p(t)$ .
21. Теорема о продолжаемости для линейных отображений.
22. Основная теорема о гомеоморфизме.
23. Теорема Адамара.
24. Теорема Мейера
25. Теорема Пластока.
26. Теорема о гомеоморфизме (для отображений, удовлетворяющих конусным неравенствам).

Контрольно - измерительные материалы содержат один из теоретических вопросов и практическое задание.

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
подпись, расшифровка подписи

\_\_\_\_\_.\_\_\_\_.20\_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_1\_**

1. Определение конуса. Свойства. Примеры.
2. Доказать свойства отношения « $\leq$ ».

Преподаватель \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
подпись расшифровка подписи

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
подпись, расшифровка подписи

\_\_\_\_\_.\_\_\_\_.20\_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_2\_**

1. Докажите, выражение  $\|x\|_0 = \inf \|y\|$  определяет норму, эквивалентную исходной.  
- $y \leq x \leq y$
2. Пусть  $X$ - Банахово пространство,  $K$  телесный и нормальный конус, лежащий в  $X$ . Пусть  $x_0$  – внутренний элемент конуса  $K$ . Доказать, что  $\exists (C > 0) \forall (x \in X : \|x\| \leq 1) [-Cx_0 \leq x \leq Cx_0]$

Преподаватель \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*  
\_\_ . \_\_ . 20 \_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_3\_**

1. Доказать непрерывность линейного оператора переводящего воспроизводящий конус в конус.
2. Показать, что конус неотрицательных функций в пространстве  $C[a,b]$  является нормальным.

Преподаватель \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*  
\_\_ . \_\_ . 20 \_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_4\_**

1. Теорема о положительно обратимом операторе.
2. Пусть конус  $K$  – нормальный. Доказать, что из конусного неравенства  $-u \leq x \leq u$  вытекает неравенство  $\|x\| \leq (1+2N)\|u\|$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*  
\_\_ . \_\_ . 20 \_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_5\_**

1. Свойства функций дифференцируемых по Фреше.
2. Показать, что отображение  $F(x)=x^3$ , действующее из  $R \rightarrow R$ , обладает свойством продолжаемости для любой непрерывной функции  $q:[0,1] \rightarrow R$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_6\_**

1. Теорема об обратной функции.

2. Показать, что отображение  $F(x)=(1-x)^{-1}$  не обладает свойством продолжаемости для всех непрерывных функций  $q:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_

*подпись, расшифровка подписи*

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

*подпись, расшифровка подписи*

\_\_\_ . \_\_\_.20\_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_7\_**

1. Теорема о продолжаемости для линейных функций.

2. Показать, что отображение  $G(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $G(x,y) = (\exp(x)\cos(y), \exp(x)\sin(y))$  является локальным гомеоморфизмом в каждой точке пространства  $\mathbb{R}^2$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_

*подпись, расшифровка подписи*

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

*подпись, расшифровка подписи*

\_\_\_ . \_\_\_.20\_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_8\_**

1. Теорема о гомеоморфизме (основная).

1. Доказать, что отображение  $G(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$  является локальным гомеоморфизмом в каждой точке пространства  $\mathbb{R}^3$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_

*подпись, расшифровка подписи*

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

*подпись, расшифровка подписи*

\_\_\_ . \_\_\_.20\_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_9\_**

1. Теорема Адамара.

2. Показать, что отображение  $F(x)=2x+1$  обладает свойством продолжаемости для любой непрерывной функции  $q:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*  
 \_\_\_\_\_.20\_\_

Направление подготовки / специальность **02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Дисциплина **Б1.В.07** Разрешимость нелинейных уравнений

Форма обучения - **очная**

Вид контроля - **экзамен**

Вид аттестации - **промежуточная**

**Контрольно-измерительный материал №\_10\_**

1. Теорема Мейера.

2. Пусть  $F:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Показать, что отображение  $F$  коэрцитивно по норме тогда и только тогда, когда  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|Fx\| \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_  
*подпись, расшифровка подписи*

### Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Пороговый	Обучающийся способен понимать и интерпретировать освоенную информацию, что является основой успешного формирования умений и навыков для принятия решения практико-ориентированных задач.	«Удовлетворительно» заслуживает студент, обнаруживший знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой. Как правило, оценка «удовлетворительно» выставляется студентам, допустившим в ответе погрешности, но обладающими необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

Достаточный	Обучающийся способен анализировать, проводить сравнение и обоснование методов решения заданий в практико-ориентированных ситуациях.	«Хорошо» заслуживает студент обнаруживший знание учебно-программного материала, успешно выполняющий предусмотренные в программе задания, усвоивших основную литературу, рекомендованную к программе. Как правило, оценка «хорошо» выставляется студентам, показавшим систематических характер знаний по дисциплине и способных к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.
Повышенный	Обучающийся способен использовать сведения из различных источников для успешного исследования и поиска решения в нестандартных практико-ориентированных ситуациях.	«Отлично» заслуживает студент, обнаруживший всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоивший основную и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка «отлично» выставляется студентам, усвоившим взаимосвязь основных понятий дисциплины и их значении для приобретенной профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала..

«Неудовлетворительно» выставляется студенту, обнаружившему проблемы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившего принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности по окончании вуза без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

### **20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ**

ПК-1-Способен проводить работы по сбору, обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований в области математического моделирования физических и экономических процессов методами функционального анализа, а также реализовывать программно соответствующие математические алгоритмы

1) закрытые задания (тестовые):

1. Пусть  $E$  – банахово пространство. Конус  $K \in E$  называется неплющим, если

а)  $\exists(a > 0)\forall(x \in E)\exists(u, v \in K)[(x = u - v) \wedge (\|u\| \leq a \|x\|, \|v\| \leq a\|x\|)];$

б)  $\exists(b > 0)\forall(x \in E)\exists(y \in K)[(-y \leq x \leq y) \wedge (\|y\| \geq b\|x\|)];$

в)  $\exists(a > 0)\forall(x \in E)\exists(u, v \in K)[(x = u - v) \wedge (\|u\| \geq a \|x\|, \|v\| \geq a\|x\|)];$

г)  $\exists(b > 0)\forall(x \in E)\exists(y \in K)[(-y \leq x \leq y) \wedge (\|y\| \leq b\|x\|)];$

---

Множественный выбор: вариантов ответа четыре, среди них верных два.

2. Какие из перечисленных множеств являются конусом в пространстве  $R^2$ :

а)  $K = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\};$

б)  $K = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\};$

в)  $K = \{x = (x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\};$

г)  $K = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$

---

Множественный выбор: вариантов ответа три, среди них верный один.

3. Пусть линейный оператор  $A$  положительный относительно телесного и нормального конуса  $K \subset X$ . Пусть  $y_0$  – внутренний элемент конуса  $K$  и справедливо неравенство  $Ay_0 \leq \delta y_0$ . Тогда для спектрального радиуса  $A$  справедлива оценка

а)  $r(A) > \delta;$

б)  $r(A) \leq \delta;$

в) спектральный радиус оператора  $A$  не существует.

---

Множественный выбор: вариантов ответа четыре, среди них верных два.

4. Какие из приведенных конусов являются нормальными:

а) Конус  $K$  – неотрицательных функций в пространстве  $C^2[a, b]$  с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x''(t)|.$$

;

б) Конус  $K$  – неотрицательных функций в пространстве  $C[a, b];$

в) Конус  $K$  – неотрицательных функций в пространстве  $C^1[a, b]$  с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|;$$

г) Конус  $K$  – векторов с неотрицательными координатами в пространстве  $R^n$

---

Множественный выбор: вариантов ответа четыре, среди них верных два.

5. В пространстве  $R^3$  рассмотрим конус  $K$  – множество векторов с неотрицательными координатами. Операторы  $A, B : R^3 \rightarrow R^3$ . В каких случаях выполняется неравенство  $A \leq B$ .

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,2 \\ -1 & 3 & -1,8 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 2,2 & 1,4 & -2 \\ 0 & 3,1 & 6 \\ 0,3 & -5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

## 2) открытые задания:

1. Вставьте пропущенное слово.

В банаховом пространстве  $X$  с конусом  $K$  можно ввести эквивалентную норму по формуле

$$\|x\|_0 = \inf_{-u \leq x \leq u} \|u\|,$$

если конус  $K$  является воспроизводящим и «  
».

2. Вставьте пропущенное слово.

Пусть  $Y$  – банахово пространство и  $K_y$  – телесный и нормальный конус. Пусть линейные операторы  $A, C$ , действующие из нормированного пространства  $X$  с конусом  $K_x$  в пространство  $Y$ , удовлетворяют условиям

$$C \leq A, A^{-1} \geq 0$$

Оператор  $C$  положительно обратим тогда и только тогда, когда существует  $x_0 \in K_x$  такой что  $Cx_0$  – «  
» элемент конуса  $K_y$ .

3. Отображение  $F: X \rightarrow Y$  называется дифференцируемым по Фреше в точке  $x_0 \in X$ , если существует такой линейный «  
» оператор  $A: X \rightarrow Y$ , что  $\forall (x \in X)$  справедливо равенство  $F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x, x_0)$ , причем

$$\lim_{\|x - x_0\| \rightarrow 0} \frac{\|\omega(x, x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

4. Вставьте пропущенное слово. Будем говорить, что отображение  $F: D \subset X \rightarrow Y$  ( $X, Y$  – нормированные пространства) обладает свойством «  
» для данной непрерывной функции  $q: [0, 1] \rightarrow Y$ , если для любой функции  $p: [0, a) \rightarrow D$  ( $a \in (0, 1]$ ) такой, что  $\forall (t \in [0, a) Fpt = qt$ , существует  $\lim_{t \rightarrow a-0} pt = p(a) \in D$  и справедливо равенство  $Fpa = qa$ .

5. Оператор  $L: R^1 \rightarrow R^1$  задан формулой  $L(x) = Lx$ . Найдите производную Фреше этого оператора  $L'(x) = ?$

### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов – указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**

