МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
Математических методов исследования операций
Азарнова Т.В.
22.03.2024

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.20 Методы оптимизации

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.03.02 Прикладная математика и информатика

2 Профиль подготовки/специализация: Прикладная математика и компьютерные технологии

3 Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

4.Форма обучения: очная

5.Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: математических методов исследования операций

6.Составители программы: Азарнова Т.В., д.т.н., профессор кафедры математических методов исследования операций

7.Рекомендована: НМС факультета Прикладной математики, информатики и механики Протокол №5 от 22.03.2024.

8.Учебный год: 2026/2027 **Семестр:** 5,6

9.Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью освоения учебной дисциплины является: формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков в области решения оптимизационных задач и развитие компетенций применения методов оптимизации в практической деятельности и в научных исследованиях.

Задачи учебной дисциплины:

- изучить принципы и методы формирования и исследования математических моделей экстремальных задач, содержательной и формализованной постановки задач линейной, нелинейной, статической и динамической оптимизации;
- получить практические навыки применения принципов и методов построения математических оптимизационных моделей при постановке прикладных задач;
- получить навыки решения исследовательских и проектных задач оптимизации с применением средств компьютерного моделирования;
- получить навыки использования инструментальных программных средств в процессе решения экстремальных задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина Методы оптимизации относится к части блока Б1, обязательная часть. Для успешного освоения дисциплины необходимы знания дисциплин: «Математический анализ», «Дискретная математика», «Линейная алгебра».

11.Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2.	ОПК-1.2 Осуществляет формализацию поставленной задачи и выбирает математические методы для ее решения	*Знать:* принципы и методы: формирования и исследования математических моделей экстремальных задач; содержательной и формализованной постановки задач конечномерной и динамической оптимизации; теоретических основ и алгоритмов решения задач линейного, нелинейного программирования и оптимального управления; *Уметь:* применять принципы и методы построения математических моделей при решении прикладных задач; использовать базовые алгоритмы их решения; решать исследовательские и проектные задачи оптимизации с применением средств компьютерного моделирования; использовать инструментальные программные средства в процессе решения экстремальных задач *Владеть:* приемами формализации поставленной задачи, подбором наиболее адекватных методов оптимизации для их решения и применением инструментальных программных средств в процессе решения поставленных формализованных задач.
		ОПК-	Использует	*Знать:* современные математические

		1.3	современные математические инструментальные средства для решения поставленной задачи, анализирует и интерпретирует результаты	инструментальные средства решения задач: линейного и нелинейного программирования, динамической оптимизации; оптимального управления; *Уметь:* применять современные математические инструментальные средства при решении исследовательских и проектных экстремальных задач; *Владеть:* приемами формализации поставленной задачи, подбором наиболее адекватных инструментальных математических средств их решения и применением программных средств в процессе решения поставленных формализованных задач.
ОПК-3	Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1.	ОПК-3.1. Применяет современные технологии математического моделирования для решения задач в области профессиональной деятельности	*Знать:* принципы и методы сведения прикладных задач профессиональной области к задачам оптимизации; широкий спектр методов моделирования прикладных экстремальных задач профессиональной области; *Уметь:* применять математические оптимизационные модели при решении прикладных задач профессиональной области; решать исследовательские и проектные задачи с применением средств компьютерного моделирования; *Владеть:* приёмами математического моделирования задач профессиональной области в виде задач оптимизации.
		ОПК 3.2.	На основе требований к решению конкретной прикладной задачи выделяет основные направления модификации математической модели, осуществляет оценку качества модели	*Знать:* принципы и методы формализации требований к решению прикладных оптимизационных задач профессиональной области; методы и условия модификации математических моделей оптимизационных задач; методы оценки качества оптимизационных моделей; *Уметь:* применять принципы и методы формализации требований к решению прикладных оптимизационных задач профессиональной области; осуществлять модификацию математических моделей оптимизационных задач; проводить оценку качества оптимизационных моделей; *Владеть:* приёмами формализации требований к решению прикладных оптимизационных задач профессиональной области; методами модификации математических моделей оптимизационных задач; методами оценки качества оптимизационных моделей;
ОПК-5	Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	ОПК-5.1.	ОПК-5.1. Применяет фундаментальные знания для реализации математических методов и алгоритмов при решении прикладной задачи; осуществляет	Знать: фундаментальные подходы к решению оптимизационных задач, а также современные тенденции и направления в научных исследованиях, проводимых в мире; знать методы сравнения точности, сходимости и других характеристик вычислительных оптимизационных алгоритмов. Уметь: применять фундаментальные знания в области теории оптимизации для реализации математических методов и алгоритмов решения оптимизационных задач;

			сравнение точности, сходимости и других характеристик вычислительных алгоритмов	исследовать и разрабатывать математические методы и алгоритмы решения экстремальных задач; составлять вычислительные схемы алгоритмов решения сложных экстремальных задач; сравнивать точность, сходимость и другие характеристики вычислительных оптимизационных алгоритмов. Владеть: базовым аппаратом использования оптимизационных методов для решения прикладных задач профессиональной деятельности; аппаратом оценки различных характеристик методов и алгоритмов решения оптимизационных задач.

12.Объем дисциплины в зачетных единицах/час (*в соответствии с учебным планом)* **—** 6/216

Форма промежуточной аттестации - зачет, экзамен

13.Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)		По семестрам		…..
	Всего	В том числе в интерактивной форме	5 сем.	6 сем.	
Аудиторные занятия	96				
в том числе: лекции	48		16	32	
практические	32		16	16	
лабораторные	16		-	16	
Самостоятельная работа	84		40	44	
Форма промежуточной аттестации (зачет,экзамен)			зачет	экзамен	
Итого:	180		72	108	

13.1.Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Введение, основные определения. Общая постановка задачи оптимизации	Примеры оптимизационных задач. Общая постановка проблемы. Целевая функция, допустимое множество. Оптимальные точки. Разные формы записи. Эквивалентный переход от одной записи к другой. Постановка задачи с помощью функции Лагранжа.
2	Необходимые и достаточные условия оптимальности.	Задачи с ограничениями – равенствами. Принцип Лагранжа. Расширенная функция Лагранжа. Эквивалентность теорем. Задачи с ограничениями – неравенствами. Использование классического принципа Лагранжа для получения необходимых условий экстремума. Задача общего вида. Определение седловой точки функции Лагранжа. Достаточное условие экстремума в терминах седловой точки. Задачи выпуклого программирования. Теоремы об отделимости множеств. Теорема Куна – Таккера. Дифференциальный вариант теоремы Куна-Таккера. Условие оптимальности Ф.Джона. Возможные и подходящие направления. Условие оптимальности в терминах возможных и подходящих направлений. Теорема Куна-Таккера в задачах с линейными ограничениями
3	Задачи линейного программирования	Постановка задачи. Каноническая форма записи. Двойственная задача. Свойства пары двойственных задач. Алгоритм симплексного метода. Решение произвольной задачи методом искусственного базиса. Т

4	Методы одномерной оптимизации	Методы, использующие свойство унимодальности функций – метод золотого сечения, метод деления отрезка пополам. Метод секущих, метод Ньютона.
5	Методы многомерной безусловной оптимизации	Метод покоординатной оптимизации. Методы градиентного спуска: - с постоянным шагом; - с дроблением шага; - метод наискорейшего спуска. Методы сопряженных направлений; - общая схема метода; - метод Пауэлла; - метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса; - метод Ньютона.
6	Методы условной оптимизации	Методы, использующие линеаризацию исходной задачи: - метод секущих плоскостей; - метод линеаризации. Методы возможных направлений: - общая схема Зойтендейка; - решение задач с линейными ограничениями. Методы штрафов – внешних и внутренних.
7	Задачи вариационного исчисления (ВИ)	Простейшая задача вариационного исчисления. Принцип вариации. Основная лемма ВИ. Уравнение Эйлера. Задача Больца. Необходимые условия слабого минимума. Задача Лагранжа Использование принципа Лагранжа для получения необходимых условий слабого минимума. Задачи со старшими производными.
8	Задачи оптимального управления.	Постановка задачи. Основные определения. Элементарная задача оптимального управления. Использование принципа Лагранжа для получения необходимых условий экстремума. Принцип максимума Понтрягина.

13.2.Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Введение. Основные определения. Общая постановка задач оптимизации	4	2	-	8	14
2	Необходимые и достаточные условия оптимальности	10	4	-	20	34
3	Задачи линейного программирования	4	6	4	8	22
4	Одномерная оптимизация	4	2	2	4	12
5	Многомерная безусловная оптимизация	6	8	5	14	33
6	Методы условной оптимизации	8	4	5	14	31
7	Вариационное исчисление	8	4	-	10	22
8	Оптимальное управление	4	2	-	6	12
	итого	48	32	16	84	180

14.Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины *(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)*

При прохождении дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения лекций и лабораторных занятий, и осуществляется контроль посещаемости и выполнения всех видов самостоятельной работы. В течение занятий студенты решают задачи, указанные преподавателем к каждому занятию.

В рамках самостоятельной работы осуществляется повторение теоретического материала, излагаемого в курсе Методы оптимизации при подготовке к проведению практических и лабораторных работ.

15.Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Крутиков, В. Н. Методы оптимизации : учебное пособие / В. Н. Крутиков, В. В. Мишечкин. — 2-е изд., доп и перераб. — Кемерово : КемГУ, 2019. — 106 с. — ISBN 978-5-8353-2437-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL https://e.lanbook.com/book/135233
2	Прокопенко, Н. Ю. Методы оптимизации : учебное пособие / Н. Ю. Прокопенко. — Нижний Новгород : ННГАСУ, 2018. — 118 с. — ISBN 978-5-528-00287-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/164796
3	Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 512 с. — ISBN 978-5-8114-1887-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168850
4	Ренин, С.В. Методы оптимизации : сборник / Н. Д. Ганелина; С.В. Ренин .— Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011 .— 54 с. — ISBN 978-5-7782-1688-4 .— URL: https://rucont.ru/efd/205943

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	Кремлев, А. Г. Методы оптимизации / А. Г. Кремлев .— Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2012 .— 193 с. — ISBN 978-5-7996-0738-8 .— URL: https://rucont.ru/efd/209443
6	Методы оптимизации / Е.П. Белоусова, Т.И. Смагина .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017 .— 46 с. — 46 с. — URL: https://rucont.ru/efd/685297
7	Методы оптимизации : метод. указания / Н. В. Легков; Яросл. гос. ун-т .— Ярославль : ЯрГУ, 2008 .— 34 с. — URL: https://rucont.ru/efd/207090
8	Рейзлин, В. И. Численные методы оптимизации : учеб. пособие / Томский политехн. ун-т; В. И. Рейзлин .— Томск : Изд-во ТПУ, 2013 .— 112 с. — URL: https://rucont.ru/efd/278553
9	Кочегурова, Е. А. Теория и методы оптимизации : учеб. пособие / Томский политехн. ун-т; Е. А. Кочегурова .— Томск : Изд-во ТПУ, 2013 .— 134 с. — ISBN 978-5-4387-0237-5 .— URL: https://rucont.ru/efd/278540

в)информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

№ п/п	Ресурс
1	edu.vsu.ru
2	ЭБС Лань
3	ЭБС ЮРАЙТ
5	ЭБС Rucont

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы *(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)*

№ п/п	Источник
1	Методы оптимизации и исследование операции / И.Д. Коструб .— Воронеж : Издательский дом Воронежского государственного университета, 2014 .— 119 с. — 119 с. — URL: https://rucont.ru/efd/294540
2	Розова, В. Н. Методы оптимизации : курс лекций: учеб. пособие / И. С. Максимова; В. Н. Розова .— Москва : РУДН, 2010 .— 113 с. — ISBN 978-5-209-03872-6 .— URL: https://rucont.ru/efd/221341

17.Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

При реализации дисциплины используется классическая модель лекционных и практических занятий, могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети.

При проведении лабораторных занятий используются среды и языки программирования Pascal, Visual Studio, C/C++.

18.Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Лекционная аудитория должна быть оснащенной современным компьютером с подключенным к нему проектором с видеотерминала на настенный экран. Практические и лабораторные занятия должны проводиться в специализированной аудитории, оснащенной современными персональными компьютерами и программным обеспечением в соответствии с тематикой изучаемого материала. Предполагаемое оборудование для компьютерных классов: компьютер преподавателя; компьютеры учащихся, мультимедиа оборудование (проектор, средства звуковоспроизведения); доска магнитно-маркерная на стенде, 2-сторонняя, специализированная мебель.

19.Фонд оценочных средств:

19.1 Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

№	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикаторы достижения компетенции	Оценочные средства
1	Введение. Основные определения. Общая постановка задач оптимизации	ОПК-1, ОПК-3, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-5.1	Устные опросы на лекциях и на практических занятиях
2	Необходимые и достаточные условия оптимальности	ОПК-1, ОПК-3, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-5.1	Контрольная работа №1. Контрольная работа №2.
3	Задачи линейного программирования	ОПК-1, ОПК-3, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-5.1	Контрольная работа №3 Контрольная работа №4. Контрольная работа №5
4	Одномерная оптимизация	ОПК-1, ОПК-3, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-5.1	Контрольная работа №7 Лабораторная работа №1
5	Многомерная безусловная оптимизация	ОПК-1, ОПК-3, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-5.1	Контрольная работа №8 Лабораторная работа №2
6	Методы условной оптимизации	ОПК-1, ОПК-3, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-5.1	Контрольная работа №9 Лабораторная работа №3
7	Вариационное исчисление	ОПК-1, ОПК-3, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-5.1	Контрольная работа №10
8	Оптимальное управление	ОПК-1, ОПК-3, ОПК-5	ОПК-1.2, ОПК-1.3, ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-5.1	Устный опрос на лекционных и практических занятиях

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Примеры контрольных работ

Пример контрольной работы 1

Решить графически задачи нелинейного программирования:

1.
$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \to extr$$
$$(x_1-2)(x_2+1)\le 16,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

2.
$$|x_1-5|+x_2 \to extr$$
$$5x_1+3x_2 \le 24,$$
$$0 \le x_1 \le 3, x_2 \ge 0$$

Пример контрольной работы 2

Решить с помощью необходимых и достаточных условий экстремума следующие задачи с ограничениями неравенствами:

1.
$$(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+4x_2 \le 8$$
$$x_1+x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

2
$$(x_1+2)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+4x_2 \le 4$$
$$2x_1+x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

3
$$(x_1-4)^2+(x_2-7)^2 \to \min$$
$$2x_1+3x_2 \le 6$$
$$3x_1+x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

4
$$(x_1-3)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+x_2 \le 4$$
$$2x_1+x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

5
$$(x_1-4)^2+(x_2+6)^2 \to \min$$
$$x_1+3x_2 \le 3$$

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
6
$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
7
$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$5x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
8
$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
9
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 8)^2 \to \min$$
$$x_1 + 5x_2 \le 5$$
$$3x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
10
$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 8)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
11
$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
12
$$(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
13
$$2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$

$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

14

$$(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

15

$$(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

16

$$(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

16

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$3x_1 + x_2 \le 9$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

17

$$(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 + 5)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

18

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 10$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

19

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$5x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

20

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min$$
$$x_1 + 5x_2 \le 10$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

21
$$(x_1 - 4)^2 + 3(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

22
$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

23
$$(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 7)^2 \to \min$$
$$x_1 + 6x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

24
$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

25
$$(x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 5x_2 \le 5$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Пример контрольной работы №3

1. Решить симплекс- методом задачу ЛП, предварительно приведя ее к каноническому виду.

$$x_1 - x_2 - x_3 + ax_4 \to \max$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 2$$
$$bx_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \le 12$$
$$2x_1 + cx_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 6;$$
$$x_j \ge 0,\ \overline{j = 1,4}$$

	а	в	с		а	в	с		а	в	с		а	в	с
1	2	3	-1	6	5	2	3	11	2	1	2	16	3	3	1

2	3	1	1	7	4	3	6	12	3	3	4	17	4	1	2
3	4	2	-1	8	6	1	5	13	5	2	-1	18	3	1	0
4	7	2	3	9	2	2	2	14	7	1	5	19	4	1	3
5	8	3	4	10	5	3	7	15	6	3	8	20	5	2	6

Пример контрольной работы №4

1. Определить задачу, двойственную к задаче:

$$L(\bar{X}, M) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+m.$$

2. Найти оптимальное значение целевой функции исходной задачи, путем графического решения двойственной задачи:

$$\begin{aligned}
&x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \to \max,\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\\
&x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11,\\
&x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

3.Исследовать, является ли решением задачи линейного программирования вектор:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 14x_4 \to \max,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 2,\\
&x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 \leqslant -2,\\
&x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,\\
&\bar{X} = (0, 1, 1, 0).
\end{aligned}$$

4.Привести примеры двойственных пар, обладающих следующими свой-ствами.
1) обе задачи имеют решения;
2) одна задача имеет неограниченное допустимое множество, вторая – пу-стое множество;
3) допустимые множества обеих задач пустые;
4) допустимые множества обеих задач неограниченные.

Пример контрольной работы №5

1.Решить следующую транспортную задачу:

a_i \ b_j	51	37	84	58	145
71	3	6	4	6	4
87	1	1	5	3	5

75	3	2	8	8	1
85	8	2	1	3	6
57	5	4	3	3	3

Пример контрольной работы №6

1. Методом деления отрезка пополам и методом золотого сечения найти решение следующих задач.
   1) $f(x) = x^3 - 3\sin x \to \min, \quad x \in [0,1], ;$
   2) $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \to \min, \quad x \in [-1,0],$
   3) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x} \to \min, \quad x \in [0,5;1,5],$
   4) $f(x) = x^2 + e^{-x} \to \min, \quad x \in [0,1],$
   5) $f(x) = x^2 + x + \sin x \to \min, \quad x \in [-1;0],$
   6) $f(x) = x^2 - x + e^{-x} \to \min, \quad x \in [0;1],$
   7) $f(x) = \sin x \to \min, \quad x \in [-\pi; \dfrac{\pi}{2}],$
   8) $f(x) = (x-2)^2 \to \min, \quad x \in [0;3],$
   9) $f(x) = (x+5)^4 \to \min, \quad x \in [-6;2],$
   10) $f(x) = \cos x \to \min, \quad x \in [0;\pi],$
   11) $f(x) = (x-15)^2 + 5 \to \min, \quad x \in [12;20],$
   12) $f(x) = xe^x \to \min, \quad x \in [-2;0],$
   13) $f(x) = x^2 + 2x - 4 \to \min, \quad x \in [-2;1],$
   14) $f(x) = x^3 - x \to \min, \quad x \in [0;1],$
   15) $f(x) = x^5 - x^2 \to \min, \quad x \in [0;1],$
   16) $f(x) = -\dfrac{x}{e^x} \to \min, \quad x \in [0;3],$
   17) $f(x) = x^4 - x \to \min, \quad x \in [0;1],$
   18) $f(x) = \dfrac{x^4}{\ln x} \to \min, \quad x \in [1.1;1.5],$
   19) $f(x) = xe^{-x} \to \min, \quad x \in [-2;6],$
   20) $f(x) = xe^{-2x} \to \min, \quad x \in [-2;6],$
   21) $f(x) = (x-10)^2 + 4 \to \min, \quad x \in [8;12],$
   22) $f(x) = (x-5)^4 + 10 \to \min, \quad x \in [3;6],$
   23) $f(x) = 2\cos x \to \min, \quad x \in [0;\pi],$
   24) $f(x) = -\dfrac{x}{e^x} \to \min, \quad x \in [0;3],$

25) $f(x) = \dfrac{x^4}{\ln x} \to \min, \quad x \in [1.1;1.5].$

Содержание отчета

– цель работы;

– таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть отражены границы и длины интервалов на каждой итерации,

– соотношение длины интервала на k –1 итерации к длине интервала на k итерации;

– график зависимости количества вычислений целевой функции от логарифма задаваемой точности ε;

– выводы по всем пунктам задания.

Пример контрольной работы №7

1. Для следующих функций применить методы: покоординатного спуска, наискорейшего спуска или сопряженных градиентов, Ньютона-Рафсона:

1. $(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 \to min, \quad x^0 = (3{,}4)$
2. $(x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to min, \quad x^0 = (4{,}3)$
3. $(x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to min, \quad x^0 = (1{,}3)$
4. $(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 \to min, \quad x^0 = (1{,}2)$
5. $(x_2^2 + x_1^2 - 1) + (x_1 + x_2 - 1)^2 \to min, \quad x^0 = (0{,}3)$
6. $(x_2^2 + x_1^2 - 1) + (x_1 + x_2 - 1)^2 \to min, \quad x^0 = (3{,}1)$
7. $2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \to min, \; x^0 = (5{,}1)$
8. $2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \to min, \; x^0 = (1{,}5)$
9. $x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 \to min, \; x^0 = (2{,}0)$
10. $x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 \to min, \; x^0 = (1{,}4)$
11. $2(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 - 3x_1x_2 \to min, \; x^0 = (3{,}6)$
12. $2(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 - 3x_1x_2 \to min, \; x^0 = (2{,}5)$
13. $3(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 2x_1x_2 \to min, \; x^0 = (1{,}5)$
14. $3(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 2x_1x_2 \to min, \; x^0 = (1{,}5)$
15. $(x_1^2 - x_2)^2 + (2 - x_1)^2 \to min, \quad x^0 = (1{,}3)$
16. $(x_1^2 - x_2)^2 + (2 - x_1)^2 \to min, \quad x^0 = (3{,}3)$
17. $(x_2^2 + x_1^2 - 2) + (x_1 + x_2 - 2)^2 \to min, \quad x^0 = (0{,}3)$
18. $(x_2^2 + x_1^2 - 2) + (x_1 + x_2 - 2)^2 \to min, \quad x^0 = (1{,}3)$
19. $4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 \to min, x^0 = (1{,}3)$
20. $4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 \to min, x^0 = (2{,}5)$
21. $(x_1 - 1)^2 + 5(x_2 - 4)^2 - 2x_1x_2 \to min, \; x^0 = (2{,}5)$
22. $(x_1 - 1)^2 + 5(x_2 - 4)^2 - 2x_1x_2 \to min, \; x^0 = (0{,}5)$
23. $(x_2^2 + x_1^2 - 3) + (x_1 + x_2 - 3)^2 \to min, \quad x^0 = (0{,}4)$
24. $(x_2^2 + x_1^2 - 3) + (x_1 + x_2 - 3)^2 \to min, \quad x^0 = (1{,}4)$
25. $(x_1^2 - x_2)^2 + (3 - x_1)^2 \to min, \quad x^0 = (1{,}4)$
26. $(x_1^2 - x_2)^2 + (3 - x_1)^2 \to min, \quad x^0 = (0{,}4)$

Пример контрольной работы №8

Решить методом возможных и подходящих направлений

1.

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

2

$(x_1+2)^2+(x_2-6)^2 \to \min$

$x_1+4x_2 \le 4$

$2x_1+x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

3

$(x_1-4)^2+(x_2-7)^2 \to \min$

$2x_1+3x_2 \le 6$

$3x_1+x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

4

$(x_1-3)^2+(x_2-6)^2 \to \min$

$x_1+x_2 \le 4$

$2x_1+x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

5

$(x_1-4)^2+(x_2+6)^2 \to \min$

$x_1+3x_2 \le 3$

$x_1+x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

6

$(x_1-5)^2+(x_2-6)^2 \to \min$

$x_1+x_2 \le 4$

$2x_1+x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

7

$(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \to \min$

$x_1+x_2 \le 5$

$5x_1+x_2 \le 5$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

8

$(x_1-2)^2+(x_2-6)^2 \to \min$

$2x_1+3x_2 \le 12$

$4x_1+x_2 \le 8$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

9

$(x_1-1)^2+(x_2-8)^2 \to \min$

$x_1+5x_2 \le 5$

$3x_1+x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

10

$$(x_1-4)^2+(x_2-8)^2\to\min$$
$$x_1+x_2\le 6$$
$$2x_1+x_2\le 8$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

11

$$(x_1-3)^2+(x_2-6)^2\to\min$$
$$x_1+4x_2\le 4$$
$$x_1+x_2\le 3$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

12

$$(x_1+4)^2+(x_2-6)^2\to\min$$
$$x_1+x_2\le 7$$
$$4x_1+x_2\le 8$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

13

$$2(x_1-4)^2+(x_2-6)^2\to\min$$
$$x_1+4x_2\le 4$$
$$x_1+x_2\le 3$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

14

$$(x_1-4)^2+2(x_2-6)^2\to\min$$
$$x_1+x_2\le 5$$
$$4x_1+x_2\le 8$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

15

$$(x_1-2)^2+2(x_2-6)^2\to\min$$
$$x_1+4x_2\le 4$$
$$x_1+x_2\le 3$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

16

$$(x_1-3)^2+2(x_2-6)^2\to\min$$
$$3x_1+4x_2\le 12$$
$$4x_1+x_2\le 8$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

16

$$(x_1-4)^2+(x_2-6)^2\to\min$$
$$x_1+x_2\le 7$$
$$3x_1+x_2\le 9$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

17

$$(x_1-4)^2+2(x_2+5)^2 \to \min$$
$$x_1+4x_2 \le 4$$
$$x_1+x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

18

$$(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$2x_1+4x_2 \le 10$$
$$x_1+x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

19

$$(x_1+2)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+3x_2 \le 3$$
$$5x_1+x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

20

$$(x_1-3)^2+(x_2-5)^2 \to \min$$
$$x_1+5x_2 \le 10$$
$$x_1+x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

21

$$(x_1-4)^2+3(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+4x_2 \le 4$$
$$x_1+x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

22

$$(x_1-4)^2+(x_2-7)^2 \to \min$$
$$x_1+4x_2 \le 8$$
$$x_1+x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

23

$$(x_1-4)^2+2(x_2-7)^2 \to \min$$
$$x_1+6x_2 \le 6$$
$$x_1+x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

24

$$(x_1-4)^2+(x_2+6)^2 \to \min$$
$$x_1+4x_2 \le 4$$
$$x_1+x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

25

$$(x_1-4)^2+4(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+5x_2 \le 5$$
$$x_1+x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Пример контрольной работы №9

Решить методом линеаризации Франка Вульфа

1.
$$(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+4x_2 \le 8$$
$$x_1+x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

2
$$(x_1+2)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+4x_2 \le 4$$
$$2x_1+x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

3
$$(x_1-4)^2+(x_2-7)^2 \to \min$$
$$2x_1+3x_2 \le 6$$
$$3x_1+x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

4
$$(x_1-3)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+x_2 \le 4$$
$$2x_1+x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

5
$$(x_1-4)^2+(x_2+6)^2 \to \min$$
$$x_1+3x_2 \le 3$$
$$x_1+x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

6
$$(x_1-5)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$
$$x_1+x_2 \le 4$$
$$2x_1+x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

7
$$(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$5x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

8

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

9

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 8)^2 \to \min$$
$$x_1 + 5x_2 \le 5$$
$$3x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

10

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 8)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

11

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

12

$$(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

13

$$2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

14

$$(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

15

$$(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 6)^2 \to \min$$

$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

16

$$(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

16

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$3x_1 + x_2 \le 9$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

17

$$(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 + 5)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

18

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 10$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

19

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$5x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

20

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min$$
$$x_1 + 5x_2 \le 10$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

21

$$(x_1 - 4)^2 + 3(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

22

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 \to \min$$

$$x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

23

$$(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 7)^2 \to \min$$
$$x_1 + 6x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

24

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

25

$$(x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to \min$$
$$x_1 + 5x_2 \le 5$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Пример контрольной работы №10

1.Найти экстремали для простейшей задачи вариационного исчисления

№ вар.	Условие
1.	$J(y) = \int_0^1 \dot{y}^2 dx \to extr;\ \ y(0) = 1,\ \ y(1) = 0$
2.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 - y) dx \to extr;\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0$
3.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + xy) dx \to extr;\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0$
4.	$J(y) = \int_0^1 (\dot{y}^2 - x^2 y) dx \to extr;\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0$
5.	$J(y) = \int_1^e x\dot{y}^2 dx \to extr;\ \ y(1) = 0,\ \ y(e) = 1$
6.	$J(y) = \int_0^1 (1+x)\dot{y}^2 dx \to extr;\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 1$
7.	$J(y) = \int_2^3 (x^2 - 1)\dot{y}^2 dx \to extr;\ \ y(2) = 0,\ \ y(3) = 1$
8.	$J(y) = \int_0^1 y^2\dot{y}^2 dx \to extr;\ \ y(0) = 1,\ \ y(1) = \sqrt{2}$

9.	$J(y)=\int_0^{4/3}\frac{y}{\dot y^2}dx\to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(\frac{4}{3})=\frac{1}{9}$
10.	$J(y)=\int_0^1 e^y\dot y^2dx\to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=\ln 4$
11.	$J(y)=\int_0^1(\dot y^2+\dot yy+12xy)dx\to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=0$
12.	$J(y)=\int_0^1(x^2\dot y^2+12y^2)dx\to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1$
13.	$J(y)=\int_{-1}^1(\dot y^2+y^2)dx\to extr;\ \ y(-1)=1,\ \ y(1)=1$
1 4.	$J(y)=\int_0^1(\dot y^2+y^2+4y\mathrm{sh}x)dx\to extr;\ \ y(0)=-1,\ \ y(1)=0$
15 .	$J(y)=\int_0^1(\dot y^2+y^2+4y\mathrm{ch}x)dx\to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=0$
16.	$J(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot y^2-y^2)dx\to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(\frac{\pi}{2})=0$
17.	$J(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot y^2-y^2+4y\cos x)dx\to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(\frac{\pi}{2})=0$
18.	$J(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot y^2-y^2-4y\sin x)dx\to extr;\ \ y(0)=0,\ \ y(\frac{\pi}{2})=0$
19.	$J(y)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1+\dot y^2}}{y}dx\to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$
20.	$J(y)=\int_{1/2}^{1}\frac{\sqrt{1+\dot y^2}}{y}dx\to extr;\ \ y(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ y(1)=1$
21	$J(y)=\int_0^{4/3}\frac{y}{\dot y^2}dx\to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(\frac{4}{3})=\frac{1}{9}$
22	$J(y)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1+\dot y^2}}{y}dx\to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$
23	$J(y)=\int_2^3(x^2-1)\dot y^2dx\to extr;\ \ y(2)=0,\ \ y(3)=1$
24	$J(y)=\int_0^{4/3}\frac{y}{\dot y^2}dx\to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(\frac{4}{3})=\frac{1}{9}$
25	$J(y)=\int_0^1 y^2\dot y^2dx\to extr;\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=\sqrt{2}$

2. Найти экстремали для задачи Больца

№ вар.	Условие

1.	$J(y)=\int_0^1(\dot{y}^2-y)dx-\dfrac{y^2(1)}{2}\to extr$
2.	$J(y)=\int_0^1(\dot{y}^2+y^2)dx-2y(1)\,\mathrm{sh}(1)\to extr$
3.	$J(y)=\int_0^{\pi}(\dot{y}^2+y^2-4y\sin x)dx+2y^2(0)+2y(\pi)-y^2(\pi)\to extr$
4.	$J(y)=\int_0^{\pi/2}(\dot{y}^2-y^2)dx+y^2(0)-y^2(\dfrac{\pi}{2})+4y(\dfrac{\pi}{2})\to extr$
5.	$J(y)=\int_0^{\pi/2}(\dot{y}^2-y^2-2y)dx-2y^2(0)-y^2(\dfrac{\pi}{2})\to extr$
6.	$J(y)=\int_0^{e-1}(1+x)\dot{y}^2dx+2y(0)(y(e-1)+1)\to extr$
7.	$J(y)=\int_1^2 x^2\dot{y}^2dx-2y(1)+y^2(2)\to extr$
8.	$J(y)=\int_1^e 2(x\dot{y}^2+\dot{y}y)dx+3y^2(1)-y^2(e)-4y(e)\to extr$
9.	$J(y)=\int_0^3 4y^2\dot{y}^2dx+y^4(0)-8y(3)\to extr$
10.	$J(y)=\int_0^1 e^y\dot{y}^2dx+4e^{y(0)}+32e^{-y(1)}\to extr$
11.	$J(y)=\int_0^3 4\dot{y}^2y^2dx+y^4(0)-8\,y(3)\to extr$
12.	$J(y)=\int_0^1 \dot{y}^2dx+4y^2(0)-5y^2(1)\to extr$
13.	$J(y)=\int_0^1(\dot{y}^2+y^2)dx-2y(1)sh1\to extr$
1 4.	$J(y)=\int_0^1(\dot{y}^2+y^2)dx-2y^2(1)\to extr$
15 .	$J(y)=\int_0^1 e^{x+1}(\dot{y}^2+2y^2)dx+2y(1)(y(0)+1)\to extr$
16.	$J(y)=\int_0^1 e^y\dot{y}^2dx+4e^{y(0)}+32e^{-y(1)}\to extr$
17.	$J(y)=\int_1^e 2(x\dot{y}^2+\dot{y}y)dx+3y^2(1)-y^2(e)-4y(e)\to extr$
18.	$J(y)=\int_0^{\pi}(\dot{y}^2+y^2-4y\sin x)dx+2y^2(0)+2y(\pi)-y^2(\pi)\to extr$
19.	$J(y)=\int_0^1 e^y\dot{y}^2dx+4e^{y(0)}+32e^{-y(1)}\to extr$

20.	$J(y)=\int_0^1(\dot{y}^2-y)dx-\dfrac{y^2(1)}{2}\to extr$
21	$J(y)=\int_0^1 e^{x+1}(\dot{y}^2+2y^2)dx+2y(1)(y(0)+1)\to extr$
22	$J(y)=\int_1^e 2(x\dot{y}^2+\dot{y}y)dx+3y^2(1)-y^2(e)-4y(e)\to extr$
23	$J(y)=\int_0^{e-1}(1+x)\dot{y}^2dx+2y(0)(y(e-1)+1)\to extr$
24	$J(y)=\int_0^{\pi}(\dot{y}^2+y^2-4y\sin x)dx+2y^2(0)+2y(\pi)-y^2(\pi)\to extr$
25	$J(y)=\int_1^2 x^2\dot{y}^2dx-2y(1)+y^2(2)\to extr$

Контрольные засчитываются при условии, что правильно выполнено более 80% задания: правильно проведена формализация задачи; правильно выбран метод решения; правильно проведены расчеты.

Перечень лабораторных работ

Лабораторная работа № 1. Составление вычислительных схем и соответствующих программных реализаций методов одномерной оптимизации.
Лабораторная работа № 2. Составление вычислительных схем и соответствующих программных реализаций методов безусловной оптимизации.
Лабораторная работа № 3. Составление вычислительных схем и соответствующих программных реализаций методов условной оптимизации.

Лабораторные работы должны быть реализованы на одном из языков программирования, должен быть приведен тест, на котором тестировалась программа, и результат тестирования. Это необходимые условия для сдачи лабораторных.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств.

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие показатели:
1) знание учебного материала и владение аппаратом первых трех разделов;
2) Выполнение первых пяти контрольных работ;
3) умение исследовать простейшие задачи оптимизации на основе необходимых и достаточных условий;
4) решать произвольные задачи линейного программирования.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».
Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие критерии:
-знание учебного материала всех разделов;
-умение использовать базовые методы решения задач безусловной оптимизации;
- умение использовать базовые методы решения задач условной оптимизации;
-уметь искать допустимые экстремали в задачах вариационного исчисления.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок

Полное соответствие ответа, обучающегося всем перечисленным критериям.	Повышенный уровень	Отлично
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы.	Пороговый уровень	Удовлетвори- тельно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым из перечисленных показателей.	–	Неудовлетвори-тельно

Перечень вопросов к зачету (КИМ №1)

1.Переписать эквивалентно данную задачу оптимизации:
- в стандартной форме;
- с ограничениями в виде неравенств;
- с ограничениями равенствами.

2.Решить графически данную задачу
3.Решить ЗЛП симплексным методом.
4.Построить двойственную задачу к заданной ЗЛП.
5. Проверить на оптимальность данную точку, используя дифференциальный вариант теоремы Куна-Таккера.
6. Проверить на оптимальность данную точку, используя условие оптимальности Джона.
7. Решить транспортную задачу

Перечень вопросов к экзамену (КИМ №2)

Примеры задач оптимизации и их формализация (задача Эвклида; задача планирования производства; задача Дидоны; задача оптимального быстродействия; комбинаторные задачи). Классификация задач оптимизации.

Постановка задачи математического программирования. Основные определения, различные формы записи. Постановка исходной задачи с помощью функции Лагранжа. Определение двойственной задачи.

Необходимые и достаточные условия оптимальности. Задачи с ограничениями – равенствами. Принцип Лагранжа. Расширенная функция Лагранжа. Связь с классическим принципом Лагранжа. Задачи с ограничениями – неравенствами. Использование принципа Лагранжа для получения необходимых условий экстремума. Задача общего вида. Определение седловой точки функции Лагранжа. **Достаточное** условие экстремума в терминах седловой точки.

Задачи выпуклого программирования (ЗВП). Определения выпуклых функций, выпуклого множества, выпуклых задач. Теоремы об отделимости (о строгой отделимости точки от множества, об опорных гиперплоскостях, об отделимости двух множеств). Теорема Куна- Таккера (в терминах седловой точки). Дифференциальный вариант теоремы Куна- Таккера. Условие оптимальности Ф.Джона. Возможные и подходящие направления. Условие оптимальности в ЗВП в терминах возможных и подходящих направлений. Задачи с линейными ограничениями. Эквивалентное определение возможных направлений. Лемма Фаркаша. Теорема Куна- Таккера в задачах с линейными ограничениями.

Численные методы одномерной оптимизации. Метод золотого сечения, метод деления отрезка пополам, метод секущих, метод Ньютона.

Численные методы многомерной безусловной оптимизации. Покоординатный спуск, градиентные методы (с постоянным шагом, с дроблением шага, наискорейший спуск). Проблемы овражности, “застревание” наискорейшего спуска. Исправление градиентых процедур поиска – методы сопряженных направлений (общая схема, метод Пауэлла, метод Флетчера – Ривса). Метод Ньютона. Метод многогранника.

Методы условной оптимизации. Методы, использующие линеаризацию исходной задачи (метод секущих плоскостей, метод линеаризации). Методы, гарантирующие поиск допустимых точек (методы возможных направлений, метод проекции градиента), методы, обеспечивающие переход к безусловной оптимизации (внешние и внутренние штрафные функции).

Задачи линейного программирования. Графическое решение, симплексный метод, метод искусственного базиса. Элементы теории двойственности (правила построения двойственных задач, основные свойства пары двойственных задач, первая и вторая теоремы двойственности, использование теорем двойственности для проверки заданной точки на оптимальность).

Задачи вариационного исчисления . Простейшая задача. Принцип вариации исследования задач. Необходимое условие слабого экстремума в терминах вариации функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Частные случаи уравнения Эйлера. Задача Больца (без ограничений). Использование метода вариаций с целью получения необходимых условий слабого экстремума. Задача Лагранжа. Использование принципа Лагранжа для получения необходимых условий слабого экстремума. Задачи со старшими производными. Уравнение Эйлера.

Задачи оптимального управления. Общая постановка задачи оптимального управления. Примеры. Простейшая задача оптимального управления. Получение необходимых условий минимума с помощью использования принципа Лагранжа. . Принцип максимума Понтрягина.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения

Вопросы с коротким ответом

1. Если допустимой областью в прикладной задаче линейного программирования в R^2 является квадрат с вершинами (1,2), (8,2), (1,7), (8,7), а градиент целевой функции равен $\nabla f = (4{,}1)$, то какая точка является решением задачи на максимум (запишите в круглых скобках координаты точки)?

а. (8,7)

2. В процессе решения задачи линейного программирования при максимизации целевой функции симплексным методом на некоторой итерации получена симплексная таблица:

B	C_B	$\overline{X}$	2 A_1	-1 A_2	5 A_3	-2 A_4	1 A_5	Θ
x_3	5	1	-1	1	1	0	0	
x_4	-2	1	1	-1	0	1	0	
x_5	1	2	1	1	0	0	1	
Δ_j								

Чему равно значение наименьшей оценки (написать значение оценки, если оно отрицательное, то без пробела между числом и знаком минус)?

а. -8

Вопросы с вариантами ответов

1. Метод наискорейшего спуска решения оптимизационных задач предназначен для решения прикладных задач:

а. Безусловной оптимизации.

б. Задач с ограничениями равенствами.
в. Задач с ограничениями неравенствами.
с. Задач со смешанными ограничениями.

2. Численный метод решения задач безусловной оптимизации является методом первого порядка, если:

а. использует в процессе решения производные первого порядка, но не использует производные второго и более высоких порядков;
б. не использует в процессе решения вычисление производных;
в. использует производные первого и более высоких порядков.
Г. алгоритм содержит разветвления, при которых могут использоваться как производные первого порядка, так и производные более высоких порядков.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности

Задания с кратким ответом

1. При решении задачи нахождения оптимального (дающего максимум целевой функции) варианта действий симплексным методом на некоторой итерации получена симплексная таблица:

			1	1	5	2	1	
B	C_B	$\overline{X}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Θ
x_3	5	1	1	-5	1	0	0	
x_4	2	1	4	-1	0	1	0	
x_5	1	2	1	1	0	0	1	
	Δ_j							

Текущая точка не является оптимальной, какой вектор нужно ввести в базис на следующей итерации (введите номер данного вектора)?

а. 2

2. При использовании теории двойственности в процессе решения прикладных задач была получена следующая пара двойственных задач:

$$2x_1 + 5x_2 \to \max \qquad\qquad -4y_1 + y_2 \to \min$$
$$-3x_1 - x_2 = -4 \qquad\qquad -3y_1 + y_2 = 2$$
$$x_1 + x_2 = 1 \qquad\qquad -y_1 + y_2 \geq 5$$
$$x_1 - \forall, \quad x_2 \geq 0 \qquad\qquad y_1 - \forall, \quad y_2 - \forall$$

Чему равно оптимальное значение целевой функции во второй задаче (укажите или конкретное значение или, если решения нет из-за неограниченности целевой функции, то напишите *неограничена)*

а. неограничена

3. При решении транспортной задачи на очередной итерации получена таблица:

b_j	12	8	7	7	6	

a_i						
6	7	4	3	2 6	5	U1=0
8	3 0	4	3 2	5	1 6	U2=-3
12	0 12	4	2	3	6	U3=
14	7	1 8	8 5	4 1	5	U4=2
	V1=6	V2=-1	V3=6	V4=2	V5=	

Найдите, чему равны потенциалы u3, V5 (напишите значения через запятую и пробел, сначала u3, затем V5)?

a. -6, 4

4. При решении транспортной задачи на очередной итерации получена таблица:

a_i \ b_j	12	8	7	7	6	
6	7	4	3	2 6	5	U1=0
8	3 0	4	3 2	5	1 6	U2=-3
12	0 12	4	2	3	6	U3=-6
14	7	1 8	8 5	4 1	5	U4=2
	V1=6	V2=-1	V3=6	V4=2	V5=4	

Вычислите оценку x11.

A. -1

5. Пусть задана следующая транспортная задача:

						A_i
	5	4	3	1	2	**20**
	3	6	2	4	3	**8**
	2	4	5	3	1	**7**
	1	2	3	4	5	**10**
B_j	**12**	**9**	**8**	**5**	**6**	

Является ли задача сбалансированной. Укажите *да* или *нет*.

a. нет

Вопросы с вариантами ответов

1. Задача линейного программирования по минимизации функции $F(x) = -x_1 - 3x_2 + 5$ при условиях $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 3\,x_2 \geq 0$ имеет решение, которому соответствует:
   а. единственная точка, где достигается минимум;
   б. только две точки, где достигается минимум;
   в. бесконечное множество точек, где достигается минимум.
   с. только три точки, в которых достигается минимум.

2. Для некоторой функции двух переменных уравнениями двух разных линий уровня могут быть уравнения:

а. $3x_1 + 5x_2 = 2, \quad -3x_1 + 5x_2 = 2;$
б. $-5x_1 + 3x_2 = 2, \quad -15x_1 + 9x_2 = 6;$
в. $\boldsymbol{3x_1 - 5x_2 = 2}, \quad \boldsymbol{-6x_1 + 10x_2 = 7};$
с. $3x_1 - 5x_2 = 0, \quad -6x_1 + 10x_2 = 0;$

3. При минимизации симплекс-методом, в задаче линейного программирования, начальный базисный план имел вид:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3,0,0,1),$$

Причем выяснилось, что эта задача на поиск минимума не имеет решения. Причиной отсутствия решения является:
а. противоречивость условий задачи;
б. неограниченность снизу целевой функции на допустимом множестве;
в. неограниченность сверху целевой функции на допустимом множестве;
с. пустота допустимого множества задачи.

4. В процессе решения симплексным методом с искусственными переменными задачи линейного программирования на максимум целевой функции на некоторой итерации получена симплексная таблица:

			1	0	3	-1	-M	-M	
B	C_B	$\bar{x}$	A_1	A_2	A_3	A_4	z_1	z_2	Θ
z_1	-M	4	1	0	2	1	1	0	
z_2	-M	7/5	-17/5	0	-2/5	11/5	0	1	
x_2	0	4/5	1/5	1	1/5	2/5	0	0	
α		0	-1	0	-3	1	0	0	
β		-36/5	11/5	0	6/5	2/5	0	0	

Что можно сказать о решении исходной задачи?

a. **В задаче допустимое множество пусто;**
b. На данной итерации получено оптимальное решение;
c. Задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции.
d. Задача имеет бесчисленное множество решений

5. Рассмотрим пару двойственных задач:

$$\begin{array}{ll} x_1 + 3x_2 \to \max & -4y_1 + y_2 \to \min \\ -3x_1 - x_2 = -4 & -3y_1 + y_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 & -y_1 + y_2 \geq 3 \end{array}$$

$$x_1 - \forall, \quad x_2 \geq 0 \qquad\qquad\qquad y_1 - \forall, \quad y_2 - \forall$$

Что можно сказать о решении данных задач?

а. в исходной задаче допустимое множество пусто, в двойственной задаче нет решения из-за неограниченности целевой функции;
б. в исходной задаче единственное решение и в двойственной задаче единственное решение;
в. в исходной задаче допустимое множество пусто, в двойственной задаче допустимое множество пусто;
с. и в исходной, и в двойственной задаче нет решения из-за неограниченности целевой функции.

6. Дана задача линейного программирования:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Что можно сказать о решении исходной и двойственной задач?

а. в исходной задаче допустимое множество пусто, в двойственной задаче нет решения из-за неограниченности целевой функции;
б. в исходной задаче единственное решение и в двойственной задаче единственное решение;
в. в исходной задаче нет решения из-за неограниченности целевой функции, в двойственной задаче допустимое множество пусто;
с. в исходной задаче допустимое множество пусто, в двойственной задаче допустимое множество пусто.

7. Дана сбалансированная транспортная задача:

a_i \ b_j	30	36	36	22	56
45	3	6	2	4	5
70, 34	3	1 36	4	4	4
15	4	3	5	3	6
50	1	4	3	6	8

Какую ячейку можно выбрать на следующей итерации в метода нахождения минимального элемента:
а. (4,1);
б. (1,3);
в. (2,1);
с. (4,5).

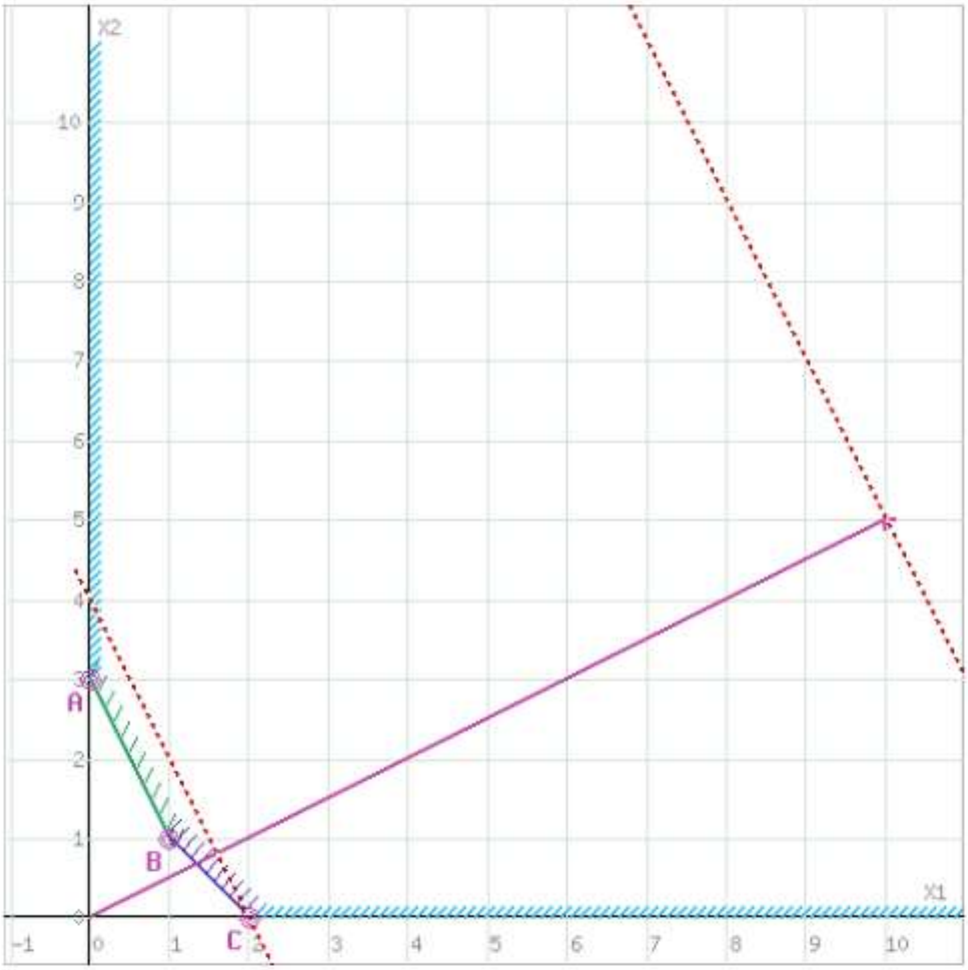
8. Дана сбалансированная транспортная задача:

a_i \ b_j	30	36	36	22	56
45, 15	3 30	6	2	4	5
70	3	1 36	4	4	4
15	4	3	5	3	6
50	1	4	3	6	8

Какую ячейку можно выбрать на следующей итерации в метода северо-западного угла:

а. (4,1);
б. (1,2);
в. (2,1);
с. (3,3).

9.Графическое решение задачи линейного программирования имеет вид:



Что является решение задачи на максимум и на минимум?

а. на максимум нет решения из-за неограниченности целевой функции, на минимум

точка А;
б. на максимум нет решения из-за неограниченности целевой функции, на минимум точка В;
в. на максимум точка С, на минимум точка А;
с. на максимум точка А, на минимум точка С.

10. В методе деления отрезка пополам на каждой итерации текущий отрезок неопределенности:
а. сокращается в два раза;
б. сокращается более чем в два раза;
в. сокращается в четыре раза;
с. или не сокращается, или сокращается в два раза.

11. При решении задач безусловной оптимизации на минимум методом наискорейшего спуска движение на каждой итерации осуществляется:
а. по градиенту в текущей точке;
б. по антиградиенту в текущей точке;
в. по сопряженным направлениям;
с. по координатным направлениям.

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

<u>1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности):</u>

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

<u>2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень сложности):</u>

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).