

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
математической физики и  
информационных технологий



С.А. Переселков

28.06.2024г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.15 Дифференциальные и интегральные уравнения**

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

12.03.03 Фотоника и оптоинформатика

**2. Профиль подготовки/специализация:** Фотоника и оптоинформатика

**3. Квалификация выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** 0803 математической физики и информационных технологий

**6. Составители программы:** Курин Александр Федорович, кандидат физико-математических наук, доцент

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом физического факультета, протокол № 6 от 27.06.2024г.

**8. Учебный год:** 2025/2026

**Семестр(ы):** 3

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

цель дисциплины: сформировать у студентов фундаментальные основы весьма разветвленного базового курса «Дифференциальные и интегральные уравнения», позволяющие вести исследования по различным научным направлениям специальности.

задачи дисциплины:

- изучение базовых понятий теории дифференциальных уравнений;
- освоение основных приёмов решения практических задач по темам дисциплины;
- приобретение опыта работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой;
- развитие четкого логического мышления.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Дифференциальные и интегральные уравнения» относится к математическому и естественнонаучному циклу дисциплин учебного плана и является составной частью группы предметов, объединенных в модуль «Математика». Данная дисциплина является необходимой для освоения остальных дисциплин естественнонаучного цикла и дисциплин профессионального цикла ООП и относится к группе обязательных дисциплин отрасли науки и научной специальности образовательной компоненты ООП (в соответствии с Федеральными государственными требованиями (ФГТ)). Содержание дисциплины базируется на знаниях, приобретенных в курсах математического анализа и линейной алгебры.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в инженерной деятельности, связанной с фотонными технологиями обработки информации, проектированием, конструированием и технологиями производства элементов, приборов и систем фотоники и оптоинформатики.	ОПК-1.1	Применяет знания математики в инженерной практике при моделировании.	Знает дифференциальные и интегральные уравнения, которые использует для построения моделей и конструирования алгоритмов решения практических задач; владеет навыками квалифицированного выбора и адаптации дифференциальных и интегральных уравнений для решения практических задач.

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом)—

4/144.

**Форма промежуточной аттестации — зачёт с оценкой**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам
		3 семестр
Аудиторные занятия	102	102
в том числе:	лекции	68
	практические	34
	лабораторные	0
Самостоятельная работа	42	42
в том числе: курсовая работа (проект)	0	0
Форма промежуточной аттестации	-	-
Итого:	144	144

**13.1. Содержание дисциплины:**

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Введение в предмет. История. Основные понятия. Уравнения первого порядка.	Задача Коши для уравнения первого порядка. Общее решение, общий интеграл. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения, которые сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. Линейное уравнение. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Уравнение Бернулли, уравнение Риккати. Уравнение в полных дифференциалах. Решение с помощью интегрирующего множителя. Интегрирующий множитель для линейного уравнения. Теорема существования и единственности решения уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Особые точки, особые решения. Виды особых точек (узел, седло, центр, фокус). Метод последовательных приближений. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Уравнение Лагранжа, уравнение Клеро. Общий метод интегрирования. Теорема существования и единственности решения.	
1.2	Уравнения n-го	Задача Коши для уравнения n-го порядка.	

	<p>порядка. Линейные уравнения.</p>	<p>Понижения порядка. Линейные уравнения n-го порядка. Общие свойства. Принцип суперпозиции. Линейно зависимые и линейно независимые решения. Определитель Вронского. Две теоремы о линейной зависимости решений линейного однородного уравнения. Альтернатива. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения. Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Однородные уравнения. Характеристическое уравнение. Случаи простых, комплексно-сопряженных, кратных корней характеристического уравнения. Неоднородные уравнения. Специальная правая часть. Резонанс. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для линейного уравнения второго порядка.</p>	
1.3	<p>Системы линейных уравнений.</p>	<p>Принцип суперпозиции. Определитель Вронского. Альтернатива. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной систем. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Однородные системы. Случаи простых и кратных корней характеристического уравнения. Неоднородные системы со специальной правой частью.</p>	
1.4	<p>Устойчивость решений дифференциальных уравнений и систем.</p>	<p>Понятия устойчивого и неустойчивого решений. Определение устойчивости по Ляпунову. Определение асимптотической устойчивости. Сведение исследования на устойчивость произвольного решения к исследованию на устойчивость тривиального решения. Определение устойчивости тривиального решения. Фазовое пространство. Фазовая траектория. Фазовый портрет. Изображающая точка. Точка покоя. Фазовые переменные для уравнения второго порядка. Фазовая плоскость линейного осциллятора. Виды точки покоя (узел, седло, центр, фокус). Определение устойчивости тривиального решения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод функции Ляпунова. Исследование на устойчивость по первому (линейному) приближению. Метод ван дер Поля. Переменные ван дер Поля. Разделение движений. Уравнение ван дер Поля. Стационарные режимы колебаний. Их устойчивость. Предельный цикл. Понятие об асимптотических методах.</p>	

1.5	Интегральные уравнения.	Основные понятия. Виды линейных интегральных уравнений.	
1.6	Уравнение Фредгольма.	Уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Интегральный оператор. Теорема о существовании и единственности решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода. Резольвента. Решение уравнения через резольвенту. Характеристические значения и собственные функции однородного уравнения Фредгольма 2-го рода. Случай вырожденного ядра. Уравнения типа свертки по Фурье. Уравнения, которые решают с помощью синус- и косинус-преобразований Фурье. Симметричное ядро. Теорема Гильберта-Шмидта. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром. Уравнение Фредгольма 1-го рода. Неустойчивость решения.	
1.7	Уравнение Вольтерра.	Дифференциальные уравнения и уравнение Вольтерра. Теорема о существовании и единственности решения уравнения Вольтерра 2-го рода. Резольвента. Решение через резольвенту. Уравнение типа свертки. Преобразование уравнения Вольтерра 1-го рода к уравнению 2-го рода.	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Введение в предмет. История. Основные понятия. Уравнения первого порядка.	Задача Коши для уравнения первого порядка. Общее решение, общий интеграл. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения, которые сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. Линейное уравнение. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Уравнение Бернулли, уравнение Риккати. Уравнение в полных дифференциалах. Решение с помощью интегрирующего множителя. Интегрирующий множитель для линейного уравнения. Теорема существования и единственности решения уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Особые точки, особые решения. Виды особых точек (узел, седло, центр, фокус). Метод последовательных приближений. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Уравнение Лагранжа, уравнение Клеро. Общий метод интегрирования.	
2.2	Уравнения n-го порядка. Линейные уравнения.	Задача Коши для уравнения n-го порядка. Метод понижения порядка. Линейные уравнения n-го порядка. Общие свойства. Принцип суперпозиции. Линейно зависимые и линейно независимые решения. Определитель Вронского. Две теоремы о линейной зависимости решений линейного однородного	

		<p>уравнения. Альтернатива. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения. Линейные уравнения <math>n</math>-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случаи простых и кратных корней. Случай комплексно-сопряженных корней. Неоднородные уравнения со специальной правой частью. Резонанс. Линейный осциллятор. Метод вариации произвольных постоянных для линейного уравнения второго порядка.</p>	
2.3	Системы линейных уравнений.	<p>Принцип суперпозиции. Определитель Вронского. Альтернатива. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной систем. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Однородные системы. Случаи простых и кратных корней характеристического уравнения. Неоднородные системы со специальной правой частью.</p>	
2.4	Устойчивость решений.	<p>Понятия устойчивого и неустойчивого решений. Определение устойчивости по Ляпунову. Определение асимптотической устойчивости. Сведение исследования на устойчивость произвольного решения к исследованию на устойчивость тривиального решения. Определение устойчивости тривиального решения. Фазовое пространство. Фазовая траектория. Фазовый портрет. Изображающая точка. Точка покоя. Фазовые переменные для уравнения второго порядка. Фазовая плоскость линейного осциллятора. Виды точки покоя (узел, седло, центр, фокус). Определение устойчивости тривиального решения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод функции Ляпунова. Исследование на устойчивость по первому (линейному) приближению. Метод ван дер Поля. Переменные ван дер Поля. Разделение движений. Уравнение ван дер Поля. Стационарные режимы колебаний. Их устойчивость. Предельный цикл. Понятие об асимптотических методах.</p>	
2.5	Интегральное уравнение Фредгольма.	<p>Уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Интегральный оператор. Теорема о существовании и единственности решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода. Резольвента. Решение уравнения через резольвенту. Характеристические значения и собственные</p>	

		функции однородного уравнения Фредгольма 2-го рода. Случай вырожденного ядра. Уравнения типа свертки по Фурье. Уравнения, которые решают с помощью синус- и косинус-преобразований Фурье. Симметричное ядро. Теорема Гильберта-Шмидта. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром. Уравнение Фредгольма 1-го рода. Неустойчивость решения.	
2.6	Интегральное уравнение Вольтерра	Уравнение Вольтерра и дифференциальные уравнения. Теорема о существовании и единственности решения уравнения Вольтерра 2-го рода. Резольвента. Решение через резольвенту. Уравнение типа свертки. Преобразование уравнения Вольтерра 1-го рода к уравнению 2-го рода.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.1	Введение в предмет. История. Основные понятия. Уравнения первого порядка.	14	8		8	30
1.2	Уравнения n-го порядка. Линейные уравнения.	12	6		8	26
1.3	Системы линейных уравнений.	8	4		4	16
1.4	Устойчивость решений.	8	4		4	16
1.5	Метод ван дер Поля.	6	4		2	12
1.6	Уравнение Фредгольма	10	4		8	22
1.7	Уравнение Вольтерра	10	4		8	22
	Итого:	68	34		42	144

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:

- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- методические указания и пособия;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Форма организации самостоятельной работы: подготовка к аудиторным занятиям; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к online занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Литвин Д.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / Литвин Д.Б., Мелешко С.В., Мамаев И.И. — Москва: Ставропольский ГАУ, 2017. — 76 с. — Обыкновенные дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев - Ставрополь: АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2017. — ISBN gau_00125. — <URL:https://www.studentlibrary.ru/book/stavgau_00125.html>.
2	Твердохлебова Е.В. Дифференциальные уравнения. Устойчивость решений. Уравнения и системы первого порядка: учебное пособие / Твердохлебова Е.В. — Москва: МИСиС, 2020. — 165 с. — Дифференциальные уравнения. Устойчивость решений. Уравнения и системы первого порядка [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Е.В. Твердохлебова. - М.: МИСиС, 2020. — ISBN 5-907226-67-8. — <URL:https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785907226678.html>.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения: учебник / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. — Москва: Физматлит, 2002. — 256 с. — Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. - 4-е изд., - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6. — ISBN 5-9221-0277-3. — <URL:https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html>.
2	Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения: учебник / Эльсгольц Л.Э. --- Москва: Наука, 1965. --- 424 с.
3	Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: [учебное пособие] / А.Ф. Филиппов. — Изд. 4-е. — М.: Либроком : URSS, 2011. — 235, [2] с. : ил., табл. — (Классический учебник МГУ). — ISBN 978-5-397-01632-2.
4	Васильева А.Б. Интегральные уравнения/ Васильева А.Б., Тихонов Н.А. --- Москва: Физматлит, 2002. --- 160 с.
5	Зон Б.А. Лекции по интегральным уравнениям/ Б.А. Зон. --- Москва: Высшая школа, 2004. --- 92 с.

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Виды точки покоя : учебно-методическое пособие / сост. : Е.Г. Беломытцева, Д.Л. Дорофеев, С.В. Елфимов, Г.А. Курина, Е.Б. Туленко, А.Ф. Курин. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. — 37 с. — Тираж 50. 2,3 п.л.
2	Метод Ван дер Поля. Асимптотический метод усреднения. Уравнения Ван дер Поля, Дуффинга, Матье: учебно-методическое пособие / Воронеж. гос. ун-т; сост.: Е.Г. Беломытцева, Е.Б. Туленко, А.Ф. Курин. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. — 79 с. : ил. — Библиогр.: с. 78.
3	Задачи по интегральным уравнениям: учебно-методическое пособие/ сост. А.Ф. Курин. --- Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2008. --- 34 с.



**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Лекционная аудитория, аудитории для практических занятий.

---

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-7	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольные работы
2.	Разделы 1-7			Контрольные работы
3.	Разделы 1-7			Контрольные работы

**20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

**20.1 Текущий контроль успеваемости**

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольные работы.

**Перечень заданий для контрольных работ.**

**Контрольная работа № 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.**

**Задание 1 (10 баллов).** Решить дифференциальное уравнение  $y' - y/(x+2) = x^2 + 2x$ .

**Задание 2 (15 баллов).** Решить дифференциальное уравнение  $(y^2 + 2y - x)dy = 2x$ .

**Задание 3 (15 баллов).** Решить дифференциальное уравнение  $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$ .

**Задание 4 (20 баллов).** Решить дифференциальное уравнение  $e^y dx + (\cos y + xe^y) dy = 0$ .

---

---

**Задание 5 (20 баллов).** Решить дифференциальное уравнение  $y = xy' - y^2$ .

**Контрольная работа № 2. Дифференциальные уравнения n-го порядка и системы уравнений.**

**Задание 1 (15 баллов).** Решить дифференциальное уравнение  $y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = 0$ .

**Задание 2 (20 баллов).** Решить систему дифференциальных уравнений  $x' = x - 5y$ ,  $y' = 2x - y$ .

**Задание 3 (15 баллов).** Решить задачу Коши  $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x$ ;  $y(\pi/4) = 5$ ;  $y'(\pi/4) = 4$ .

**Задание 4 (20 баллов)** Решить задачу Коши  $y'' = 2e^x + \cos x$ ;  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ .

**Контрольная работа № 3. Интегральные уравнения.**

**Задание 1 (15 баллов).** Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$y(x) = \frac{5}{3}x + \sqrt{x} - \frac{1}{6} + \int_0^1 (-x + \sqrt{t})y(t) dt.$$

**Задание 2 (20 баллов).** Найти резольвенту и записать решение через резольвенту

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \square$$

**Задание 3 (15 баллов).** Найти характеристические числа и собственные функции уравнения с вырожденным ядром

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t)y(t) dt.$$

**Задание 4 (20 баллов).** Решить уравнение типа свертки

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} y(t) dt, \text{ где } \lambda < \frac{1}{2}, f(x) = e^{-x} \text{ при } x > 0 \text{ и } f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

**Задание 5 (20 баллов).** Решить уравнение, сведя его к задаче Коши для дифференциального уравнения

$$y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

---

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: зачетная работа и собеседование по работе.

## Перечень вопросов к зачету.

1. Уравнение с разделяющимися переменными. Общий интеграл, общее решение, частные решения.
2. Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной (Лагранжа).
3. Уравнение Бернулли.
4. Уравнение Риккати.
5. Уравнение в полных дифференциалах. Решение с помощью интегрирующего множителя (случаи зависимости множителя только от  $x$  или только от  $y$ ).
6. Интегрирующий множитель для линейного уравнения.
7. Задача Коши для уравнения первого порядка.
8. Теорема о существовании и единственности решения уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.
9. Особые точки, особые решения. Виды особых точек: узел, седло, центр, фокус.
10. Метод последовательных приближений решения уравнения первого порядка.
11. Уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной (случаи, когда выражаются  $x$  или  $y$ ).
12. Уравнение Лагранжа.
13. Уравнение Клеро.
14. Задача Коши для дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
15. Общие свойства линейного уравнения. Принцип суперпозиции.
16. Определитель Вронского. Две теоремы о линейной зависимости. Альтернатива. Фундаментальная система решений.
17. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения.
18. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения.
19. Однородное линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случай простых корней.
20. Однородное линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Случай комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения.
21. Однородное линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней характеристического уравнения.
22. Неоднородное линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Случай специальной правой части. Резонанс.
23. Метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа) для линейного уравнения второго порядка.
24. Системы линейных уравнений. Принцип суперпозиции. Определитель Вронского. Структура общего решения однородной и неоднородной систем.
25. Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случаи простых, кратных, комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения.
26. Неоднородные системы линейных уравнений со специальной правой частью. Резонанс.
27. Понятия устойчивого и неустойчивого решений системы дифференциальных уравнений. Определение устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову.
28. Сведение исследования на устойчивость произвольного решения к исследованию на устойчивость произвольного решения.
29. Фазовое пространство, фазовая траектория, фазовый портрет, изображающая точка, точка покоя. Фазовые переменные для уравнения второго порядка.

30. Фазовая плоскость линейного осциллятора без затухания.
31. Виды точки покоя. Точка покоя типа «узел».
32. Виды точки покоя. Точка покоя типа «седло».
33. Виды точки покоя. Точка покоя типа «центр».
34. Виды точки покоя. Точка покоя типа «фокус»
35. Определение устойчивости тривиального решения однородной системы с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения.
36. Исследование на устойчивость по линейному (по первому) приближению.
37. Метод ван дер Поля. Переменные ван дер Поля. Разделение движений.
38. Уравнение ван дер Поля. Стационарные режимы, их устойчивость. Предельный цикл.
39. Виды линейных интегральных уравнений.
40. Интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром.
41. Интегральный оператор. Теорема о существовании и единственности решения уравнения Фредгольма второго рода.
42. Метод последовательных приближений.
43. Резольвента. Решение через резольвенту.
44. Характеристические числа и собственные функции уравнения Фредгольма.
45. Симметричное ядро. Теорема Гильберта-Шмидта.
46. Решение уравнения с симметричным ядром.
47. Интегральные уравнения типа свертки по Фурье.
48. Уравнения, которые решаются с помощью синус- и косинус- преобразований Фурье.
49. Уравнение Фредгольма первого рода.
50. Теорема о существовании и единственности решения уравнения Вольтерра второго рода.
51. Резольвента для уравнения Вольтерра. Решение через резольвенту.
52. Уравнение Вольтерра типа свертки.
53. Преобразование уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода.

### Перечень практических задач.

Дифференциальные уравнения и системы уравнений, задача Коши.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $y'' - 2y' = x^2 - x + e^x$ .                      | 6. $y'' + y = \cos x + 2e^x$ .                       |
| 2. $y'' + 2y' + 5y = 0$ , $y(0) = 1$ , $y'(0) = 0$ .  | 7. $y'' + 4y' + 5y = 0$ , $y(0) = 2$ , $y'(0) = 0$ . |
| 3. $y'''' + 8y''' + 16y'' = 0$ .                      | 8. $y'' + y' + 0.25y = 0$ .                          |
| 4. $x' = -3x - y$ , $y' = x - y$ .                    | 9. $x' = -x + y$ , $y' = x - y$ .                    |
| 5. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} / x^3$ .                  | 10. $y'' + y' = (e^x + 1)^{-1}$ .                    |
| 11. $y'' - y = e^{-x} + x$ .                          | 16. $y'' + 3y' = 9x + e^{2x}$ .                      |
| 12. $y'' + 3y' + 2y = 0$ , $y(0) = 0$ , $y'(0) = 1$ . | 17. $y'' + 3y' = 0$ , $y(0) = 0$ , $y'(0) = 1$ .     |
| 13. $4y'''' + 4y''' + y'' = 0$ .                      | 18. $y'''' + 12y''' + 36y'' = 0$ .                   |
| 14. $x' = y$ , $y' = x$ .                             | 19. $x' = -4y$ , $y' = x - 4y$ .                     |
| 15. $y'' - 2y' + y = e^x / x^2$ .                     | 20. $y'' + y = 1 / \cos x$ .                         |

21.  $y' - y/(x+2) = x^2 + 2x$ .

22.  $2(x+y^4)dy = ydx$ .

23.  $y' + 2xy = 2x^3y^3$ .

24.  $(2x-1-y/x^2)dx + (1/x-2y)dy = 0$ .

25.  $y = 2xy' - 8y'^3$ .

26.  $y' + (1-2x)y/x^2 = 1$ .

27.  $(13y^3 - x)dy = 4ydx$ .

28.  $xy' + y = xy^2$ .

29.  $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$ .

30.  $y = 3y'^4 - y'$ .

Устойчивость тривиального решения системы уравнений по линейному приближению.

1.  $x' = x - 3y + x^3 - 8xy$ ,  $y' = 4x + y - 1 + e^{-x}$ .

2.  $x' = 2x - y - \sin x$ ,  $y' = 4x + y + \cos y - e^{8x}$ .

3.  $x' = 2.5x - y - 1 + (1+x)^{1/2}$ ,  $y' = 4x - y + \ln(1+y^2)$ .

4.  $x' = -6x - y - 1 + x^7 + e^x \cos y$ ,  $y' = x - 3y + y^2$ .

5.  $x' = 2x + y - 2 + 2e^x \cos^2 y$ ,  $y' = -y + \ln(x+1) + e^y - 1$ .

Интегральные уравнения.

1. Решить уравнение с вырожденным ядром  $y(x) = \sin(2x) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2(x-t)y(t)dt$

2. Решить уравнение через резольвенту  $y(x) = 1 + \int_0^{\pi/2} \sin x \cos y(t)dt$ .

3. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения  $y(x) = \lambda \int_0^1 (x+t)y(t)dt$ .

4. Используя косинус-преобразование Фурье, решить интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} y(t) \cos(xt) dt = e^{-x} \cos x, x > 0.$$

5. Решить уравнение, сведя его к задаче Коши для дифференциального уравнения

$$y(x) = x + \int_0^x [4 \sin(x-t) - (x-t)] y(t) dt.$$

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<p>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины.</p>	Повышенный уровень	Отлично
<p>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.</p>	Базовый уровень	Хорошо
<p>Обучающийся частично владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.</p>	Пороговый уровень	Удовлетворительно
<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем(четырем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.</p>	–	Неудовлетворительно

## ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ

### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление/специальность 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика

Дисциплина Б1.О.15 Дифференциальные и интегральные уравнения.

Профиль подготовки Фотоника и оптоинформатика

Форма обучения очная

Учебный год 2025/2026

---

Ответственный исполнитель

Заведующий кафедрой математической  
физики и информационных технологий



С.А. Переселков 28.06.2024

Исполнители

Доцент кафедры математической

физики и информационных технологий \_\_\_\_\_ А.Ф. Курин 28.06.2024

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП

по направлению/специальности \_\_\_\_\_ .\_\_\_.\_\_ 2024

Начальник отдела обслуживания ЗНБ \_\_\_\_\_ .\_\_\_.\_\_ 2024

---

Программа рекомендована Научно-методическим советом физического факультета,  
протокол №6 от 27.06.2024г.