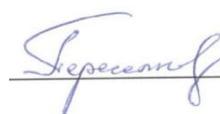


МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
математической физики  
и информационных технологий



С.А. Переселков

28.06.2024г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.11.08 Интегральные уравнения и вариационное исчисление**

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

14.03.02 Ядерные физика и технологии

**2. Профиль подготовки/специализация:** Физика атомного ядра и частиц

**3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** 0803 кафедра математической физики и информационных технологий.

**6. Составители программы:** Чернов Владислав Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор.

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом физического факультета, протокол №6 от 27.06.2024г.

**8. Учебный год:** 2025/2026

**Семестр(ы):** 4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

- цель дисциплины – формирование у обучающихся знаний об основах интегральных уравнений и вариационного исчисления. Обучение студентов умению использования аппарата интегральных уравнений и вариационного исчисления в профессиональной деятельности.

- задачи дисциплины: изучить классификацию интегральных уравнений, изучить основные свойства симметричных и самосопряжённых операторов, освоить методы решения уравнения Фредгольма, уравнения Вольтера и уравнения типа свёртки, подготовить обучающихся к применению полученных знаний для решения задач естествознания.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» относится к дисциплинам базовой части цикла Б1 основной образовательной программы подготовки бакалавров. Интегральные уравнения и вариационное исчисление относятся к числу фундаментальных разделов современной математики. Знание основ теории интегральных уравнений и вариационного исчисления является важной составляющей общей математической культуры выпускника.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Владеет знаниями фундаментальных разделов математики.	Знает основные понятия теории интегральных уравнений и вариационного исчисления, которые используются для построения моделей и конструирования алгоритмов решения практических задач.
		ОПК-1.2	Создает и применяет математические модели в своей практической деятельности.	Умеет применять методы теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения практических задач.
		ОПК-1.3	Умеет оценивать границы применимости используемых математических моделей при решении типовых профессиональных задач.	Владеет навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения практических задач.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (в соответствии с учебным планом) — 2/72.**

**Форма промежуточной аттестации:** зачёт.

**13. Виды учебной работы:**

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			4 семестр
Аудиторные занятия		44	44
в том числе:	лекции	14	14
	практические	30	30
	лабораторные	0	0
Самостоятельная работа		28	28
в том числе: курсовая работа (проект)		0	0
Форма промежуточной аттестации		0	0
Итого:		72	72

**13.1. Содержание дисциплины:**

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Введение в предмет. История. Основные понятия. Вариационное исчисление.	История развития вариационного исчисления. Труды Эйлера. Понятие функционала. Примеры функционалов. Линейный функционал. Вариация функционала. Ее вычисление с помощью параметра. Максимумы и минимумы функционалов. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Функционал Эйлера.	
1.2	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	Уравнение Эйлера для экстремалей. Частные случаи. Первый интеграл. Задача о брахистохроне. Функционал, зависящий от нескольких функций. Вариационная задача для такого функционала. Условный экстремум функционала. Геодезические линии. История развития интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма и уравнения Вольтерра первого и второго рода. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма. Характеристические значения и собственные функции уравнения Фредгольма. Случай	

		вырожденного ядра.	
1.3	Интегральные уравнения первого рода.	Теорема существования и единственности решения уравнения Фредгольма второго рода. Метод последовательных приближений. Резольвента. Решение через резольвенту. Симметричное ядро. Свойства характеристических значений и собственных функций в случае симметричного ядра. Спектр итерированных ядер. Теорема существования характеристического числа Лемма к теореме Гильберта-Шмидта. Следствия. Теорема Гильберта-Шмидта. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром.	
1.4	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	Теорема существования и единственности для уравнения Вольтерра второго рода. Решение через резольвенту. Уравнения типа свертки по Фурье. Интегральные уравнения первого рода. Уравнение Абеля. Сведение уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода. Уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром. Неустойчивость решения уравнения первого рода.	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Введение в предмет. История. Основные понятия. Вариационное исчисление.	История развития вариационного исчисления. Труды Эйлера. Понятие функционала. Примеры функционалов. Линейный функционал. Вариация функционала. Ее вычисление с помощью параметра. Максимумы и минимумы функционалов. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Функционал Эйлера.	
2.2	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	Уравнение Эйлера для экстремалей. Частные случаи. Первый интеграл. Задача о брахистохроне. Функционал, зависящий от нескольких функций. Вариационная задача для такого функционала. Условный экстремум функционала. Геодезические линии. История развития интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма и уравнения Вольтерра первого и второго рода. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма. Характеристические значения и собственные функции уравнения Фредгольма. Случай вырожденного ядра.	
2.3	Интегральные уравнения первого рода.	Теорема существования и единственности решения уравнения Фредгольма второго рода. Метод последовательных приближений. Резольвента. Решение через резольвенту. Симметричное ядро. Свойства характеристических значений и собственных функций в случае симметричного ядра. Спектр итерированных ядер. Теорема существования	

		характеристического числа Лемма к теореме Гильберта-Шмидта. Следствия. Теорема Гильберта-Шмидта. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром.	
2.4	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	Теорема существования и единственности для уравнения Вольтерра второго рода. Решение через резольвенту. Уравнения типа свертки по Фурье. Интегральные уравнения первого рода. Уравнение Абеля. Сведение уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода. Уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром. Неустойчивость решения уравнения первого рода.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Введение в предмет. История. Основные понятия. Вариационное исчисление.	3	6	0	6	15
2.	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	3	6	0	6	15
3.	Интегральные уравнения первого рода.	4	9	0	8	21
4.	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.	4	9	0	8	21
	Итого:	14	30	0	28	72

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:

- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- методические указания и пособия;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Форма организации самостоятельной работы: подготовка к аудиторным занятиям; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к online занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Омельченко А.В., Методы интегральных преобразований в задачах математической физики / А.В. Омельченко. — Москва: МЦНМО, 2010. — 182 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=63290">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=63290</a> )
2	Вержбицкий В.М., Численные методы математической физики / В.М. Вержбицкий. — Москва: Директ-Медиа, 2013. — 212 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=214562">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=214562</a> )

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Зон Б.А., Лекции по интегральным уравнениям: учебное пособие для вузов / Б.А. Зон. — Москва: Высшая школа, 2004. — 92 с.
2	Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию: учебное пособие для студ. вузов / М.Л. Краснов. — Изд. 2-е, стер. — М.: КомКнига: URSS, 2006. — 301с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1	<a href="http://www.lib.vsu.ru">www . lib . vsu . ru</a> – ЗНБ ВГУ
2	<a href="http://e.lanbook.com/">http://e.lanbook.com/</a> - ЭБС «Лань»
3	<a href="http://www.book.ru/">http://www.book.ru/</a> - ЭБС «Book.ru»

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Задачи по интегральным уравнениям: учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сост. А.Ф. Курин. — Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2007. — 34 с

## 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала [edu.vsu.ru](http://edu.vsu.ru), а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Лекционная аудитории.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-4	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольные работы
2.	Разделы 1-4		ОПК-1.2	Контрольные работы
3.	Разделы 1-4		ОПК-1.3	Контрольные работы
Промежуточная аттестация форма контроля — экзамен				Перечень вопросов Практическое задание

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Для оценивания результатов обучения на экзамене/зачете используются следующие показатели:

- 1) знание основных понятий теории интегральных уравнений и вариационного исчисления и их методов, которые используются для построения моделей и конструирования алгоритмов решения практических задач;
- 2) знание постановки классических задач;
- 3) знание методов формулировки и доказательства математических утверждений;
- 4) умение применять методы теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения задач профессиональной деятельности;
- 5) умение применять аппарат теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для доказательства утверждений и теорем;
- 6) владение навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения практических задач решения различных задач;
- 7) владение навыками использования методов решения классических задач теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения различных естественнонаучных задач.

Для оценивания результатов обучения на экзамене (зачете с оценкой) используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Для оценивания результатов обучения на зачете используется – зачтено, не зачтено. Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины.	Повышенный уровень	Отлично
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.	Базовый уровень	Хорошо
Обучающийся частично владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем (четырем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	Неудовлетворительно

## 20.2 Перечень вопросов к экзамену (зачету):

1. Понятие функционала. Примеры функционалов. Линейный функционал. Вариация функционала. Ее вычисление с помощью параметра.
2. Максимумы и минимумы функционалов. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления.
3. Функционал Эйлера. Уравнение Эйлера для экстремалей. Частные случаи.
4. Первый интеграл. Задача о брахистохроне.
5. Функционал, зависящий от нескольких функций. Вариационная задача для такого функционала.
6. Условный экстремум функционала. Геодезические линии.
7. Уравнения Фредгольма и первого и второго рода.
8. Уравнения Вольтерра.
9. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром.
10. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма.
11. Характеристические значения и собственные функции уравнения Фредгольма.
12. Теорема существования и единственности решения уравнения Фредгольма второго рода.
13. Метод последовательных приближений.
14. Резольвента. Решение через резольвенту.
15. Симметричное ядро. Свойства характеристических значений и собственных функций в случае симметричного ядра.
16. Теорема Гильберта-Шмидта и следствия из неё.
17. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром.
18. Теорема существования и единственности для уравнения Вольтерра второго рода. Решение через резольвенту.
19. Уравнения типа свертки по Фурье.
20. Интегральные уравнения первого рода. Уравнение Абея.
21. Сведение уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода.
22. Уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром.
23. Неустойчивость решения уравнения первого рода. Понятие о некорректных задачах.

### 20.3 Перечень практических заданий

1. Вычисление вариации линейного функционала с помощью параметра.
2. Нахождение экстремума функционала с помощью уравнений Эйлера.
3. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром – решение методом последовательных приближений.
4. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром – решение через резольвенту.
5. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром.
6. Решение уравнения Вольтерра второго рода через резольвенту.
7. Уравнения типа свертки по Фурье.
8. Интегральные уравнения первого рода. Сведение уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода.
9. Уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром.

### 20.4 Тестовые задания

#### Контрольно-измерительный материал № 1.

1. Найти вариацию функционала 
$$J[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2) dx$$

2. Найти экстремали функционала 
$$J[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2) dx; y(1) = 1, y(2) = 0.$$

3. Решить уравнение Абеля 
$$\int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{x-t}} = \sin x$$

4. С помощью резольвенты решить уравнение 
$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x-t) \varphi(t) dt = \frac{x}{6}$$

5. Решить уравнение с вырожденным ядром 
$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 e^{\arcsin x} \varphi(t) dt = \operatorname{tg} x$$

6. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения с вырожденным

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt = 0$$

ядром:

7. Решить интегральное уравнение Вольтерра типа свёртки:

$$\varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

$$\int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = \operatorname{sh} x$$

8. Решить интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода:

### Контрольно-измерительный материал № 2.

$$J[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + y'^2) dx$$

1. Найти вариацию функционала

$$J[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx; \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0$$

2. Найти экстремали функционала

$$\int_0^x (x-t)^{1/4} \varphi(t) dt = x + x^2$$

3. Решить уравнение Абеля

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t) \varphi(t) dt = 1$$

4. С помощью резольвенты решить уравнение

$$\varphi(x) - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \varphi(t) dt = 2x - \pi$$

5. Решить уравнение с вырожденным ядром:

6. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения с вырожденным

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = 0$$

ядром:

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

7. Решить интегральное уравнение Вольтерра типа свёртки:

8. Решить интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода:

$$\int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = \sin x$$

## 20.5 Перечень заданий для контрольных работ

### Текущая аттестация № 1

1. Понятие о функционале. Вариационная производная. Уравнения Эйлера. Вариационный экстремум.
2. Уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода. Метод последовательных приближений.

### Текущая аттестация № 2

1. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Спектр и резольвента. Теорема Гильберта–Шмидта.
2. Уравнения типа свертки по Фурье. Уравнения Фредгольма и Вольтерра первого рода.

## ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ

### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление/специальность 14.03.02 Ядерные физика и технологии

Дисциплина Б1.О.11.08 Интегральные уравнения и вариационное исчисление.

Профиль подготовки Физика атомного ядра и частиц

Форма обучения очная

Учебный год 2025/2026

Ответственный исполнитель

Заведующий кафедрой математической физики и информационных технологий  Переселков С.А. 28.06.2024

Исполнители

Профессор кафедры математической физики и информационных технологий \_\_\_\_\_ Чернов В.Е. 28.06.2024

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП  
по направлению/специальности \_\_\_\_\_ .\_\_\_.\_\_ 2024  
*подпись* *расшифровка подписи*

Начальник отдела обслуживания ЗНБ \_\_\_\_\_ .\_\_\_.\_\_ 2024  
*подпись* *расшифровка подписи*

Программа рекомендована Научно-методическим советом физического факультета, протокол №6 от 27.06.2024г.