

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
цифровых технологий



/ Кургалин С.Д.

28.02.2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.17 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**1. Код и наименование направления подготовки:**

02.03.01 Математика и компьютерные науки

**2. Профиль подготовки:**

квантовая теория информации, распределенные системы и искусственный интеллект

**3. Квалификация выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

кафедра цифровых технологий

**6. Составители программы:**

Каверина Валерия Константиновна, к.ф.-м.н., доцент;

Атанов Артем Викторович, к.ф.-м.н.

**7. Рекомендована:**

НМС ФКН (протокол № 3 от 25.02.2022)

**8. Учебный год:** 2023-2024

**Семестр(ы):** 3, 4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины заключается в формировании теоретических знаний в области дифференциальных уравнений, представляющих основу для моделирования процессов в различных областях естествознания.

Задачи учебной дисциплины:

- овладение техникой решения различных видов ОДУ;
- развитие умения анализировать решения ОДУ;
- овладение навыком построения простейших моделей с использованием дифференциальных уравнений.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП

Обязательная часть, блок Б1. Для успешного освоения дисциплины необходимо предварительное изучение следующих разделов математики: математический анализ, линейная алгебра.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знает основные понятия и теоремы теории дифференциальных уравнений, язык предметной области, постановки классических задач теории дифференциальных уравнений, способы решения основных типов дифференциальных уравнений и систем, а также методы анализа устойчивости решений систем дифференциальных уравнений.
		ОПК-1.2	Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Умеет классифицировать ОДУ, составлять простейшие математические модели с использованием ОДУ, решать ОДУ и системы ОДУ, исследовать решения ОДУ и систем ОДУ, применять полученные знания для математически корректной постановки новых задач в различных областях.
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Владеет техникой интегрирования известных типов дифференциальных уравнений, навыками исследования решений дифференциальных уравнений на устойчивость, навыками использования методов решения классических задач теории дифференциальных уравнений для решения различных естественнонаучных задач.

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 6/216.

Форма промежуточной аттестации: зачёт с оценкой, экзамен

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		3 семестр	4 семестр	
Аудиторные занятия	116	68	48	
в том числе:	лекции	66	34	32
	практические	50	34	16
	лабораторные			
Самостоятельная работа	64	22	42	
Форма промежуточной аттестации				
3 семестр – зачёт с оценкой			36	
4 семестр – экзамен				
Итого:	216	90	126	

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Общие понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)	Понятия и примеры дифференциальных уравнений (ДУ) и их решений. Некоторые задачи, приводящие к ДУ. Порядок ДУ. Поле направлений, интегральные кривые. Уравнения, разрешенные относительно производной. Задача Коши для ДУ 1-го порядка. Общее и частное решения. Нахождение частного решения ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
1.2	Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений 1-го порядка. ДУ с разделяющимися переменными. Однородные ДУ. Линейные ДУ. ДУ в полных дифференциалах, понятие об интегрирующем множителе. ДУ, не разрешенные относительно производной. Уравнения Бернулли, Эйлера, Лагранжа, Риккати. Сведение некоторых дифференциальных уравнений 1-го порядка к простейшим типам.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
1.3	Дифференциальные уравнения высших порядков	Общие понятия теории ДУ высших порядков. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений высших порядков. Общее решение. Понижение порядка. Типы уравнений, допускающие понижение порядка.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
1.4	Линейные дифференциальные уравнения	Однородные линейное ДУ и пространство его решений. Определитель Вронского и его свойства. Линейно зависимые и независимые решения. Фундаментальная система решений линейного однородного ДУ. Неоднородные линейные ДУ. Теорема об общем виде решения. Метод вариации произвольных постоянных. Однородные линейные ДУ с постоянными коэффициентами, неоднородные линейные ДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Нахождение частных решений линейного неоднородного ДУ мето-	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>

		дом неопределенных коэффициентов. Дифференциальные уравнения колебаний.	
1.5	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	Связь систем ОДУ с уравнениями высших порядков. Нормальный вид системы ОДУ и приведение системы к такому виду. Системы линейных уравнений. Однородные системы с постоянными коэффициентами и их решение методами линейной алгебры. Матричная экспонента. Первый интеграл системы уравнений.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
1.6	Понятие об интегральных уравнениях и краевых задачах	Понятие об интегральном уравнении. Некоторые примеры. Связь дифференциальных и интегральных уравнений. Операторы в пространствах функций. Доказательство теоремы Коши для уравнения 1-го порядка. Краевые задачи для ОДУ 2-го порядка. Понятие функции Грина краевой задачи.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
1.7	Некоторые модели естествознания, связанные с дифференциальными уравнениями	Модель «Хищник-жертва». Моделирование популяций при помощи ДУ. Задачи механики и электротехники, приводящие к дифференциальным уравнениям (механические движения, телеграфные уравнения и др).	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
1.8	Теоремы о непрерывной зависимости и элементы теории устойчивости	Зависимость решений от начальных данных и параметров. Постановка задачи об устойчивости. Исследование устойчивости по первому приближению. Метод функций Ляпунова. Исследование траекторий вблизи особых точек системы.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
1.9	Элементы вариационного исчисления	Понятия и примеры задач вариационного исчисления. Задача о брахистохроне, задача Дидоны. Уравнение Эйлера-Лагранжа для вариационных задач. Сведение вариационных задач к ДУ 2-го порядка.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
1.10	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка	Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных. Геометрическая интерпретация решения уравнения в частных производных. Связь уравнений в частных производных с системами ОДУ.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка	ДУ с разделяющимися переменными. Однородные ДУ. Линейные ДУ. Уравнения в полных дифференциалах. Сведение некоторых дифференциальных уравнений 1-го порядка к простейшим типам.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
2.2	Линейные дифференциальные уравнения	Однородные линейные ДУ с постоянными коэффициентами, неоднородные линейные ДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Нахождение частных решений линейного неоднородного ДУ методом неопределенных коэффициентов. Метод вариации произвольных постоянных.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
2.3	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	Однородные системы с постоянными коэффициентами и их решение методами линейной алгебры. Матричная экспонента.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
2.4	Краевые задачи	Краевые задачи для ОДУ 2-го порядка. Понятие функции Грина краевой задачи.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
2.5	Элементы теории устойчивости	Постановка задачи об устойчивости. Исследование траекторий вблизи особых точек системы. Исследование устойчивости по первому приближению. Метод функций Ляпунова.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>
2.6	Элементы вариационного исчисления	Понятия и примеры задач вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Лагранжа для	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=</a>

		вариационных задач. Сведение вариационных задач к ДУ 2-го порядка.	10349
2.7	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка	Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных. Связь уравнений в частных производных с системами ОДУ.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10349</a>

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Общие понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)	4	0		6	10
2	Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка	6	8		8	22
3	Дифференциальные уравнения высших порядков	6	0		6	12
4	Линейные дифференциальные уравнения	6	10		6	22
5	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	6	10		8	24
6	Понятие об интегральных уравнениях и краевых задачах	6	6		6	18
7	Некоторые модели естествознания, связанные с дифференциальными уравнениями	8	2		8	18
8	Теоремы о непрерывной зависимости и элементы теории устойчивости	8	6		6	20
9	Элементы вариационного исчисления	8	4		4	16
10	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка	8	4		6	18
	Итого:	66	50		64	180

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических заданий в объеме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой последовательное и систематическое изложение учебного материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины.

Лекционные занятия формируют базу для практических занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач.

Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и практических занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, конспектов практических занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Больше количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы. Обязательным элементом самостоятельной работы является выполнение домашнего задания.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения требуется выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к онлайн-занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

В рамках дисциплины предусмотрено проведение трёх текущих аттестаций за семестр. Результаты текущей успеваемости учитываются при выставлении оценки по промежуточной аттестации в соответствии с положением П ВГУ 2.1.04.16–2019 «Положение о текущей и промежуточной аттестации знаний, умений и навыков обучающихся на факультете компьютерных наук Воронежского государственного университета с использованием балльно-рейтинговой системы».

Обучение лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с учетом их индивидуальных психофизических особенностей и в соответствии с индивидуальной программой реабилитации. Для лиц с нарушением слуха при необходимости допускается присутствие на лекциях и практических занятиях ассистента, а также сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями слуха проводится в письменной форме, при этом используются общие критерии оценивания. При необходимости время подготовки на зачете может быть увеличено. Для лиц с нарушением зрения допускается аудиальное предоставление информации (например, с использованием программ-синтезаторов речи), а также использование на лекциях звукозаписывающих устройств (диктофонов и т.д.). На лекциях и практических занятиях при необходимости допускается присутствие ассистента. При проведении промежуточной аттестации для лиц с нарушением зрения тестирование может быть заменено на устное собеседование по вопросам. При необходимости время подготовки на экзамене может быть увеличено. Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата при необходимости допускается присутствие ассистента на лекциях и практических занятиях. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата проводится на общих основаниях, при необходимости процедура экзамена может быть реализована дистанционно.

## **15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины**

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-9441-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/195426">https://e.lanbook.com/book/195426</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2	Бибииков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / Ю. Н. Бибииков. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 304 с. — ISBN 978-5-8114-1176-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/210617">https://e.lanbook.com/book/210617</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3	Егоров, А. И. Обновленный курс обыкновенных дифференциальных уравнений / А. И. Егоров. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 472 с. — ISBN 978-5-507-44215-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/266756">https://e.lanbook.com/book/266756</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Панкратов, Е. Л. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / Е. Л. Панкратов. — Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2022. — 110 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/283097">https://e.lanbook.com/book/283097</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Жабко, А. П. Дифференциальные уравнения и устойчивость : учебник / А. П. Жабко, Е. Д. Котина, О. Н. Чижова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-1759-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/211928">https://e.lanbook.com/book/211928</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	ЗНБ ВГУ: <a href="https://lib.vsu.ru/">https://lib.vsu.ru/</a>
2	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online": <a href="http://biblioclub.ru/">http://biblioclub.ru/</a>
3	Электронно-библиотечная система "Лань": <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>
4	Электронно-библиотечная система "Консультант студента": <a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a>
5	Электронный университет ВГУ: <a href="https://edu.vsu.ru/">https://edu.vsu.ru/</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-9441-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/195426">https://e.lanbook.com/book/195426</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Егоров, А. И. Обновленный курс обыкновенных дифференциальных уравнений / А. И. Егоров. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 472 с. — ISBN 978-5-507-44215-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/266756">https://e.lanbook.com/book/266756</a> . — Режим доступа: для авториз. пользователей.

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала [edu.vsu.ru](http://edu.vsu.ru), а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Аудитория для лекционных занятий: мультимедиа-проектор, экран для проектора, компьютер с выходом в сеть «Интернет». Специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

Аудитория для практических занятий: специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска).

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Общие понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 1
2	Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 1
3	Дифференциальные уравнения высших порядков	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 2
4	Линейные дифференциальные уравнения	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 2
5	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 3
6	Понятие об интегральных уравнениях и краевых задачах	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 3
7	Некоторые модели естествознания, связанные с дифференциальными уравнениями	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Комплект задач
8	Теоремы о непрерывной зависимости и элементы теории устойчивости	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 4 Контрольная работа № 5
9	Элементы вариационного исчисления	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 6
10	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 6
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт с оценкой форма контроля – экзамен				Перечень вопросов к зачёту Перечень вопросов к экзамену

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

- контрольная работа



## Типовые задания для контрольной работы

### Контрольная работа № 1

**Задание 1 (10 баллов).** Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = 2 \cos x \sin y.$$

**Задание 2 (10 баллов).** Решить однородное дифференциальное уравнение

$$x^2 y' + y^2 + xy + x^2 = 0.$$

**Задание 3 (10 баллов).** Решить линейное дифференциальное уравнение

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$$

**Задание 4 (10 баллов).** Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0.$$

**Задание 5 (10 баллов).** Решить задачу Коши для уравнения Бернулли

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} y^2.$$

### Контрольная работа № 2

**Задание 1 (10 баллов).** Решить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

**Задание 2 (15 баллов).** Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение методом неопределенных коэффициентов

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x.$$

**Задание 3 (10 баллов).** Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

**Задание 4 (15 баллов).** Решить дифференциальное уравнение

$$(2 - x)y'' + xy' - 2y = 0,$$

Используя определитель Вронского, если известно одно его частное решение  $y = e^x$ .

### Контрольная работа № 3

**Задание 1 (10 баллов).** Решить систему линейных дифференциальных уравнений методом Эйлера (с помощью характеристического уравнения)

$$\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

**Задание 2 (15 баллов).** Решить систему дифференциальных уравнений

$$X' = AX$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

методом матричной экспоненты.

**Задание 3 (15 баллов).** Решить краевую задачу, используя функцию Грина

$$y'' + y' = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

**Задание 4 (10 баллов).** Решить систему линейных дифференциальных уравнений методом Эйлера (с помощью характеристического уравнения)

$$\begin{cases} x' = -10x + y, \\ y' = -9x - 4y. \end{cases}$$

### Контрольная работа № 4

**Задание 1 (25 баллов).** Исследовать особые точки системы и сделать чертёж расположения интегральных кривых на плоскости  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} x' = 2x - 8y, \\ y' = -2x + 2y; \end{cases}$$

**Задание 2 (25 баллов).** Исследовать особые точки системы и сделать чертёж расположения интегральных кривых на плоскости  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} x' = 6x - 3y, \\ y' = 6x - 2y; \end{cases}$$

### Контрольная работа № 5

**Задание 1 (15 баллов).** Используя теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$

**Задание 2 (15 баллов).** Построив функцию Ляпунова, исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^3 + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \end{cases}$$

**Задание 3 (20 баллов).** Используя спектральный признак, определите, является ли устойчивым нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = 16x + 16y + 8z, \\ y' = -16x - 16y - 8z, \\ z' = -4x - 4y - 2z. \end{cases}$$

### **Контрольная работа № 6**

**Задание 1 (25 баллов).** Найти экстремаль функционала

$$I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

**Задание 2 (25 баллов).** Найти решение уравнения с частными производными

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = x,$$

удовлетворяющее условию

$$u(0, y) = y^2$$

Контрольная работа проводится в письменной форме.

Шкала оценивания:

- 0-24 балла – «неудовлетворительно»
- 25-34 балла – «удовлетворительно»
- 35-44 балла – «хорошо»
- 45-50 баллов – «отлично».

## **20.2 Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: перечень вопросов к зачёту, перечень вопросов к экзамену, комплект задач.

### **Перечень вопросов к зачёту (3 семестр)**

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия.
2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

3. ДУ первого порядка. Геометрическая интерпретация.
4. Задача Коши для ДУ первого порядка.
5. Теорема существования и единственности. Пример.
6. ДУ с разделяющимися переменными (3 случая).
7. Однородные ДУ первого порядка.
8. Уравнение в полных дифференциалах.
9. Линейные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли.
10. Линейные однородные ДУ  $n$ -го порядка. Свойства решений. Линейная зависимость и независимость системы функций.
11. Определитель Вронского. Теорема об определителе Вронского с доказательством.
12. ФСР. Теорема об общем решении ЛОДУ  $n$ -го порядка.
13. Формула Лиувилля-Остроградского.
14. Восстановление ДУ по ФСР.
15. Линейные неоднородные ДУ  $n$ -го порядка.
16. Метод Лагранжа.
17. Функция Коши и ее свойства.
18. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами. Корни вещественные, различные.
19. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами. Корни комплексно сопряженные. Корни вещественные, кратные.
20. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами. Специальная правая часть.
21. Исследование уравнения механических колебаний. Свободные колебания.
22. Исследование уравнения механических колебаний. Вынужденные колебания.
23. ДУ, допускающие понижение порядка. Случай I и II (пример про цепную линию обязательно).
24. ДУ, допускающие понижение порядка. Случай III (пример обязательно.)
25. Системы ДУ. Линейные системы ДУ. Основные понятия. Переход от ДУ  $n$ -го порядка к системе ДУ.
26. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Корни вещественные, различные.
27. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Корни простые комплексные.
28. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Корни вещественные, кратные.
29. Матричная функция  $e^{At}$  и ее свойства.
30. Понятие об интегральном уравнении. Связь интегральных и дифференциальных уравнений.
31. Доказательство теоремы существования и единственности.
32. Краевые задачи.

33. Описание семейства кривых на плоскости дифференциальными уравнениями.
34. Особые решения ДУ первого порядка.
35. Уравнение Риккати.
36. Уравнения Лагранжа, Клеро. Приближенные решения ОДУ: метод ломаных Эйлера.

### **Перечень вопросов к экзамену (4 семестр)**

1. Геометрические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Уравнения химической кинетики,
3. Задачи популяционной динамики.
4. Теорема о продолжении решения (примеры).
5. Непрерывная зависимость решения ОДУ от начальных данных.
6. Непрерывная зависимость решения ОДУ от параметров.
7. Линейные дифференциальные неравенства. Теорема Чаплыгина.
8. Линейные интегральные неравенства.
9. Автономные системы. Фазовый портрет. Типы фазовых траекторий.
10. Особые точки линейной системы. Собственные значения вещественные.
11. Особые точки линейной системы. Собственные значения комплексные.
12. Различные определения устойчивости для решений ОДУ и систем ОДУ.
13. Устойчивость решений линейных систем.
14. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами. Спектральный критерий устойчивости.
15. Функция Ляпунова. Определение устойчивости с помощью функции Ляпунова для автономных и неавтономных систем ОДУ.
16. Определение устойчивости стационарных решений автономных системы ОДУ по первому приближению.
17. Понятие и примеры задач вариационного исчисления.
18. Понятие функционала, вариации функционала. Вывод уравнения Эйлера-Лагранжа.
19. Решение задачи о кратчайшем расстоянии, задачи о брахистохроме.
20. Первые интегралы системы ОДУ.
21. Функциональная независимость первых интегралов.
22. Уравнения в частных производных первого порядка. Линейные уравнения. Основные понятия.
23. Двумерные линейные уравнения в частных производных первого порядка (простейший случай, замена переменных).
24. Двумерные линейные уравнения в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами. Характеристики.
25. Геометрический смысл уравнения в частных производных. Решение задачи Коши.
35. Квазилинейные уравнения в частных производных. Линейные неоднородные уравнения в частных производных.

### **Комплект задач к экзамену**

1. Тело охладилось за 10 минут от  $100^\circ$  до  $60^\circ$ . Температура окружающего воздуха поддерживается равной  $20^\circ$ . Когда тело остынет до  $25^\circ$ ? (Считать, что скорость остывания пропорциональна разности температур тела и окружающей среды).
2. Определить путь, пройденный телом за время  $t$  если его скорость пропорциональна пройденному пути, и если тело проходит 100 м за 10 с, а 200 м – за 15 с.

3. Найти кривые, у которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, величина постоянная, равная  $a^2$ .

4. Скорость распада радия пропорциональна наличному его количеству. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

5. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается вода со скоростью 5 л/мин, и смесь вытекает с такой же скоростью. Сколько соли останется в баке через час? (Концентрация принимается равномерной).

6. Найти линию, у которой площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной ее точки и касательной в этой точке, равна половине квадрата абсциссы.

7. Пользуясь прямоугольной системой координат, найти форму зеркала, отражающего параллельно данному направлению все лучи, выходящие из одной точки.

8. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. За сколько времени останется 1% от его первоначального количества, если известно, что скорость распада пропорциональна массе радиоактивного вещества?

9. Найти кривую на плоскости  $xOy$ , у которой отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

10. Пуля входит в доску толщиной 10 см со скоростью 200 м/с, а вылетает из доски со скоростью 80 м/с. Считая, что сила сопротивления движению пули в доске пропорциональна квадрату скорости, найти время движения пули через доску.

11. Футбольный мяч весом 0,4 кг брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 Г при скорости 1 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема.

12. Найти кривые, для которых треугольник, образованный осью  $Oy$ , касательной к кривой и радиусом-вектором точки касания, является равнобедренным.

13. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды пропорционального скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с; через 4 с её скорость 1 м/с. Когда скорость лодки уменьшится до 1 см/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

14. Найти кривые, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную  $2/3$  абсциссы точки касания.

15. Некоторое вещество преобразуется в другое вещество со скоростью, пропорциональной количеству необработанного вещества. Сколько вещества было в начале процесса, и через сколько времени останется лишь 1% первоначального количества вещества, если известно, что по истечении одного часа этого вещества было 31,4 г, а по истечении трех часов – 9,7 г.

16. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 10 км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен и через 20 с скорость лодки стала равной 6 км/ч. Считая, что сила сопротивле-

ния воды пропорциональна скорости лодки, найти путь, пройденный лодкой через 2 минуты после остановки мотора и скорость лодки в этот момент.

17. Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси  $Oy$ , равна квадрату абсциссы точки касания.

18. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью  $Ox$  имеет абсциссу вдвое меньшую абсциссы точки касания.

19. Сила трения, замедляющая движение диска, вращающегося в жидкости, пропорциональна его угловой скорости. Диск начал вращаться с угловой скоростью 3 об/с, а через минуту его угловая скорость стала 2 об/с. Какова будет его угловая скорость через три минуты после начала вращения?

20. Материальная точка массой 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента  $t = 0$ , и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент  $t = 10$  с скорость точки равнялась 0,5 м/с, а сила  $4 \cdot 10^{-5}$  Н. Какова будет скорость точки через минуту после начала движения?

21. Найти кривую, для которой радиус-вектор каждой точки равен длине отрезка касательной к кривой в этой точке, заключенного между точкой касания и осью  $Ox$ .

22. Некоторое количество нерастворимого вещества, содержащее в своих порах 10 кг соли, подвергается воздействию 90 л воды. Через 1 час половина соли растворилась. Сколько соли растворилось бы в течение этого времени, если бы

количество воды было удвоено? Известно, что скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг на 3 л).

23. Некоторое количество вещества, содержащее 3 кг влаги, помещено в комнату объемом 100 м<sup>3</sup>, воздух в которой имеет влажность 25%. Насыщенный воздух такой же температуры содержит 0,12 кг влаги на 1 м<sup>3</sup>.

Если в течение первых суток вещество потеряло половину влаги, то сколько в нем останется влаги по истечении вторых суток? Считается, что скорость испарения влаги пропорциональна ее количеству в веществе и разности между влажностью окружающего воздуха и влажностью насыщенного воздуха.

24. Найти кривую, проходящую через точку (1;1), у которой точка пересечения любой ее касательной с осью ординат имеет ординату в два раза меньшую ординаты точки касания.

25. Сила трения, замедляющая вращение диска в жидкости, пропорциональна его угловой скорости. Диск начал вращаться с угловой скоростью 5 об/с, а через минуту его угловая скорость стала равна 3 об/с. Через сколько времени после начала вращения диск будет иметь угловую скорость 1 об/с?

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
---------------------------------	--------------------------------------	--------------

Дан полный, развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Изложение материала не содержит ошибок, отличается последовательностью, грамотностью, логической стройностью.	Повышенный уровень	Отлично
Дан развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Материал изложен в целом последовательно и грамотно, отсутствуют грубые ошибки, однако имеются отдельные неточности в определениях, вычислениях, доказательствах, изложениях положений теории.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) содержит изложение только базового теоретического материала, имеются ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Нарушена логическая последовательность в изложении материала.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) отсутствует, либо содержит грубые ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Обучающийся не владеет основными понятиями дисциплины. Отсутствует логическая последовательность в изложении материала.	–	Неудовлетворительно

Для оценивания результатов обучения на зачёте с оценкой используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Дан полный, развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Изложение материала не содержит ошибок, отличается последовательностью, грамотностью, логической стройностью.	Повышенный уровень	Отлично
Дан развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Материал изложен в целом последовательно и грамотно, отсутствуют грубые ошибки, однако имеются отдельные неточности в определениях, вычислениях, доказательствах, изложениях положений теории.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) содержит изложение только базового теоретического материала, имеются ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Нарушена логическая последовательность в изложении материала.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) отсутствует, либо содержит грубые ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Обучающийся не владеет основными понятиями дисциплины. Отсутствует логическая последовательность в изложении материала.	–	Неудовлетворительно



Приведённые ниже задания рекомендуется использовать при проведении диагностических работ для оценки остаточных знаний по дисциплине

Задания с выбором ответа

№	Задание	Варианты ответа	Верный ответ
1	Укажите общее решение уравнения $y'' + 4y = 0$ .	а) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ б) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ в) $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$ г) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$	б
2	Определите тип дифференциального уравнения $(x^2 + 1)y' = \sin y$ .	а) линейное дифференциальное уравнение первого порядка б) нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в) дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными г) однородное дифференциальное уравнение	в
3	Определите порядок дифференциального уравнения $(y'')^3 + y^2 = x^5$ .	а) 3 б) 2 в) 6 г) 5	б
4	Определите тип особой точки (точки покоя) системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = -8x + y. \end{cases}$	а) центр б) неустойчивый узел в) устойчивый узел г) седло	г
5	Укажите замену переменной, с помощью которой уравнение Бернулли $y' - \frac{y}{x} = xy^2$ можно привести к линейному уравнению.	а) $z = \frac{y}{x}$ б) $z = \frac{x}{y}$ в) $z = \frac{1}{y}$ г) $z = \frac{1}{y^2}$	в

Задания с кратким ответом

№	Задание	Верный ответ
1	Пусть $y(x)$ – решение уравнения $y' = \frac{y}{x+2}$ , удовлетворяющее условию $y(0) = 4$ . Укажите, чем равно $y(1)$ .	6
2	Укажите значение вещественного параметра $k$ , при котором уравнение $y'' + ky = 0$ будет иметь решение $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ .	4

Задания с развернутым ответом

**Задание 1.** Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y' - 6y = 10e^{3x}$$

методом неопределённых коэффициентов.

Решение.

Найдём решение однородного уравнения, соответствующего заданному:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 3$  вещественны и различны, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{00} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

Найдём теперь вид частного решения неоднородного уравнения. Сопоставляя общий вид квазиполинома  $e^{\alpha x}(A_1(x) \cos \beta x + A_2(x) \sin \beta x)$  с правой частью  $10e^{3x}$  заданного уравнения, получаем, что  $A_1(x) = 10$ ,  $A_2(x) = 0$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0$ . Так как число  $\alpha + i\beta = 3$  совпадает с некратным корнем  $\lambda_2 = 3$  характеристического уравнения, а максимальная степень полиномов  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$  равна нулю, то частное решение будем искать в виде

$$y_{\text{чн}} = Axe^{3x}.$$

Подставив это выражение в заданное уравнение, получим

$$\begin{aligned}(Axe^{3x})'' - (Axe^{3x})' - 6Axe^{3x} &= 10e^{3x}, \\ 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - (Ae^{3x} + 3Axe^{3x}) - 6Axe^{3x} &= 10e^{3x}, \\ 5Ae^{3x} &= 10e^{3x},\end{aligned}$$

откуда  $A = 2$ .

Таким образом,

$$y_{\text{чн}} = 2xe^{3x}.$$

Складывая общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного, получим общее решение рассматриваемого уравнения:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + 2xe^{3x}.$$

Ответ:  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + 2xe^{3x}$ .

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

