

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
цифровых технологий



/ Кургалин С.Д.

28.02.2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.26 УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

02.03.01 Математика и компьютерные науки

2. Профиль подготовки/специализация:

квантовая теория информации, распределенные системы и искусственный интеллект

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: цифровых технологий

6. Составители программы:

Крыловецкий Александр Абрамович, кандидат физико-математических наук, доцент

7. Рекомендована: НМС ФКН (протокол № 3 от 25.02.2022)

8. Учебный год: 2023-2024 Семестр: 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины: фундаментальная подготовка в области уравнений в частных производных; овладение аналитическими методами математической физики; овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к обязательной части блока Б1. Для успешного освоения дисциплины необходимо предварительное изучение курса математического анализа и дифференциальных уравнений.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знает классификацию уравнений в частных производных, метод разделения переменных и метод функций источника решения краевых задач.
		ОПК-1.2	Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Владеет навыками выбора и адаптации существующих методов решения классических задач математической физики.
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Умеет описывать математические модели физических явлений с помощью уравнений в частных производных.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 4/144.

Форма промежуточной аттестации: 4 семестр – экзамен.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		4 сем.
Аудиторные занятия	64	64
в том числе:		
лекции	32	32
практические	16	16
лабораторные	16	16
Самостоятельная работа	44	44
Экзамен	36	36
Итого:	144	144

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
1. Лекции			
1.1	Введение	Введение.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=4014
1.2	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=4014
1.3	Уравнения гиперболического типа	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Метод распространяющихся волн. Метод разделения переменных. Задачи с данными на характеристиках. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=4014
1.4	Уравнения параболического типа	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Метод разделения переменных. Задачи на бесконечной прямой. Задачи без начальных условий. Свойства дельта-функции	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=4014
1.5	Уравнения эллиптического типа	Задачи, приводящие к уравнению Лапласа. Общие свойства гармонических функций. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных. Функция источника. Теория потенциала. Функции влияния точечных источников. Задачи математической теории дифракции.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=4014
1.6	Распространение волн в пространстве	Распространение волн в пространстве. Интегральная формула. Колебания ограниченных объемов.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=4014
1.7	Распространение тепла в пространстве	Распространение тепла в неограниченном пространстве. Распространение тепла в ограниченных телах. Краевые задачи для областей с подвижными границами. Тепловые потенциалы.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=4014
1.8	Специальные функции	Цилиндрические функции. Краевая задача для уравнения Бесселя. Различные типы цилиндрических функций. Сферические функции. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Гармонические полиномы и сферические функции. Полиномы Чебышева-Эрмита. Полиномы Чебышева-Лагерра.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=4014
2. Лабораторные и практические занятия			
2.1	Введение	Введение.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2516
2.2	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2516
2.3	Уравнения гиперболического типа	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Метод распространяющихся волн. Метод разделения переменных. Задачи с данными на характеристиках. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2516
2.4	Уравнения параболического типа	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Метод разделения переменных. Задачи на бесконечной прямой. Задачи без начальных условий. Свойства дельта-функции	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2516
2.5	Уравнения эллиптического типа	Задачи, приводящие к уравнению Лапласа. Общие свойства гармонических функций. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2516

		переменных. Функция источника. Теория потенциала. Функции влияния точечных источников. Задачи математической теории дифракции.	
2.6	Распространение волн в пространстве	Распространение волн в пространстве. Интегральная формула. Колебания ограниченных объемов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2516
2.7	Распространение тепла в пространстве	Распространение тепла в неограниченном пространстве. Распространение тепла в ограниченных телах. Краевые задачи для областей с подвижными границами. Тепловые потенциалы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2516
2.8	Специальные функции	Цилиндрические функции. Краевая задача для уравнения Бесселя. Различные типы цилиндрических функций. Сферические функции. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Гармонические полиномы и сферические функции. Полиномы Чебышева-Эрмита. Полиномы Чебышева-Лагерра.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2516

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Введение	4	0	0	2	6
2	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	4	4	4	6	18
3	Уравнения гиперболического типа	4	2	2	6	14
4	Уравнения параболического типа	4	2	2	6	14
5	Уравнения эллиптического типа	4	2	2	6	14
6	Распространение волн в пространстве	4	2	2	6	14
7	Распространение тепла в пространстве	4	2	2	6	14
8	Специальные функции	4	2	2	6	14
	Итого:	32	16	16	44	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических заданий в объёме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой после-

довательное и систематическое изложение учебного материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины.

Лекционные занятия формируют базу для лабораторных занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач. Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и лабораторных занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, конспектов лабораторных занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Больше количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы. Обязательным элементом самостоятельной работы является выполнение домашнего задания.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения требуется выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к онлайн-занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

В рамках дисциплины предусмотрено проведение трёх текущих аттестаций за семестр. Результаты текущей успеваемости учитываются при выставлении оценки по промежуточной аттестации в соответствии с положением П ВГУ 2.1.04.16–2019 «Положение о текущей и промежуточной аттестации знаний, умений и навыков обучающихся на факультете компьютерных наук Воронежского государственного университета с использованием балльно-рейтинговой системы».

Обучение лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с учетом их индивидуальных психофизических особенностей и в соответствии с индивидуальной программой реабилитации. Для лиц с нарушением слуха при необходимости допускается присутствие на лекциях и лабораторных занятиях ассистента, а также сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями слуха проводится в письменной форме, при этом используются общие критерии оценивания. При необходимости время подготовки на зачете может быть увеличено. Для лиц с нарушением зрения допускается аудиальное предоставление информации (например, с использованием программ-синтезаторов речи), а также использование на лекциях звукозаписывающих устройств (диктофонов и т.д.). На лекциях и лабораторных занятиях при необходимости допускается присутствие ассистента. При проведении промежуточной аттестации для лиц с нарушением зрения тестирование может быть заменено на устное собеседование по вопросам. При необходимости время подготовки на зачете может быть увеличено. Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата при необходимости допускается присутствие ассистента на лекциях и лабораторных занятиях. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата проводится на общих основаниях, при необходимости процедура зачета может быть реализована дистанционно.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Голоскоков, Д. П. Курс математической физики с использованием пакета Maple : учебное пособие / Д. П. Голоскоков. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 576 с. — ISBN 978-5-8114-1854-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212132 . — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Емельянов, В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач : учебное пособие для вузов / В. М. Емельянов, Е. А. Рыбакина. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 216 с. — ISBN 978-5-8114-7173-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/156410 . — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Деревич, И. В. Практикум по уравнениям математической физики : учебное пособие / И. В. Деревич. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 428 с. — ISBN 978-5-8114-2601-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212843 . — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Конспект лекций по уравнениям математической физики для студентов IT-направлений [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. фак. компьютер. наук 2 и 3 к. днев. отд-ния, обуч. по направлениям: 010200 "Математика и компьютерные науки", 230400 "Информ. системы и технологии, 231000 "Програм. инженерия"] / Воронеж. гос. ун-т ; сост.: А.А. Крыловецкий, Т.А. Крыловецкая. — Электрон. текстовые. дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интрасети ВГУ. — Текстовый файл. — Windows 2000; Adobe Acrobat Reader. — URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m14-72.pdf

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1	ЗНБ ВГУ: https://lib.vsu.ru/
2	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online": http://biblioclub.ru/
3	Электронно-библиотечная система "Лань": https://e.lanbook.com/

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Конспект лекций по уравнениям математической физики для студентов IT-направлений [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. фак. компьютер. наук 2 и 3 к. днев. отд-ния, обуч. по направлениям: 010200 "Математика и компьютерные науки", 230400 "Информ. системы и технологии, 231000 "Програм. инженерия"] / Воронеж. гос. ун-т ; сост.: А.А. Крыловецкий, Т.А. Крыловецкая. — Электрон. текстовые. дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интрасети ВГУ. — Текстовый файл. — Windows 2000; Adobe Acrobat Reader. — URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m14-72.pdf

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение)

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория для лекционных занятий: мультимедиа-проектор, экран для проектора, компьютер с выходом в сеть «Интернет». Специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

Аудитория для практических занятий: специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска).

Аудитория для лабораторных занятий: компьютеры с выходом в сеть «Интернет» и доступом к электронным библиотечным системам, специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Введение	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
2	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
3	Уравнения гиперболического типа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
4	Уравнения параболического типа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
5	Уравнения эллиптического типа	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
6	Распространение волн в пространстве	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
7	Распространение тепла в пространстве	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
8	Специальные функции	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольная работа, лабораторная работа.

Перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Задание 1 (3 балла). Определите тип уравнения

$$27u_{xx} - 18u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_y - 9 = 0.$$

Задание 2 (4 балла). Определите тип уравнения

$$35u_y - 48u_{yy} - 11u_{xx} + \sin(x) = 0.$$

Задание 3 (5 баллов). Определите тип уравнения при $x > 1$

$$2 \cos(y)u_{xx} - 2xu_{xy} + \sin(y)u_{yy} + \sin(x)u_x + 7 = 0.$$

Задание 4 (8 баллов). Найдите общее решение уравнения

$$u_{xx} = xy.$$

Задание 5 (10 баллов). Найдите общее решение уравнения

$$u_{xy} = \sin(x) + \sin(y).$$

Задание 6 (20 баллов). Приведите уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + 9 = 0.$$

Вариант 2

Задание 1 (3 балла). Определите тип уравнения

$$-9u_{xx} + 20u_{xy} - 12u_{yy} - 11u_x + 2u = 0.$$

Задание 2 (4 балла). Определите тип уравнения

$$2u_x + 5u_{yy} - 18u_{xy} + 3e^{-x}u = 0.$$

Задание 3 (5 баллов). Определите тип уравнения при $y > 0$

$$y^2 \sin^2(x)u_{xx} + 4y \cos(x)u_{xy} - 4u_{yy} + 2yu_x = 5.$$

Задание 4 (8 баллов). Найдите общее решение уравнения

$$u_{xy} = x + y^2.$$

Задание 5 (10 баллов). Найдите общее решение уравнения

$$u_{yy} = 2 \sin(x) + e^{-y}.$$

Задание 6 (20 баллов). Приведите уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_y - u = 0.$$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Задание 1 (20 баллов). Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 16u_{tt} = 0, x \in [0, 4],$$

$$u(0, t) = 0, u_x(4, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{5\pi}{8}x\right), u_t(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right).$$

Задание 2 (30 баллов). Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 4u_{tt} = 0, x \in [0, 2],$$

$$u(0, t) = 0, u(2, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 2x, u_t(x, 0) = 0.$$

Вариант 2

Задание 1 (20 баллов). Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 9u_{tt} = 0, x \in [0, 2],$$

$$u_x(0, t) = 0, u(2, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 5 \cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right), u_t(x, 0) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right).$$

Задание 2 (30 баллов). Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 25u_{tt} = 0, x \in [0, 3],$$

$$u(0, t) = 0, u(3, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x.$$

Контрольная работа № 3

Вариант 1

Задание 1 (20 баллов). Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - u_t = 2xe^{-t}, x \in [0, 1],$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0.$$

Задание 2 (30 баллов). Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 4u_t = 4x - 12t^2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{-2t}, x \in [0, 3];$$

$$u(0, t) = t^3, u_x(3, t) = 1 - t;$$

$$u(x, 0) = x.$$

Вариант 2

Задание 1 (20 баллов). Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 9u_t = 5xt, x \in [0, 2],$$

$$u(0, t) = 0, u(2, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0.$$

Задание 2 (30 баллов). Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - u_t = -2t + 2xe^{-t} + 7t \sin\left(\frac{3\pi}{10}x\right), x \in [0, 5];$$

$$u(0, t) = t^2 + 1, u_x(5, t) = 2e^{-t};$$

$$u(x, 0) = 2x + 1.$$

Перечень заданий для лабораторных работ

1. Задания для решения на компьютере к разделам 1 и 2.

Задание 1 (12 баллов). Привести уравнения к каноническому виду

- 1) $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$;
- 2) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$;
- 3) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$;
- 4) $x^2u_{xx} + 2xuy_{xy} + y^2u_{yy} = 0$;
- 5) $7y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$;
- 6) $y^2u_{xx} + 2xuy_{xy} + 2x^2u_{yy} + uy_y = 0$.

Задание 2 (6 баллов). Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

$$(\ell + x)u_{xx} + 2xuy_{xy} - y^2u_{yy} = 0.$$

и исследовать их зависимость от ℓ , где ℓ – числовой параметр.

Задание 3 (12 баллов). Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется

- 1) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$;
- 2) $u_{xx} + yu_{yy} = 0$;
- 3) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$;
- 4) $\sin^2(x)u_{xx} - 2y \sin(x)u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

Задание 4 (8 баллов). Найти общее решение уравнений с постоянными коэффициентами

- 1) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$;
- 2) $u_{xx} + u_{xy} = \sin(xy)$;
- 3) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u = 0$;
- 4) $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$.

Задание 5 (12 баллов). Найти общее решение уравнений с переменными коэффициентами

- 1) $u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$;
- 2) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$;
- 3) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$;
- 4) $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$.

2. Задания для решения на компьютере к разделу 3.

Выполнение заданий 1-8 предполагает использование стандартных функций программного пакета символьной математики для нахождения численного решения краевой задачи и его графическое изображение. Задания 9-19 требуется решить методом разделения переменных (методом Фурье). Во всех заданиях, если иное не оговорено отдельно, все начальные условия предполагаются однородными.

Задание 1 (2 балла). Решить однородное уравнение поперечных колебаний струны с закрепленными концами для случая возбуждения точечным ударом

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 100, & x = 1/4, \\ 0, & x \neq 1/4. \end{cases}$$

Задание 2 (2 балла). Решить неоднородное уравнение поперечных колебаний струны с закрепленными концами для случая возбуждения ударом прямоугольного молоточка

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 10, & 0,3 \leq x \leq 0,35, \\ 0, & 0 \leq x < 0,3 \text{ или } 0,35 < x \leq 1, \end{cases}$$

и точечной постоянной неоднородности

$$f(x) = \begin{cases} 10, & x = 0,7, \\ 0, & x \neq 0,7. \end{cases}$$

Задание 3 (2 балла). Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальная скорость всех точек струны равна нулю.

Задание 4 (3 балла). К струне $0 \leq x \leq 2$ с жестко закрепленными концами с момента времени $t = 0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $f(x, t) = \sin(2\pi x) \sin(\omega t)$. Найти колебания струны в среде без сопротивления; исследовать возможность резонанса (линейного по времени роста амплитуды колебаний).

Задание 5 (3 балла). Решить предыдущую задачу, предполагая, что колебания происходят в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости.

Задание 6 (2 балла). Найти колебания струны $0 \leq x \leq 1$ с жестко закрепленными концами, если к точке $x = 1/3$ этой струны с момента времени $t = 0$ приложена сила $f(t) = \cos(\omega t)$.

Задание 7 (2 балла). Найти колебания струны $0 \leq x \leq 1$ с жестко закрепленными концами под действием силы, приложенной с момента $t = 0$ и имеющей плотность $f(x, t) = t \sin(\pi x), 0 \leq t < +\infty$, предполагая, что внешняя среда не оказывает сопротивления колебаниям.

Задание 8 (2 балла). Решить предыдущую задачу, считая действие силы ограниченным по времени

$$f(x, t) = \begin{cases} t \sin(\pi x), & t \leq 10, \\ 0, & t > 10. \end{cases}$$

Найти установившиеся колебания для $t > 10$.

Задание 9 (2 балла). Найти формальное решение уравнения малых продольных колебаний однородного упругого стержня длины L . В начальный момент времени стержень сжат на величину ε ($\varepsilon \ll L$). Начальная скорость точек стержня равна нулю.

Задание 10 (2 балла). Решить предыдущую задачу, если дополнительно к начальному сжатию одному из концов стержня мгновенно сообщается импульс P .

Задание 11 (2 балла). Найти продольные колебания стержня, один конец которого ($x = 0$) закреплен жестко, а другой ($x = L$) свободен, при начальных условиях $u(x, 0) = kx$, $u_t(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq L$.

Задание 12 (4 балла). Найти колебания упругого стержня со свободными концами, получившего в начальный момент времени продольный импульс P в один из концов.

Задание 13 (4 балла). Найти продольные колебания стержня $0 \leq x \leq L$ в среде без сопротивления, если конец $x = 0$ стержня закреплен жестко, а к концу $x = L$, начиная с момента времени $t = 0$, приложена сила $f(t) = A \sin(\omega t), 0 \leq t < +\infty$.

Задание 14 (4 балла). Решить предыдущую задачу для силы $f(t) = At, 0 \leq t < +\infty$, $A = \text{const}$.

Задание 15 (2 балла). Решить однородное уравнение малых поперечных колебаний квадратной мембраны

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = 4x(1-x) \sin^5 y \sin(1-y), \quad u_t(x, y, 0) = 0,$$

и однородными граничными условиями.

Задание 16 (2 балла). Решить однородное уравнение малых поперечных колебаний квадратной мембраны, закрепленной по краям и возбуждаемой точечным мгновенным ударом

$$u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = \delta(x - 1/2)\delta(y - 1/2).$$

Задание 17 (3 балла). Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$ с закрепленными краями. Колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране и перпендикулярной к её поверхности силой $f(t) = \sin \omega t$, $0 \leq t < +\infty$.

Задание 18 (3 балла). Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$ с закрепленными краями. Колебания вызваны сосредоточенной поперечной силой $f(t) = \sin \omega t$, $0 \leq t < +\infty$, приложенной к точке (x_0, y_0) , $0 < x_0 < L_1$, $0 < y_0 < L_2$.

Задание 19 (4 балла). Найти установившиеся колебания прямоугольной мембраны $0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$ с закрепленными краями в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, под действием непрерывно распределенной по мембране и перпендикулярной к её поверхности силы $f(t) = \sin \omega t$, $0 \leq t < +\infty$.

3. Задания для решения на компьютере к разделу 4.

Задания 1-6 необходимо решить методом преобразования Фурье. Для выполнения заданий 7-9 применяется метод функции источника.

Задание 1 (2 балла). Решить уравнение теплопроводности для неограниченного одномерного стержня с заданным начальным условием

$$u(x, 0) = \theta(x + 1) - \theta(x - 1),$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Задание 2 (2 балла). Решить уравнение теплопроводности для неограниченного одномерного стержня с заданным начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

Задание 3 (4 балла). Применяя интегральное синусное преобразование Фурье решить однородное уравнение теплопроводности для полубесконечного одномерного стержня

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ и однородным краевым условием $u(0, t) = 0$.

Задание 4 (4 балла). Решить предыдущую задачу для $u(x, 0) = e^{-x^2}$.

Задание 5 (4 балла). Применяя интегральное преобразование Фурье решить неоднородное уравнение теплопроводности для бесконечного одномерного стержня

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty \leq x < +\infty, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

с начальным условием $u(x,0) = 0$.

Задание 6 (5 баллов). Решить предыдущую задачу для полубесконечного стержня $0 \leq x < +\infty$ с нулевыми начальным $u(x,0) = 0$ и граничным $u(0,t) = 0$ условиями.

Задание 7 (9 баллов). Решить неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 \leq x \leq L,$$

с однородным начальным $u(x,0) = 0$ и граничным условием $u(L,t) = 0$ и заданной функцией неоднородности:

1) $f(x,t) = x[\theta(x) - \theta(x-1)]te^{-t}$ ($\theta(x)$ – функция Хевисайда);

2) $f(x,t) = \sin(2\pi x)[\theta(x) - \theta(x-0,5)]te^{-t}$;

3) $f(x,t) = x \sin(\pi x)[\theta(x) - \theta(x-1)]$.

Задание 8 (10 баллов). Решить неоднородное уравнение теплопроводности теплоизолированно-го стержня

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 \leq x \leq L,$$

с начальным условием $u(x,0) = 0$.

Задание 9 (10 баллов). Решить неоднородное уравнение теплопроводности теплоизолированно-го стержня $0 \leq x \leq L$, левый конец которого теплоизолирован, а правый конец поддерживается при постоянной нулевой температуре. Функция неоднородности:

$$f(x,t) = x[\theta(x) - \theta(x-1)]te^{-t}.$$

Начальное распределение температур $u(x,0) = 0$.

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: перечень вопросов к экзамену.

Перечень вопросов к экзамену

Раздел 1. Введение.

1. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных второго порядка.
2. Линейное уравнение с частными производными второго порядка и его общее решение.

Раздел 2. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными.

1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Характеристики линейного уравнения второго порядка. Уравнение характеристик.

Раздел 3. Уравнения гиперболического типа.

1. Уравнение поперечных колебаний струны.
2. Уравнение колебаний упругого стержня.
3. Уравнение поперечных колебаний мембраны.
4. Задача Коши для уравнения струны, формула Даламбера.
5. Ограниченная струна. Метод Фурье.
6. Задача Штурма-Лиувилля.
7. Метод Фурье для задачи о колебаниях прямоугольной мембраны.

8. Метод Фурье для задачи о колебаниях круглой мембраны.

Раздел 4. Уравнения параболического типа.

1. Линейная задача о распространении тепла.
2. Граничные и начальные условия для уравнения теплопроводности.
3. Уравнение диффузии.
4. Решение задачи о теплопроводности для бесконечного стержня с помощью преобразования Фурье.
5. Решение однородной задачи теплопроводности для конечного отрезка.
6. Решение неоднородной задачи теплопроводности для конечного отрезка методом функции источника.

Раздел 5. Уравнения эллиптического типа.

1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа.
2. Частные решения уравнения Лапласа.
3. Общие свойства гармонических функций.
4. Краевые задачи для уравнения Лапласа.
5. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных.

Раздел 6. Распространение волн в пространстве.

1. Ортогональные криволинейные системы координат.
2. Волновое уравнение.
3. Задача Коши для волнового уравнения.
4. Решение неоднородного волнового уравнения.

Раздел 7. Распространение тепла в пространстве.

1. Пространственная задача теплопроводности.
2. Распространение тепла в бесконечном цилиндре.

Раздел 8. Специальные функции.

1. Цилиндрические функции.
2. Сферические функции.
3. Полиномы Лежандра.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Дан полный, развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Изложение материала не содержит ошибок, отличается последовательностью, грамотностью, логической стройностью.	Повышенный уровень	Отлично
Дан развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Материал изложен в целом последовательно и грамотно, отсутствуют грубые ошибки, однако имеются отдельные неточности в определениях, вычислениях, доказательствах, изложениях положений теории.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) содержит изложение только базового теоретического материала, имеются ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках	Пороговый уровень	Удовлетворительно

положений теории. Нарушена логическая последовательность в изложении материала.		
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) отсутствует, либо содержит грубые ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Обучающийся не владеет основными понятиями дисциплины. Отсутствует логическая последовательность в изложении материала.	–	Неудовлетворительно