МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.
подпись, расшифровка подписи
11.04.2024г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.О1 Системы целочисленных сдвигов и фреймы в прикладных задачах

1. Код и наименование направления подготовки: 01.04.04 прикладная математика

2. Профиль подготовки: Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

3. Квалификация выпускника: магистр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: функционального анализа и операторных уравнений

6. Составители программы: Ушаков Сергей Николаевич, доцент, к.ф.-м.н.

7. Рекомендована: НМС математического факультета, протокол №0500-03 от 28.03.2024г.

8. Учебный год: 2024-2025 Семестр(ы): 1

9.Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- научить использовать переполненные системы функций, а также системы сохраняющие структуру сдвига, в цифровой обработке сигналов.

Задачи учебной дисциплины:

- построение узловых функций на основе целочисленных сдвигов одной функции, ортогонализация целочисленных сдвигов одной функции, нахождение двойственных фреймов к фрейму Габора, алгоритмы разложения по фреймам.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к обязательной части блока Б1.

Для успешного освоения дисциплины необходимо предварительное изучение курсов «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Численные методы», «Алгебра».

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способность проводить научные исследования, на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.2	Умеет находить, формулировать и решать научно-исследовательские задачи в профессиональной деятельности	Знать: основные понятия и теоремы теории фреймов и систем Рисса Уметь: доказывать теоремы и применять методы из теории фреймов и систем Рисса для решения задач Владеть: основными приёмами и методами решения задач цифровой обработки сигналов при помощи фреймов систем Рисса, построенных на основе целочисленных сдвигов одной функции
		ПК 1.3	Владеет навыками научно-исследовательской работы	Знать: основные понятия разделов дисциплины, методы анализа и доказательств основных утверждений; Уметь: применять аппарат теории фреймов и систем Рисса в решении практических задач; Владеть: навыками анализа и исследования конкретных задач.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 3/108.

Форма промежуточной аттестации – зачет

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость
		Всего
Аудиторные занятия		32
в том числе:	Лекции	16
	Практические	16
	Лабораторные	

Самостоятельная работа	76
в том числе: курсовая работа (проект)	
Форма промежуточной аттестации *Зачёт*	
Итого:	108

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
		1. Лекции	
1	Прикладные задачи в теории фреймов и систем Рисса	Метод наименьших квадратов в прикладных задачах. Задача интерполяции и квазиинтерполяции. Фреймы Габора в цифровой обработке сигналов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
		Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия. Ортогональная регрессия. Случай несовместных систем полного ранга. Полиномиальная регрессия. Матрица Грама и её свойства. Некорректное применение МНК.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
3	Фреймы и системы Рисса в конечномерных пространствах	Определение фрейма в пространстве C^n . Границы фрейма. Жесткий фрейм. Равенство Парсеваля. Замкнутость и полнота. Теорема о необходимых и достаточных условиях для фрейма. Теорема о границах жёсткого фрейма. Фрейм Парсеваля. Примеры.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
		Определение системы Рисса в пространстве $C^{n.}$ Константы Рисса. Теорема о необходимых и достаточных условиях для системы Рисса. Теорема о ортонормированной системе Рисса.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
		Связь метода наименьших квадратов и фреймов. Операторы анализа и синтеза. Фреймовый оператор. Двойственный фрейм. Сингулярное разложение матрицы. Примеры.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
4	Интерполяция по целочисленным сдвигам одной функции	Квазиинтерполяция. Узловая функция Базисные центрированные сплайны и их свойства. Фундаментальный сплайн.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
		Третья тета-функция Якоби. Узловая функция, построенная из целочисленных сдвигов функции Гаусса.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
5	Фреймы и системы Рисса в пространстве $L^2(R)$	Фреймы и системы Рисса в пространстве $L^2(R)$. Фреймы Габора. Теорема о двойственном фрейме к фрейму Габора. Определения и примеры. Габоратор.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233

		2. Практические занятия	
2	Библиотеки numpy и matplotlib языка программирования Python		
		Синтаксис и базовые конструкции языка Python. Условный оператор и операторы цикла.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
		Библиотеки numpy и matplotlib. Построение графиков.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
		Использование библиотеки numpy.linalg для МНК и SVD-разложения матриц.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
1	Прикладные задачи в теории фреймов и систем Рисса	Применения метода наименьших квадратов и сингулярного разложения.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233

4	Интерполяция по целочисленным сдвигам одной функции	Построение базисного центрированного сплайна. Интерполяция при помощи фундаментального сплайна.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
		Третья тета-функция Якоби. Интерполяция по целочисленным сдвигам функции Гаусса.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233
5	Фреймы и системы Рисса в пространстве $L^2(R)$	Построение двойственного фрейма к фрейму Габора. Примеры разложения функций	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Лабораторные	Практические	Самостоятельная работа	Всего
1.	Прикладные задачи в теории фреймов и систем Рисса	4		4	16	24
2.	Библиотеки numpy и matplotlib языка программирования Python			6	16	22
3.	Фреймы и системы Рисса в конечномерных пространствах	6			14	20
4.	Интерполяция по целочисленным сдвигам одной функции	4		4	18	26
5.	Фреймы и системы Рисса в пространстве $L^2(R)$	2		2	8	12
	Всего	16	0	16	72	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Системы целочисленных сдвигов и фреймы в прикладных задачах» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал или материал предыдущего практического занятия. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал

нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 72 часа.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Системы целочисленных сдвигов и фреймы в прикладных задачах» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (зачет).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Дополнительные главы функционального анализа: фреймы и системы Рисса : учебное пособие / С. Н. Ушаков, Т. Ю. Сапронова, И. Я. Новиков, Е. А. Киселев ; Воронежский государственный университет. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. 99 с. : ил., табл. ; 20 см. ISBN 978-5-9273-3456-8.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь ; пер. с фр. Д.А. Василькова под ред. С.В. Фомина; ред. С.А. Теляковский .— Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Мир, 1979 .— 587 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

№ п/п	Ресурс
1	*Университетская библиотека ONLINE* *http://biblioclub.ru/*
2	*Электронная библиотека ЗНБ ВГУ* *https://lib.vsu.ru/*
3	Электронно-библиотечная система "Лань" https://e.lanbook.com/

4	*Блог о применении языка программирования Python в естественно-научных дисциплинах* https://scipython.com/
5	*Документация к библиотеке numpy языка программирования Python* https://numpy.org/
6	*Документация к библиотеке matplotlib языка программирования Python* https://matplotlib.org/

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Дополнительные главы функционального анализа: фреймы и системы Рисса : учебное пособие / С. Н. Ушаков, Т. Ю. Сапронова, И. Я. Новиков, Е. А. Киселев ; Воронежский государственный университет. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. 99 с. : ил., табл. ; 20 см. ISBN 978-5-9273-3456-8.
2	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации учебной дисциплины проводятся различные типы лекций: вводная лекция, лекция-информация, лекция-диалог, лекция с применение современных компьютерных технологий (лекция-презентация), а также практических занятий, на которых осуществляется решение задач и устные опросы по темам занятия.

В части освоения материала лекционных и практических занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронные курсы: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=24233 на портале «Электронный университет ВГУ».

Самостоятельная работа регламентируется Положением об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных используются аудитории, оснащенные специализированной мебелью, для проведения практических занятий – компьютерные аудитории с установленным приложением Anaconda.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-5	ПК-1	ПК-1.2, ПК-1.3	Комплект практикоориентированных и домашних заданий из п.20.1
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт				Перечень вопросов к зачёту из п.20.2, КИМы для зачёта

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: практикоориентированные задания, домашние задания.

Описание технологии проведения

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проверкой практикоориентированных заданий и домашнего задания.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками: в первом семестре «зачтено» и «не зачтено».

В ходе зачёта обучающемуся выдаются КИМы с теоретическими вопросами и задачами. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться никакими справочными материалами, а также электронными носителями и средствами связи, ограничение по времени 90 минут.

Комплект практикоориентированных и домашних заданий

1. 1.1 Даны координаты двух противоположных вершин прямоугольника: $(x1, y1)$,$(x2, y2)$. Стороны прямоугольника параллельны осям координат. Найти периметр и площадь данного прямоугольника. 1.2. Даны два целых числа A и B ($A < B$). Найти сумму квадратов всех целых чисел от A до B включительно. 1.3. Начальный вклад в банке равен 1000 руб. Через каждый месяц размер вклада увеличивается на P процентов от имеющейся суммы (P — вещественное число, $0 < P < 25$). По данному P определить, через сколько месяцев размер вклада превысит 1100 руб., и вывести найденное количество месяцев K (целое число) и итоговый размер вклада S (вещественное число).
2. Постройте с помощью Python графики функции, подпишите оси и функции.
$$y = x^2 + \frac{1}{x} \text{ (трезубец Ньютона)}$$
$$x = 5\cos^2 t\,, y = 3\sin^2 t$$
3. Сгенерировать набор точек с погрешностями, лежащими на эллипсе. Эллипс определяется малой и большой полуосями, координатами центра и углом поворота. На графике изобразить исходный эллипс и набор полученных точек. По набору точек с погрешностями найти: малую, большую полуоси, координаты центра, угол поворота. На том же графике вывести полученный методом наименьших квадратов эллипс. Взять f=1.
4. Заданную функцию разложите по сдвигам

базисного сплайна на отрезке [a, b] по N равноотстоящим значениям функции с шагом 0,01. Напишите отчет, содержащий описание алгоритма, код программы и сами графики.

Функция	N	Базисный сплайн	[a, b]	σ
$e^{-x^2}\sin x$	13	$B_{10}(x)$	[-6, 6]	0,4

5. Заданную функцию разложите по сдвигам функции Гаусса с указанным σ на отрезке $[a, b]$ по N равноотстоящим значениям функции. Для случая а) и б) напишите отдельные программы, строящие графики получившегося разложения и исходной функции с шагом 0,01. Напишите отчет, содержащий описание алгоритма, код программы и сами графики.

Функция	N	[a, b]	σ
$1 + 2\sin \pi x$	21	$[-5; 5]$	0,6

Требования к выполнению заданий

Задания сдаются в виде отчёта с титульным листом, программным кодом, графиками (если это требуется) и пояснениями алгоритма решения.

Для оценивания результатов обучения используются следующие показатели:

1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;

2) умение связывать теорию с практикой;

3) умение применять полученные знания в практическом задании

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: КИМы для зачёта

Перечень вопросов к зачету (семестр 1):

1. Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия.
2. Ортогональная регрессия.
3. Случай несовместных систем полного ранга.
4. Полиномиальная регрессия. Матрица Грама и её свойства.
5. Некорректное применение МНК.
6. Определение фрейма в пространстве C^n. Границы фрейма. Жесткий фрейм. Равенство Парсеваля. Замкнутость и полнота. Теорема о необходимых и достаточных условиях для фрейма.
7. Теорема о границах жёсткого фрейма. Фрейм Парсеваля. Примеры.
8. Определение системы Рисса в пространстве C^n. Константы Рисса. Теорема о необходимых и достаточных условиях для системы Рисса. Теорема о ортонормированной системе Рисса.

9. Связь метода наименьших квадратов и фреймов. Операторы анализа и синтеза. Фреймовый оператор. Двойственный фрейм.
10. Сингулярное разложение матрицы. Примеры.
11. Квазиинтерполяция. Узловая функция
12. Базисные центрированные сплайны и их свойства.
13. Фундаментальный сплайн.
14. Третья тета-функция Якоби. Узловая функция, построенная из целочисленных сдвигов функции Гаусса.
15. Фреймы и системы Рисса в пространстве $L^2(R)$. Определение и примеры.
16. Фреймы Габора. Теорема о двойственном фрейме к фрейму Габора. Определение и примеры.

Пример КИМ (зачёт)

1. Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия.

2. Запишите формулу для производной базисного центрированного сплайна $B_2(x)$ Обоснуйте её получение.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования. Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Функциональный анализ» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце первого семестра.

В ходе проведения зачёта обучающемуся выдается КИМ с одним теоретическим вопросом и одной практической задачнй и предлагается написать ответы на вопросы и решить задачу. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться никакими справочными материалами, а также электронными носителями и средствами связи. Ограничение по времени - 90 минут. Студенты, получившие оценки «зачтено» по результатам практикоориентированных работ, получают оценку «зачтено» по дисциплине «функциональный анализ» автоматически.

Шкалы и критерии оценивания

Критерии оценивания	Шкала оценок
Зачёт	
Обучающийся знает основные определения, теоремы. Умеет применять их к практическим заданиям	*Зачтено*
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе	*Не зачтено*

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

<u>1) закрытые задания (тестовые):</u>

1. Верно ли, что фрейм в конечномерном пространстве состоять из бесконечного числа элементов?
   Ответ: верно.

Решение.
Счетная последовательность элементов $\{f_k\}_{k\in I}$ в V является фреймом для V, если существуют такие константы $A, B > 0$, что

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k\in I} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \qquad \forall f \in V$$

Следующий конечный набор векторов составляет фрейм в двумерном пространстве

$$f_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, f_4 = \frac{1}{2} f_3, \dots, f_k = \frac{1}{2} f_{k-1}$$

Для произвольного $x = \binom{a}{b}$ коэффициенты разложения равны

$$c_1 = -\frac{a}{2}, c_2 = \frac{3}{4}a - \frac{b}{2}, c_3 = \frac{3}{8}(a + 2b), c_4 = \frac{1}{2}c_3, \dots, c_k = \frac{1}{2}c_{k-1}$$

Вычислим сумму квадратов:

$$|x|^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16} - \frac{3}{4}ab + \frac{b^2}{4} + (a^2 + 4ab + 4b^2)\frac{9}{64}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16} - \frac{3}{4}ab + \frac{b^2}{4} + (a^2 + 4ab + 4b^2) = a^2 + b^2$$

2. Верно ли, что система векторов $e_1 = (0,1)$, $e_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ образует в R^2 жёсткий фрейм?
   Ответ: верно.
   Решение.
   Счетная последовательность элементов $\{f_k\}_{k\in I}$ в V является фреймом для V, если существуют такие константы $A, B > 0$, что

   $$A\|f\|^2 \leq \sum_{k\in I} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \qquad \forall f \in V$$

   Для любого $v = (v_1, v_2)$ из R^2 имеем $\sum_{j=1}^{3} \left|\langle v, e_j\rangle\right|^2 = |v_2|^2 + \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right|^2 = \frac{3}{2}[|v_1|^2 + |v_2|^2] = \frac{3}{2}\|v\|^2$
   Следовательно, $\{e_1, e_2, e_3\}$ – жёсткий фрейм.
3. Верно ли, что система векторов $f_1 = (1; 0), f_2 = (0; 1), f_3 = (-1; 0)$, $f_4 = (0; 1)$ образует жёсткий фрейм?
   Ответ: верно.
   Решение. Вычислим матрицу фреймового оператора S, умножив матрицу, столбцы которой составлены из векторов $f_1 = (1; 0), f_2 = (0; 1), f_3 = (-1; 0)$, $f_4 = (0; 1)$ на транспонированную:

   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Нижняя граница фрейма совпадает с наименьшим собственным числом матрицы S, а верхняя с наибольшим. В диагональной матрице собственные числа равны элементам на диагонали. Следовательно, наименьшее собственное число – 2, наибольшее – 2. Верхняя и нижняя границы совпадают, значит, система векторов образует жёсткий фрейм.

4. Верно ли, что система векторов $f_1 = (1;1), f_2 = (1;2), f_3 = (2;1)$ образует жёсткий фрейм?
   Ответ: неверно.
   Вычислим матрицу фреймового оператора S, умножив матрицу, столбцы которой составлены из векторов $f_1 = (1;1), f_2 = (1;2), f_3 = (2;1)$ на транспонированную:

   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   Нижняя граница фрейма совпадает с наименьшим собственным числом матрицы S, а верхняя с наибольшим.
   Найдём собственные числа матрицы S :
   $$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 5^2 = (1-\lambda)(11-\lambda) = 0.$$

   Следовательно, наименьшее собственное число – 1, наибольшее – 11. Верхняя и нижняя границы не совпадают, значит, система векторов не образует жёсткий фрейм.
   .
5. Верно ли, что верхняя и нижняя границы любого жёсткого фрейма равны 1?
   Ответ: неверно.
   Решение. система векторов $e_1 = (0{,}1)$, $e_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ образует в R^2 жёсткий фрейм.
   Для любого $v = (v_1, v_2)$ из R^2 имеем $\sum_{j=1}^{3} \left|\langle v, e_j \rangle\right|^2 = |v_2|^2 + \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2\right|^2 = \frac{3}{2}[|v_1|^2 + |v_2|^2] = \frac{3}{2}\|v\|^2$. Следовательно, верхняя и нижняя границы совпадают и не равны 1.

<u>2) открытые задания:</u>

1. Нижняя граница фрейма для системы векторов $f_1 = (1;1), f_2 = (1;2), f_3 = (2;1)$ равна
   Ответ:1
   Решение. Вычислим матрицу фреймового оператора S, умножив матрицу, столбцы которой составлены из векторов $f_1 = (1;1), f_2 = (1;2), f_3 = (2;1)$ на транспонированную:

   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   Нижняя граница фрейма совпадает с наименьшим собственным числом матрицы S, а верхняя с наибольшим.
   Найдём собственные числа матрицы S :
   $$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 5^2 = (1-\lambda)(11-\lambda) = 0.$$

   Следовательно, наименьшее собственное число – 1, наибольшее – 11.
2. Верхняя граница фрейма для системы векторов $f_1 = (1;1), f_2 = (1;2), f_3 = (2;1)$ равна
   Ответ:11

Решение. Вычислим матрицу фреймового оператора S, умножив матрицу, столбцы которой составлены из векторов $f_1 = (1;1), f_2 = (1;2), f_3 = (2;1)$ на транспонированную:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Нижняя граница фрейма совпадает с наименьшим собственным числом матрицы S, а верхняя с наибольшим.

Найдём собственные числа матрицы S :

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 5^2 = (1-\lambda)(11-\lambda) = 0.$$

Следовательно, наименьшее собственное число – 1, наибольшее – 11.

3. Отношение верхней границы фрейма к нижней для системы векторов $f_1 = (1;1), f_2 = (1;2), f_3 = (2;1)$ равно

   Ответ:11

   Решение. Вычислим матрицу фреймового оператора S, умножив матрицу, столбцы которой составлены из векторов $f_1 = (1;1), f_2 = (1;2), f_3 = (2;1)$ на транспонированную:

   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   Нижняя граница фрейма совпадает с наименьшим собственным числом матрицы S, а верхняя с наибольшим.

   Найдём собственные числа матрицы S :

   $$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 5^2 = (1-\lambda)(11-\lambda) = 0.$$

   Следовательно, наименьшее собственное число – 1, наибольшее – 11, а отношение равно 11.

4. Нижняя граница фрейма для системы векторов $f_1 = (1;0), f_2 = (0;1), f_3 = (-1;0)$, $f_4 = (0;1)$ равна

   Ответ: 2.

   Решение. Вычислим матрицу фреймового оператора S, умножив матрицу, столбцы которой составлены из векторов $f_1 = (1;0), f_2 = (0;1), f_3 = (-1;0)$, $f_4 = (0;1)$ на транспонированную:

   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Нижняя граница фрейма совпадает с наименьшим собственным числом матрицы S, а верхняя с наибольшим. В диагональной матрице собственные числа равны элементам на диагонали. Следовательно, наименьшее собственное число – 2, наибольшее – 2.

5. Отношение верхней границы фрейма к нижней для системы векторов $f_1 = (1;0), f_2 = (0;1), f_3 = (-1;0)$, $f_4 = (0;1)$ равно

   Ответ: 1

   Решение. Вычислим матрицу фреймового оператора S, умножив матрицу, столбцы которой составлены из векторов $f_1 = (1;0), f_2 = (0;1), f_3 = (-1;0)$, $f_4 = (0;1)$ на транспонированную:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Нижняя граница фрейма совпадает с наименьшим собственным числом матрицы S, а верхняя с наибольшим. В диагональной матрице собственные числа равны элементам на диагонали. Следовательно, наименьшее собственное число – 2, наибольшее – 2, а отношение равно 1.

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).