

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии



Семенов Е.М.

11.04.2024 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.В.ДВ.01.02 Теория экстремальных задач

**1. Код и наименование специальности:**

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

**2. Специализация:** Современные методы теории функций в математике и механике

**3. Квалификация (степень) выпускника:** Математик. Механик. Преподаватель

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

0503 теории функций и геометрии

**6. Составители программы:** Стенюхин Леонид Витальевич, к. ф.-м. н., доцент

**7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета,  
протокол № 0500-03 от 28.03.2024 г.

**8. Учебный год:** 2027 - 2028

**Семестр:** 7

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

ознакомление студентов с основами современной теории экстремальных задач и их практическая подготовка к дальнейшему использованию методов этой теории при решении прикладных задач и самостоятельной работе в области оптимизации и оптимального управления.

*Задачи дисциплины:*

- ознакомление студентов с задачами, принципами и методами теории экстремальных задач;
- приобретение теоретических знаний, практических умений и навыков в области исследования задач на экстремум;
- оказание консультаций и помощи в проведении собственных теоретических и практических исследований различных задач оптимизации.
- совершенствование и расширение общенаучной базы.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина Теория экстремальных задач относится к части формируемой участниками образовательных отношений Блока 1, является дисциплиной «по выбору».

Данная дисциплина базируется на материалах курсов: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ».

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

| Код  | Название компетенции   | Код(ы) | Индикатор(ы)   | Планируемые результаты обучения  |
|------|--|--------|--|--|
| ПК-1 | Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики | ПК-1.3 | Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике | Знать:<br>- базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.<br>Уметь:<br>- собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области теории функций.<br>Владеть навыками:<br>- практического проведения научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике. |
| ПК-2 | Способен проводить исследования по обработке и анализу научной информации и результатов исследований методами теории             | ПК-2.1 | Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций                 | Знать:<br>- современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций.  |
|      |  | ПК-2.2 | Умеет разрабатывать математические модели в области  | Уметь:<br>- разрабатывать математические модели в области естествознания,  |

|      |  |        |  |  |
|------|--|--------|--|--|
|      | функций.   |        | естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования | экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования.<br>Владеть навыками:<br>- проведения научно-исследовательской деятельности в области решения задач аналитического характера.   |
| ПК-3 | Способен к построению моделей и оптимальному решению теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии | ПК-3.1 | Знает современные методы разработки и реализации математических моделей  | Знать:<br>- современные методы разработки и реализации математических моделей.<br>Уметь:<br>- строить модели и оптимальные решения теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии.<br>Владеть навыками:<br>- построения моделей прикладных процессов;<br>- навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач. |
|      |  | ПК-3.2 | Владеет навыками построения моделей прикладных процессов и навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач   |  |

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 3/108.**

**Форма промежуточной аттестации: зачёт.**

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

| Вид учебной работы                             | Трудоемкость |              |            |     |
|--|--------------|--------------|------------|-----|
|  | Всего        | По семестрам |            |     |
|  |              | № семестра 7 | № семестра | ... |
| Аудиторные занятия                             | 68           | 68           |            |     |
| в том числе:                                   | лекции       | 34           | 34         |     |
|  | практические | 34           | 34         |     |
|  | лабораторные |              |            |     |
| Самостоятельная работа                         | 40           | 40           |            |     |
| Форма промежуточной аттестации<br><i>зачет</i> |              |              |            |     |
| Итого:   | 108          | 108          |            |     |

#### 13.1. Содержание дисциплины

| п/п              | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины   |  |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|
| <b>1. Лекции</b> |                                 |                                 |  |
| 1.1              | Условия экстремума              | 1) Каноническая задача Лагранжа |  |

|                                |   |  |  |
|--------------------------------|---|--|--|
|                                | в задачах вариационного исчисления                            | <p>классического вариационного исчисления в понтрягинской форме. Пространства фазовых и управляющих переменных. Слабый и сильный минимум. Производная оператора равенств задачи Лагранжа и замкнутость ее образа.</p> <p>2) Применение общего правила множителей Лагранжа к задаче Лагранжа КВИ. Обобщенная лемма Дюбуа—Раймона. Уравнение Эйлера—Лагранжа: сопряженное уравнение, условия трансверсальности, условие стационарности по управлению.</p> <p>3) Задачи, сводящиеся к канонической задаче Лагранжа: задача с интегральным функционалом, с изопериметрическими ограничениями, со старшими производными, задачи на нефиксированном отрезке времени.</p> <p>4) Простейшая задача КВИ с закрепленными концами. Уравнение Эйлера и его первые интегралы (законы сохранения). Лагранжиан и уравнение Эйлера для системы материальных точек в потенциальном поле. Второй закон Ньютона и закон сохранения энергии.</p> |  |
| 1.2                            | Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина | <p>Каноническая понтрягинская задача оптимального управления. Формулировка принципа максимума Понтрягина. Функция Понтрягина. Доказательство ПМ для случая свободного правого конца. Игольчатые вариации управления.</p>   |  |
| 1.3                            | Существование решения в задачах на экстремум                  | <p>Общая идея решения задач оптимального управления с помощью принципа максимума. Краевая задача принципа максимума. Особые и неособые режимы. Проблема синтеза оптимального управления – построения управления как функции от фазовых переменных (обратная связь).</p>  |  |
| <b>2. Практические занятия</b> |   |  |  |
| 2.1                            | Условия экстремума в задачах вариационного исчисления         | <p>1) Каноническая задача Лагранжа классического вариационного исчисления в понтрягинской форме. Пространства фазовых и управляющих переменных. Слабый и сильный минимум. Производная оператора</p>  |  |

|     |   |   |  |
|-----|---|---|--|
|     |   | <p>равенств задачи Лагранжа и замкнутость ее образа.</p> <p>2) Применение общего правила множителей Лагранжа к задаче Лагранжа КВИ. Обобщенная лемма Дюбуа—Раймона. Уравнение Эйлера—Лагранжа: сопряженное уравнение, условия трансверсальности, условие стационарности по управлению.</p> <p>3) Задачи, сводящиеся к канонической задаче Лагранжа: задача с интегральным функционалом, с изопериметрическими ограничениями, со старшими производными, задачи на нефиксированном отрезке времени.</p> <p>4) Простейшая задача КВИ с закрепленными концами. Уравнение Эйлера и его первые интегралы (законы сохранения). Лагранжиан и уравнение Эйлера для системы материальных точек в потенциальном поле. Второй закон Ньютона и закон сохранения энергии.</p> |  |
| 2.2 | Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина | <p>Каноническая понтрягинская задача оптимального управления. Формулировка принципа максимума Понтрягина. Функция Понтрягина. Доказательство ПМ для случая свободного правого конца. Игольчатые вариации управления.</p>  |  |
| 2.3 | Существование решения в задачах на экстремум                  | <p>Общая идея решения задач оптимального управления с помощью принципа максимума. Краевая задача принципа максимума. Особые и неособые режимы. Проблема синтеза оптимального управления – построения управления как функции от фазовых переменных (обратная связь).</p>   |  |

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование темы (раздела) дисциплины                        | Виды занятий (часов) |              |              |                        |       |
|-------|---|----------------------|--------------|--------------|------------------------|-------|
|       |   | Лекции               | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа | Всего |
| 1.    | Условия экстремума в задачах вариационного исчисления         | 10                   | 10           |              | 15                     | 35    |
| 2.    | Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина | 10                   | 10           |              | 10                     | 30    |
| 3.    | Существование решения в задачах на экстремум                  | 14                   | 14           |              | 15                     | 43    |
|       | Итого:  | 34                   | 34           |              | 40                     | 108   |

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях излагаются ключевые и проблемные вопросы дисциплины. Проведение практических занятий направлено на закрепление теоретических знаний, умение применять их при решении практических задач. Для успешного и качественного освоения дисциплины необходима планомерная, повседневная самостоятельная работа.

При изучении курса «Теория экстремальных задач» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Обращать внимание на определения, формулировки, научные выводы и практические рекомендации. Для понимания и качественного усвоения учебного материала рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции рекомендуется подробно разобрать теоретический материал, выучить все определения и формулировки, разобрать примеры, рассмотренные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей.

2. Важной составной частью освоения дисциплины являются практические занятия, которые требуют помимо знаний теоретического материала еще и навыков решения практических задач, что помогает глубже усвоить учебный материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

При подготовке к практическим занятиям следует повторить основные понятия по темам, рассмотреть примеры. Решая задачи, предварительно понять какой теоретический материал нужно использовать. Намечить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к ответам на все теоретические вопросы рассматриваемой темы. На последнем практическом занятии проводится итоговая контрольная работа по результатам, которой выставляется зачет.

При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и регулярную самостоятельную учебную деятельность в течении семестра: изучение, рекомендуемой литературы, самостоятельное освоение понятийного аппарата, подготовку к практическим занятиям, выполнение индивидуальных заданий, подготовку к зачету и экзамену.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Для успешной самостоятельной работы необходим тесный контакт с преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

| № п/п | Источник  |
|-------|---|
| 1.    | <i>Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969.</i> |
| 2.    | <i>В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фолин. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, Физматлит, 2006.</i>                           |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник  |
|-------|---|
| 3.    | <i>И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.</i>         |
| 4.    | <i>А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974.</i>         |
| 5.    | <i>В.М. Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах. М., Наука, 1986, МЦНМО, 2006.</i> |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

| № п/п | Ресурс   |
|-------|--|
| 6.    | <a href="http://lprbookshop.ru">lprbookshop.ru</a> |
| 7.    | <a href="http://e.lanbook.com">e.lanbook.com</a>   |
| 8.    | <a href="http://book.ru">book.ru</a>               |

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

| № п/п | Источник  |
|-------|---|
| 1.    | «Оптимальное управление». Коллективная монография кафедры ОПУ мехмата МГУ (ред. В.М. Тихомиров, Н.П. Осмоловский), М., МЦНМО, 2008.   |
| 2.    | А.В. Дмитрук. Об условиях оптимальности в задачах на экстремум с ограничениями – доклад на Математическом кружке МФТИ (май 2013): <a href="http://www.mathnet.ru/php/seminars.shtml?option_lang=rus&amp;presentid=6752">http://www.mathnet.ru/php/seminars.shtml?option_lang=rus&amp;presentid=6752</a> |

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение): (

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

Изложение учебного материала основано на принципе системности, преемственности и последовательности и направлено на развитие интеллектуальных умений, профессиональных компетенций, формирование творческой личности высококвалифицированного специалиста, способного к саморазвитию и самообразованию. Важнейшая цель преподавателя – систематизация большого объема теоретического материала и обучение студента умению ориентироваться в этом материале.

Рекомендуется использование, как традиционных форм организации лекционного материала, так и внедрение таких интерактивных технологий, как проблемная лекция, когда знания вводятся как «неизвестное», которое необходимо «открыть».

При реализации учебной дисциплины используются информационные электронно-образовательные ресурсы [www.liv.vsu.ru](http://www.liv.vsu.ru) и <https://e.lanbook.com>.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации используется учебная аудитория: специализированная мебель.

Для самостоятельной работы обучающихся – компьютерный класс, оснащенный оргтехникой, необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями, законодательно-правовой нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop> ); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/> ); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия:

<https://ru.libreoffice.org/about-us/license/> ); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.lazarus-ide.org/index.php> ); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.freepascal.org/faq.html> ); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://docs.python.org/3/license.html> ); 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.gimp.org/about/> ); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://inkscape.org/about/license/> ); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://miktex.org/copying> ); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://texstudio.org/> ); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://maxima.sourceforge.net/faq.html> ); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://www.denwer.ru/faq/other.html> ); 1C: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions\\_licence.htm](https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm) ); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://www.foxitsoftware.com/pdfreader/eula.html> ); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf> ); WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://windjview.sourceforge.io/ru/> ); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.7-zip.org/license.txt> ); Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.mozilla.org/en-US/MPL/> ); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.vmware.com/download/open\\_source.html](https://www.vmware.com/download/open_source.html) ); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing\\_FAQ](https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ) ); Astra Linux Common Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/> ); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.postgresql.org/about/licence/> ); GeoGebra (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.geogebra.org/license> ); R (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.r-project.org/Licenses/> ); Wing-101 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://wingware.com/license/wing101> ); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://loginom.com/platform/pricing> ); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://downloads.mysql.com/docs/licenses/>)

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля)                      | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства                            |
|-------|---|----------------|-------------------------------------|---|
| 1     | Условия экстремума в задачах вариационного исчисления         | ПК-1           | ПК-1.3                              | Индивидуальные задания.<br>Контрольная работа |
| 2     | Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина | ПК-2           | ПК-2.1<br>ПК-2.2                    | Индивидуальные задания.<br>Контрольная работа |



| № п/п  | Наименование раздела дисциплины (модуля)     | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции  | Оценочные средства                                |
|--|--|----------------|--------------------------------------|---|
| 3  | Существование решения в задачах на экстремум | ПК-3,<br>ПК-2  | ПК-3.1<br>ПК-3.2<br>ПК-2.1<br>ПК-2.2 | Практико-ориентированные задания                  |
| Промежуточная аттестация<br>форма контроля – зачёт |  |                |                                      | <i>Перечень вопросов<br/>Практическое задание</i> |

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Оценка знаний, умений, навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущего контроля в форме устного опроса и проверки выполнения решений практических заданий.

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Примерный перечень индивидуальных заданий

**Задача 1.** Постановка задачи:

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{T_0} [\dot{x}^2(t) - x(t)] dt + x^2(1) \rightarrow \inf$$

$$x(\cdot) \in C_1^1([0,1])$$

Необходимые условия экстремума в задаче - уравнение Эйлера и условия трансверсальности (подробный вывод).

**Задача 2** Исследование необходимых условий экстремума в задаче 1 и нахождение единственной допустимой экстремали:

$$x_*(t) = \frac{1}{4}(3 - t^2).$$

Доказать, что  $x_*(t)$  представляет собой слабый глобальный (абсолютный) минимум методом непосредственной проверки.

**Задача 3.** Постановка задачи:

$$I(x) = \int_0^1 [x(t) - x^2(t)] dt \rightarrow \inf$$

$$x(0) = 0, x(1) = 0 \quad (2)$$

$$x \in C^1([0,1])$$

Общая система соотношений для определения допустимой экстремали: уравнения Эйлера и граничные условия (2) исходной задачи.

Единственная допустимая экстремаль  $x_*(t) = \frac{1}{4}(t - t^2)$ .

Методом непосредственной проверки установить, что для любой допустимой функции

~~$x \in C^1([0,1])$~~ ,  $h(0)=0, h(1)=0$  выполняется соотношение

$$I(x) = \int_0^1 [x(t) - \dot{x}^2(t)] dt$$

Построение последовательности допустимых функций  $x_n(t) = nt(t-1)$ ,  $n=1,2,\dots$ , для которой  $I(x_n) \rightarrow \inf$ .

Показать, что функционал  $I(x(\cdot))$  не ограничен снизу на множестве допустимых функций, и решения задачи (1)-(2) на минимум не существует.

**Задача 4.** Постановка задачи:

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{T_0} [x(t) - \dot{x}^2(t)] dt \rightarrow \text{extr} \quad (1)$$

$$x(0) = 0 \quad (2)$$

$$x(\cdot) \in C^1([0, T_0])$$

Для решения используется методика исследования общей задачи с граничными условиями. Необходимые условия экстремума - уравнение Эйлера и условия трансверсальности. Подробный анализ условий трансверсальности: условие трансверсальности в точке  $t_0 = 0$  неинформативно.

Единственная допустимая экстремаль  $x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{T_0}{2}t$ .

Методом непосредственной проверки установить, что для любой допустимой функции  $x(t) = x_*(t) + h(t)$ ,  $h(0) = 0$  выполняется условие

$I(x) < I(x_*)$ , то есть функция  $x_*(\cdot)$  доставляет абсолютный максимум в исходной задаче (1) - (2).

**Задача 5.** Постановка задачи:

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(t) dt \rightarrow \text{inf} \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) + x(t) = u(t) \quad (2)$$

$$x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (3)$$

$$x(\cdot) \in C^1\left[\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right]$$

Приведение задачи (1)-(3) к каноническому виду задачи Лагранжа.

Преобразование задачи (1) - (3) при помощи замены:  $x = x_1$ ,  $\dot{x} = x_2$ . Задача (1) - (3) в канонической форме принимает вид

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(t) dt \rightarrow \text{inf} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0; \end{cases} \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \quad (6)$$

Провести исследование и определение единственной допустимой экстремали

$$x_*(t) = \frac{2}{\pi} t \sin t; \quad u_*(t) = \frac{4}{\pi} \cos t.$$

Непосредственно проверить, что пара функций  $(x_*(t), u_*(t))$  доставляет глобальный слабый минимум в исходной задаче.

### Задача 6

Задача об оптимальном быстродействии.

Математическая постановка задачи оптимального управления.

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = T = \int_0^T dt \rightarrow \inf \quad (1)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} = a_0 \quad (3)$$

$$x(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$u(t) \in U = \{u \in R : |u| \leq 1\} \quad (5)$$

Необходимые условия экстремума: сопряженное уравнение, условие максимума функции Понтрягина.

Провести аналитическое исследование траекторий управляемого процесса. Определение неизвестных параметров оптимального процесса в зависимости от начальных условий.

### Задача 7

Доказать оптимальности управляемого процесса  $\{x_*(t), u_*(t); T_*\}$ , удовлетворяющего условиям принципа максимума в задаче об оптимальном быстродействии. Метод доказательства: использование вспомогательной функции  $\psi(t) = -x_1(t) + x_2(t)(t - \tau)$ .

## Примерный перечень заданий для контрольных работ

**Задача 1.** Решить задачу Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 [x^2(t) + x^2(t)] dt - 2sh1 x(1) \rightarrow \inf$$

- 1) Найти допустимую экстремаль.
- 2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

**Задача 2.** Решить простейшую задачу КВИ.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 [x^2(t) + tx(t)] dt \rightarrow \inf, x(0) = 0, x(1) = 1$$

- 1) Найти допустимую экстремаль.
- 2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.
- 3) Применить теорему о достаточных условиях экстремума в простейшей задаче КВИ и на её основании ещё раз доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

**Задача 3\*.** Исследовать задачу Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \rightarrow \inf$$

- 1) Найти допустимую экстремаль.
- 2) Доказать, что данная экстремаль не является решением, т.е. не доставляет локального экстремума в исходной задаче.

3) Доказать, что решения исходной задачи не существует, и целевой функционал  $I(x(\cdot))$  не является ограниченным снизу.

### Вариант №2

**Задача 1.** Решить задачу Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{\pi} [x^2(t) + x^2(t) - 4 \sin t x(t)] dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \rightarrow \inf$$

- 1) Найти допустимую экстремаль.
- 2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

**Задача 2.** Решить простейшую задачу КВИ.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 [t^2 x(t) - x^2(t)] dt \rightarrow \sup, x(0) = 0, x(1) = 0$$

- 1) Найти допустимую экстремаль.
- 2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.
- 3) Применить теорему о достаточных условиях экстремума в простейшей задаче КВИ и на её основании ещё раз доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

**Задача 3\*.** Исследовать задачу Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x^2(t) - x^2(t)] dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \inf$$

- 1) Найти допустимую экстремаль.
- 2) Доказать, что данная экстремаль не является решением, т.е. не доставляет локального экстремума в исходной задаче.
- 3) Доказать, что решения исходной задачи не существует, и целевой функционал  $I(x(\cdot))$  не является ограниченным снизу.

Описание технологии проведения

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проверкой выполнения индивидуальных заданий и контрольных работ.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено». Систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний обучающихся.

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении текущего контроля успеваемости используются следующие

**показатели:**

- 1) знание основных понятий и определений;
- 2) умение использовать стандартные методы для решения типовых задач;
- 3) оптимальность хода решения;
- 4) логика изложения, рассуждений;

5) самостоятельность выводов.

### **Критерии оценки компетенций (результатов обучения) при текущей аттестации:**

**Зачтено:** выполнение индивидуальных заданий соответствуют перечисленным показателям, обучающийся демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками. Каждое полностью выполненное задание Контрольной работы оценивается двумя баллами. Контрольная работа считается выполненной, если оценена не менее, чем четырьмя баллами, что соответствует оценке «зачтено». Не менее одна контрольная работа должна быть выполнена и зачтена.

**Незачтено:** выполнение индивидуальных заданий не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обе контрольные работы «не зачтены». Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

## **20.2 Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования. Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины и проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### **Примерный перечень вопросов к зачету:**

1. Основные типы оптимизационных задач и основные теоремы об условиях экстремума;
2. Постановка общей задачи на экстремум с гладкими ограничениями равенства и неравенства и правило множителей Лагранжа в ней;
3. Метод вариаций для вывода условий экстремума;
4. Конус критических вариаций в гладкой задаче и его роль в условиях экстремума;
5. Необходимые и достаточные условия «второго» порядка для локального минимума в гладкой задаче;
6. Задача Лагранжа классического вариационного исчисления и условия экстремума в ней, понятие сильного и слабого минимума, экстремали;
7. Уравнение Эйлера и его первые интегралы (законы сохранения) для задач классического вариационного исчисления;
8. Условия Лежандра и Якоби для знакоопределенности второй вариации в задаче Лагранжа, понятие и роль сопряженной точки;
9. Задача оптимального управления понтрягинского типа и формулировка принципа максимума Понтрягина;
10. Понятие фазовой, управляющей и сопряженной переменной, условий трансверсальности и условия максимума функции Понтрягина;
11. Понятия особых и неособых режимов, краевой задачи принципа максимума, синтеза оптимального управления, игольчатых вариаций управления;
12. Принцип максимума для задач оптимального управления со смешанными ограничениями;
13. Понятие о методе динамического программирования и его связи с принципом максимума;
14. Общая теорема Вейерштрасса о существовании решения в задачах на экстремум;
15. Теорема существования в задаче оптимального управления, выпуклой по управлению;
16. классические примеры задач вариационного исчисления и оптимального управления и их решения.

### **Описание технологии проведения**

Промежуточная аттестация по дисциплине преследует цель оценить работу обучающихся за курс, полученные обучающимися знания, умения и уровень

приобретенных компетенций, их прочность, развитие творческого мышления, приобретение навыков самостоятельной работы, умение синтезировать полученные знания и применять их при решении практических задач.

Зачет проводится на последнем практическом занятии. Итоговая оценка выставляется по результатам работы студента в течении семестра. Итоговая оценка «зачтено» выставляется при условии выполнения студентом всех индивидуальных заданий и двух контрольных работ. При условии наличия не зачтенных или не выполненных заданий текущей аттестации зачет проводится в форме собеседования по вопросам к зачету и проверки решения задач из перечня заданий для контрольных работ.

При проведении промежуточной аттестации в форме зачета используются следующие **показатели**:

- 1) знание основных понятий и определений;
- 2) умение использовать стандартные методы для решения типовых задач;
- 3) оптимальность хода решения;
- 4) логика изложения, рассуждений.

**Шкала оценивания:**

Зачтено: ответ обучающегося соответствует показателям, но при этом могут быть допущены не существенные ошибки в ответе на вопросы и (или) решении задачи.

Незачтено: ответ обучающегося не соответствует перечисленным показателям, обучающийся демонстрирует фрагментарные знания.

| Критерии оценивания  | Уровень сформированности компетенций | Шкала оценок |
|--|--------------------------------------|--------------|
| Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной предметной области, умеет использовать стандартные методы для решения типовых задач, демонстрирует четкую логику изложения, рассуждений. Во время и срок выполняет все задания.                      | Повышенный уровень                   | Зачтено      |
| Ответ обучающегося не соответствует одному (двум) из перечисленных показателей, но студент дает правильные ответы на дополнительные вопросы, умеет использовать стандартные методы для решения типовых задач, при этом могут присутствовать несущественные ошибки. | Базовый уровень                      | Зачтено      |
| Ответ обучающегося не соответствует любым двум (трем) из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичные знания, или имеет не полное, допускает существенные ошибки в решении задач                 | Пороговый уровень                    | Зачтено      |
| Ответ обучающегося не соответствует перечисленным показателям. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки, не умеет решать задачи.  | –                                    | Незачтено    |

## 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Задания открытого типа (короткий ответ):

1. Выписать решение задачи Больца.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + x^2(t)] dt - 2sh1 x(1) \rightarrow inf$$

2. Решить простейшую задачу КВИ.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 [t^2 x(t) - x^2(t)] dt \rightarrow sup, x(0) = 0, x(1) = 0$$

3. Постановка задачи:

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{T_0} [\dot{x}^2(t) - x(t)] dt + x^2(1) \rightarrow inf$$

$$x(\cdot) \in C_1^1([0,1])$$

Является ли экстремаль единственной :  $x(t) = \frac{1}{4}(3-t^2)$ ?

4. Привести основные типы оптимизационных задач

5. Уравнение Эйлера и его первые интегралы (законы сохранения) для задач классического вариационного исчисления

Шкалы и критерии оценивания

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.