

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии



Е.М. Семенов  
30.06.2020 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.11 Теория графов

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

**2. Профиль подготовки/специализация:** Современные методы теории функций в математике и механике

**3. Квалификация (степень) выпускника:** Специалист. Математик. Механик. Преподаватель

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

0503 теории функций и геометрии

**6. Составители программы:** Семенов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор

**7. Рекомендована:** НМС математического факультета ВГУ, протокол №0500-04 от  
**18.06.2020**

---

(отметки о продлении вносятся вручную)

---

**8. Учебный год:** 2024/2024 уч.год

**Семестр(ы):** 9

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

### Цели:

- - ознакомление студентов с основными теоремами, проблемами и методами теории графов.
- - дать качественные математические и естественно-научные знания, востребованные обществом.

### Задачи:

- формирование у студентов системы представлений о начальных понятиях и фактах теории графов;
- формирование способности действовать алгоритмически при решении некоторых основных оптимизационных задач;
- формирование способности применять методы теории графов при решении нестандартных задач, задач занимательных и олимпиадного характера
- воспитание самостоятельности и настойчивости студентов в достижении поставленной цели.

Изучение основных понятий теории графов, выявление связи с другими дисциплинами, применение теории графов к задачам анализа и алгебры. Формирование знаний элементов теории графов.

В результате изучения дисциплины студенты должны

#### (а) Знать

- основные определения теоремы теории графов для решения комбинаторных задач; для приложений к теории матриц;
- основные понятия теории графов;
- ориентированные и неориентированные графы;
- степени; изоморфизм;
- эйлеровы графы; деревья;
- планарные графы;
- функции Гранди;
- ядро графа;
- игры на графе;
- паросочетания;
- рассмотрение конкретных примеров.

#### (б) Уметь:

- самостоятельно составлять машинные алгоритмы и программы решения комбинаторных задач вычислительной геометрии на основе известных методов и алгоритмов;
- модифицировать известные алгоритмы, реализовывать структуры данных;
- оценивать сложность комбинаторных алгоритмов на основе теоретических (нижних) оценок.
- применять полученные знания на практике.

#### (в) Иметь представление о применениях теории графов в задачах техники.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:** Курс «Теория графов» относится к Блок 1. Часть, формируемая участниками образовательных отношений.

Опирается на курсы: «Математический анализ», «Линейная алгебра» «Теория вероятностей» и помогает студентам решать конкретные задачи, возникающие в различных разделах.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1.3	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике	<b>Знать:</b> основные свойства выпуклых множеств <b>Уметь:</b> применять свойства выпуклых множеств для решения геометрических задач <b>Владеть:</b> аппаратом теории выпуклых множеств и применять его для задач комбинаторного характера
ПК-2.1	Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	<b>Знать:</b> - начальные понятия теории графов; - алгоритмы обходов на графах: построение эйлера цикла, кратчайшего пути в графе, решение задачи коммивояжера и др.; <b>Уметь:</b> - логично и последовательно демонстрировать освоенное знание; - приводить примеры и контрпримеры в процессе изложения теоретического материала; - применять простейшие алгоритмы для решения конкретных задач; <b>Владеть:</b> - терминологией предметной области «Теории графов»; - различными алгоритмами «Теории графов»; для выбранной темы и ее популяризации.
ПК-2.2	Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	<b>Знать:</b> определения и свойства геометрических фигур; <b>Уметь:</b> - работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), - точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить логические обоснования математических утверждений и построений. <b>Владеть:</b> навыками представления информации; навыками интерпретации информации в различных формах ее представления;
ПК-3.1	Знает современные методы разработки и	<b>Знать:</b> - возможности дисциплины для организации учебно-

	реализации математических моделей	исследовательской и проектной деятельности учащихся. <b>Уметь:</b> - формулировать задания по дисциплине для организации исследовательской и проектной деятельности учащихся; <b>Владеть:</b> - навыками отбора геометрического материала.
ПК-3.2	Владеет навыками построения моделей прикладных процессов и навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач	<b>Знать:</b> - паросочетания; <b>Уметь:</b> - применять полученные знания на практике. <b>Владеть:</b> - иметь представление о применениях теории графов в задачах техники.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.**(в соответствии с учебным планом) — 3/108.

**Форма промежуточной аттестации** (зачет/экзамен) экзамен

### 13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)			
	Всего	По семестрам		
		9 сем.		
Аудиторные занятия	40	40		
в том числе: лекции	24	24		
Практические				
Лабораторные	16	16		
Самостоятельная работа	32	32		
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час. / экзамен – 36 часов..)	36	36		
Итого:	<b>108</b>	<b>108</b>		

#### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Неориентированные графы. Изоморфизм, степени, самодополнительные графы.	Дается определение графа, изоморфных графов и приводятся их простейшие свойства.
2	Эйлеровы графы, деревья, хроматическое число.	Доказывается теорема об эйлеровых графах, дается определение и свойства хроматического числа графа.
3	Цикломатическое число.	Дается определение и доказывается Теорема о

		цикломатическом числе графа.
4	Планарные графы, формула Эйлера.	Доказывается формула Эйлера и приводятся следствия из нее.
5	Плоские графы.	Приводятся примеры неплоских графов.
6	Неплоские графы, теорема Понтрягина-Каратовского, хроматическое число плоского графа.	Доказывается теорема о хроматическом числе плоского графа.
7	Ориентированные графы, порядковая функция.	Дается определение ориентированного графа и порядковой функции.
8	Функция Гранди.	Приводятся свойства функции Гранди и примеры нахождение функций Гранди.
9	Внутренние и внешние устойчивые множества, ядро графа.	Приводятся определения внутренне и внешне устойчивого множества и ядра графа.
10	Игры на графе.	Доказывается теорема об игре на графе, анализируется игра НИМ.
11	Теорема Кенига-Холла.	Доказывается теорема Кенига-Холла.
12	Приложения к матрицам.	Дается применение теоремы Кенига-Холла к матрицам.
13	Теорема Биркгофа-фон Неймана	Доказывается теорема Биркгофа-фон Неймана.
14	Выпуклые множества и крайние точки. Теорема Биркгофа-фон Неймана.	Доказывается теорема о бистохастических матрицах.

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Неориентированные графы. Изоморфизм, степени, самодополнительные графы.	2		1	2	
2	Эйлеровы графы, деревья, хроматическое число.	2		2	4	
3	Цикломатическое число.	2		1	2	
4	Планарные графы, формула Эйлера.	2		1	4	
5	Ориентированные графы, порядковая функция.	2		1	4	
6	Неплоские графы, теорема Понтрягина-Каратовского, хроматическое число плоского графа.	2		2	2	
7	Функция Гранди.	2		2	2	
8	Внутренние и внешние устойчивые множества, ядро графа.	2		1	2	
9	Игры на графе.	2		1	4	
10	Теорема Кенига-Холла. Приложения к матрицам.	2		1	2	
11	Теорема Биркгофа-фон Неймана	2		2	2	
12	Выпуклые множества и крайние	2		1	2	

	точки. Теорема Биркгофа-фон Неймана.					
	Всего:	24		16	32	72

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Теория графов» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке или в системе «Электронный университет».

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
01.	<a href="#">Дистель, Рейнгард</a> . Теория графов / Рейнгард Дистель ; пер. с англ. О.В. Бородина .— Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2002 .— 335 с. : ил.
02.	<a href="#">Оре, Ойстин</a> . Графы и их применение / О. Оре ; Пер. с англ. Л. И. Головиной; Под ред. И. М. Яглома .— Новокузнецк : Новокузнец. физ.-мат. ин-т, 2000 .— 173, [1] с. : ил.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
03.	<a href="#">Оре, Ойстин</a> . Теория графов / О. Оре ; Пер. с англ. И. Н. Врублевской; Под ред. Н. Н. Воробьева .— 2-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1980 .— 336 с. : ил.
04.	<a href="#">Уилсон, Р.</a> Введение в теорию графов / Р. Уилсон ; Пер. с англ. И.Г. Никитиной; Под ред. Г.П. Гаврилова .— М. : Мир, 1977 .— 207 с. : ил.
05.	Лекции по теории графов : учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В.А. Емеличев [и др.] .— М. : Наука : Физматлит, 1990 .— 382, [1] с. : ил., табл.
06.	Оре О. Графы и их применение. М.: 1965. – 170 с.
07.	Берж К. Теория графов и ее применение. М.: 1962. – 319 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного

	университета. – ( <a href="http://www.lib.vsu.ru/">http // www.lib.vsu.ru/</a> )
	Google, Yandex, Rambler
	ЭБС «Лань» : <a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>
	Электронный курс <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462</a>

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1.	<u>Шевелев, Юрий Павлович</u> . Дискретная математика : учеб. пособие / Ю. П. Шевелев .— Москва : Лань, 2008 .— 591 с. : рис., табл.
2.	<u>Асанов, М. О.</u> Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы [Текст] : .— Москва : Лань, 2010 .— 368 с.

**17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

**Перечень тем занятий, реализуемых в активной и интерактивной формах**

Все лекционные и практические занятия реализуются в активной и интерактивной формах.

Все лекции носят проблемный характер, стимулируют учебную исследовательскую деятельность студентов, поскольку изучение нового теоретического материала всегда строится как решение математической задачи, ранее для студентов не известной.

На практических занятиях используются индивидуальные задания, поисковая исследовательская лабораторная работа, работа в группах. Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12462>).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft Windows 10 Enterprise, LibreOffice 5 (*Writer (текстовый процессор), Math (редактор формул)*), браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

При изучении

дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения лекций и практических занятий.

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории со специализированной мебелью, аудитории соответствуют действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

**19. Фонд оценочных средств:****19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
	Игры на графе. Выпуклые множества. Диаметр и радиус множества. Теорема Хелли.	ПКВ- 1 Способен выявлять, применять разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математик и механики	ПКВ-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Устный опрос Индивидуальные задания
		ПКВ- 2 Способен проводить исследование по обработке и анализу научной информации и результатов исследований методами теории функций.	ПКВ-2.1. Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	Устный опрос Индивидуальные задания
			ПКВ-2.2. Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	Устный опрос Индивидуальные задания
		ПКВ- 3 Способен к построению моделей и	ПКВ- 3.1 Знает современные методы разработки и реализации	Устный опрос Индивидуальные задания

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
		оптимальному решению теоретических и прикладных задач математик и и механики на основе методов теории функций и геометрии	математических моделей	
			ПКВ-3.2 Владеет навыками построения моделей прикладных процессов и навыками применения современных инструментальных средств к решению прикладных задач	
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				КИМы к экзамену

### 19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- 1) Знать: основные понятия курса, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений;
- 2) Уметь: решать задачи вычислительного и теоретического характера;
- 3) Владеть: математическим аппаратом, аналитическими методами исследования.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач в области...	<i>Повышенный уровень</i>	отлично
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), допускает не значительные ошибки при ответе.	<i>Базовый уровень</i>	хорошо
Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен дать	<i>Пороговый уровень</i>	удовлетворительно

ответ .		
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки,	–	неудовлетворительно

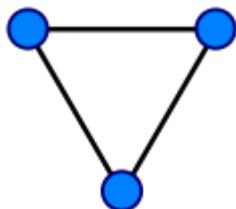
**19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

### 19.3.2 Вопросы к экзамену

1. Определение, степени, изоморфизмы.
2. Самодополнительные графы.
3. Эйлеровы графы.
4. Метрика графов.
5. Экстремальные графы.
6. Числа Рамсея.
7. Хроматическое число.
8. Деревья.
9. Цикломатическое число. (1,2)
10. Плоские графы, формула Эйлера.
11. Примеры неплоских графов.
12. Хроматическое число плоского графа.
13. Ориентированные графы, порядковая функция.
14. Функция Гранди.
15. Внутренне устойчивые множества.
16. Внешне устойчивые множества.
17. Ядро графа.
18. Игры на графе, игра Ним.
19. Паросочетания. Теорема Кенига-Холла.
20. Приложения к матрицам.
21. Бистохастические матрицы.
22. Теорема Биркгофа-фон Неймана.
23. Транспортные сети.
24. Теорема о насыщении.
25. Теорема о полустепенях.

**Пример КИМА:**

### Граф



**Граф** или **неориентированный граф**  $G$  — это упорядоченная пара  $G = (V, E)$ , для которой выполнены следующие условия:

- $V$  это множество вершин или узлов,
- $E$  это множество пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) различных вершин, называемых **рёбрами**.

$V$  (а значит и  $E$ ) обычно считаются конечными множествами. Многие хорошие результаты, полученные для конечных графов, неверны (или каким-либо образом отличаются) для *бесконечных графов*. Это происходит потому, что ряд соображений становятся ложными в случае бесконечных множеств.

Вершины и рёбра графа называются также **элементами** графа, число вершин в графе  $|V|$  — **порядком**, число рёбер  $|E|$  — **размером** графа.

Вершины  $u$  и  $v$  называются **концевыми** вершинами (или просто **концами**) ребра  $e = \{u, v\}$ . Ребро, в свою очередь, **соединяет** эти вершины. Две концевые вершины одного и того же ребра называются **соседними**.

Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую концевую вершину.

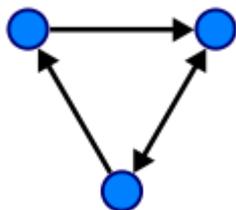
Два ребра называются **кратными**, если множества их концевых вершин совпадают.

Ребро называется **петлёй**, если его концы совпадают, то есть  $e = \{v, v\}$ .

**Степенью**  $\deg V$  вершины  $V$  называют количество рёбер, для которых она является концевой (при этом петли считают дважды).

Вершина называется **изолированной**, если она не является концом ни для одного ребра; **висячей** (или **листом**), если она является концом ровно одного ребра.

## Ориентированный граф



**Ориентированный граф** (сокращённо **орграф**)  $G$  — это упорядоченная пара  $G := (V, A)$ , для которой выполнены следующие условия:

- $V$  это множество вершин или узлов,
- $A$  это множество (упорядоченных) пар различных вершин, называемых **дугами** или **ориентированными рёбрами**.

*Дуга* — это упорядоченная пара вершин  $(v, w)$ , где вершину  $v$  называют началом, а  $w$  — концом дуги. Можно сказать, что дуга  $v \rightarrow w$  ведёт от вершины  $v$  к вершине  $w$ .

## Смешанный граф

**Смешанный граф**  $G$  — это граф, в котором некоторые рёбра могут быть ориентированными, а некоторые — неориентированными. Записывается упорядоченной тройкой  $G := (V, E, A)$ , где  $V$ ,  $E$  и  $A$  определены так же, как выше.

Понятно, что ориентированный и неориентированный графы являются частными случаями смешанного.

## Прочие связанные определения

**Путём** (или **цепью**) в графе называют конечную последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершин ребром.

**Ориентированным путём** в орграфе называют конечную последовательность вершин  $v_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), для которой все пары  $(v_i, v_{i+1})$  ( $i = 1, \dots, k - 1$ ) являются (ориентированными) рёбрами.

**Циклом** называют путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. При этом **длиной** пути (или цикла) называют число составляющих его *рёбер*. Заметим, что если вершины  $u$  и  $v$  являются концами некоторого ребра, то согласно данному определению, последовательность  $(u, v, u)$  является циклом. Чтобы избежать таких «вырожденных» случаев, вводят следующие понятия.

Путь (или цикл) называют **простым**, если ребра в нём не повторяются; **элементарным**, если он простой и вершины в нём не повторяются. Несложно видеть, что:

- Всякий путь, соединяющий две вершины, содержит элементарный путь, соединяющий те же две вершины.
- Всякий простой *неэлементарный* путь содержит элементарный *цикл*.
- Всякий *простой* цикл, проходящий через некоторую вершину (или ребро), содержит *элементарный* (под-)цикл, проходящий через ту же вершину (или ребро).

### 19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных компетенций.

На экзамене оценивается практический уровень освоения дисциплины и степень сформированности компетенций оценками по пятибалльной шкале.

Задания текущего контроля и проведение промежуточной аттестации должны быть направлены на оценивание уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности; степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и практически значимую информацию; приобретение умений профессионально значимых для профессиональной деятельности.