МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии

(п __Е.М. Семенов

30.06.2020 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.04.02 Основы теории пространств Понтрягина

1. Код и наименование направления подготовки:
01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки: Теория функций и приложения.

3. Квалификация выпускника: Математик. Механик. Преподаватель.

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра теории функций и геометрии

6. Составители программы: Денисов Михаил Сергеевич к.ф.-м.н.

7. **Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета, протокол №0500-04 от **18.06.2020**.

8. Учебный год: 2024/2025 **Семестр:** 9

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели учебной дисциплины: "Основы теории пространств Понтрягина" являются: знакомство с основными понятиями, методологией и результатами теории пространств с индефинитной метрикой, овладение аппаратом современного функционального анализа для дальнейшего использования в приложениях.

Задачи учебной дисциплины: «Основы теории пространств Понтрягина» освоение методов и понятийного аппарата современной функционального анализа, их применение в приложениях.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Блок Б1 вариативная часть.

Дисциплина «Основы теории пространств Понтрягина» базируется на знаниях, полученных в рамках курсов алгебры, математического анализа, функционального анализа и спектральной теории. Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки используются в математических и естественнонаучных дисциплинах, модулях и практиках, научно-исследовательской работе.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПКВ-1.1		*знать:* основные факты теории пространств с индефинитной метрикой. *уметь:* доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина. *владеть:* методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.
ПКВ-1.2		*знать:* основные факты теории пространств с индефинитной метрикой. *уметь:* доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина. *владеть:* методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.
ПКВ-1.3		*знать:* основные факты теории пространств с индефинитной метрикой. *уметь:* доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина. *владеть:* методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.
ПКВ-2.1		*знать:* основные факты функционального анализа использующихся в теории пространств с индефинитной метрикой.

		уметь: доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина. *владеть:* методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой
ПКВ-2.2		*знать:* основные математические и физические модели использующие пространства с индефинитной метрикой. *уметь:* исследовать математические модели методами теории пространств Понтрягина. *владеть:* методами и подходами исследования некоторых математематических моделей гидродинамики с помощью теории пространств с индефинитной метрикой.
ПКВ-3.1		*знать:* основные математические и физические модели использующие пространства с индефинитной метрикой. *уметь:* исследовать математические модели методами теории пространств Понтрягина. *владеть:* методами и подходами исследования некоторых математематических моделей гидродинамики с помощью теории пространств с индефинитной метрикой.
ПКВ-4.1		*знать:* основные методы математического и алгоритмического моделирования, применяемые при исследовании геометрии пространств с индефинитной метрикой. *уметь:* разрабатывать эффективные алгоритмы для численного моделирования геометрических характеристик пространств с индефинитной метрикой. *владеть:* методами математического и алгоритмического моделирования, применяемых при решении прикладных задач.
ПКВ-4.2		*знать:* основные методы математического и алгоритмического моделирования, применяемые при исследовании геометрии пространств с индефинитной метрикой. *уметь:* разрабатывать эффективные алгоритмы для численного моделирования геометрических характеристик пространств с индефинитной метрикой.

		владеть: методами математического и алгоритмического моделирования, применяемых при решении прикладных задач.
ПКВ-4.3		*знать:* основные методы математического и алгоритмического моделирования, применяемые при исследовании геометрии пространств с индефинитной метрикой. *уметь:* разрабатывать эффективные алгоритмы для численного моделирования геометрических характеристик пространств с индефинитной метрикой. *владеть:* методами математического и алгоритмического моделирования, применяемых при решении прикладных задач.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах — 2/72.
Форма промежуточной аттестации экзамены.

13. Виды учебной работы:

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)				
	Всего	По семестрам			
		7 сем.	8 сем.	9 сем.	10 сем.
Аудиторные занятия	32			32	
в том числе: лекции	16			16	
практические	16			16	
лабораторные					
Самостоятельная работа	40			40	
Форма промежуточной аттестации (*зачет – 0 час.)*					
Итого:	72			72	

13.1. Содержание разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Гильбертово пространство.	Неравенство Коши-Буняковского, слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.
1.2	Линейный оператор	Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность. Замкнутые линейные операторы. Свойства. Теорема Банаха.
1.3	Сопряженный оператор..	Определение. Существование и единственность. Свойства. Пространство графика линейного оператора.

1.4	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Примеры линейных операторов в различных Гильбертовых пространствах.
1.5	Самосопряженный оператор.	Простейшие свойства самосопряженных операторов, свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция.
1.6	Симметрические операторы.	Критерии существования самосопряженных расширений. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.
1.7	Пространство Понтрягина.	Определение. Каноническое разложение. Знаковые характеристики.
1.8	Пространство Понтрягина.	Вырожденные и невырожденные подпространства. Изотропные подпространства.
1.9	Пространство Понтрягина.	Ортогональное дополнение. Разложимость пространства.
1.10	Максимальные семидефинитные подпространства	Определение дефинитных, семидефинитных и максильных подпространств.
1.11	Максимальные семидефинитные подпространства	Размерность. Проекционная полнота.
1.12	Операторы в пространстве Понтрягина	Самосопряженные и унитарные операторы.
1.13	Операторы в пространстве Понтрягина	Спектр самосопряженных и унитарных операторов.
1.14	Операторы в пространстве Понтрягина	Проблема инвариантных подпространств и ее решение.
1.15	Пучок С.Г. Крейна	Определение пучка С,Г. Крейна. Линеаризация как самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина.
1.16	Пучок С.Г. Крейна	Проблема инвариантного подпространства, полнота и базисность корневых векторов.
	Практические занятия	
2.1	Гильбертово пространство. Линейный оператор.	Неравенство Коши-Буняковского, слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.
2.2	Гильбертово пространство. Линейный оператор.	Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность. Замкнутые линейные операторы. Свойства. Теорема Банаха.
2.3	Сопряженный оператор.	Определение. Существование и единственность. Свойства.
2.4	Сопряженный опе-	Пространство графика линейного оператора.

	ратор.	
2.5	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.
2.6	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов.
2.7	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Простейшие свойства самосопряженных операторов, свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция.
2.8	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Критерии существования самосопряженных расширений. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.
2.9	Пространство Понтрягина.	Определение. Каноническое разложение. Знаковые характеристики. Вырожденные и невырожденные подпространства.
2.10	Пространство Понтрягина.	Изотропные подпространства. Ортогональное дополнение. Разложимость пространства.
2.11	Максимальные семидефинитные подпространства	Определение дефинитных, семидефинитных и максильных подпространств этих классов.
2.12	Максимальные семидефинитные подпространства	Размерность. Проекционная полнота.
2.13	Операторы в пространстве Понтрягина	Самосопряженные и унитарные операторы. Спектра операторов этих классов.
2.14	Операторы в пространстве Понтрягина	Проблема инвариантных подпространств и ее решение.
2.15	Пучок С.Г. Крейна	Определение пучка С,Г. Крейна. Линеаризация как самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина.
2.16	Пучок С.Г. Крейна	Проблема инвариантного подпространства, полнота и базисность корневых векторов.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Гильбертово пространство.	2	2	0	4	8

	Линейный оператор.					
02	Сопряженный оператор.	2	2	0	4	8
03	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	2	2	0	4	8
04	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	2	2	0	4	8
05	Пространство Понтрягина.	2	2	0	4	8
06	Максимальные семидефинитные подпространства.	2	2	0	4	8
07	Операторы в пространстве Понтрягина	2	2	0	8	12
08	Пучок С.Г. Крейна	2	2	0	8	12
	Контр.					
Итого		16	16	0	40	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся.

Методические указания к лекционным занятиям

В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Методические рекомендации студентам к практическим занятиям

Важной составной частью учебного процесса в вузе являются практические занятия. Практические занятия требуют помимо знаний теоретического материала еще и навыков решения практических задач, и помогают студентам глубже усвоить учебный материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

В начале практического занятия происходит обсуждение задач, решенных студентами самостоятельно дома. Это возможность для студентов еще раз обратить внимание на не непонятные до сих пор моменты и окончательно разобрать их. Преподаватель может (выборочно) проверить записи с самостоятельно решенными задачами.

Затем начинается опрос по теме, обозначенной для данного практического занятия. В процессе этого опроса студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к ответам на все теоретические вопросы, поставленные в плане, проявлять максимальную активность при их рассмотрении. Ответы должны строиться свободно, убедительно и аргументировано. Преподаватель следит, чтобы ответы были точными, логично построенными и не сводилось к чтению конспекта. Необходимо, чтобы выступающий проявлял глубокое понимание того, о чем он говорит, сопоставлял теоретические знания (определений, теорем, утверждений и т.д.) с их практическим применением для решения задач, был способен привести конкретные примеры тех математических объектов и положений, о которых рассуждает теоретически.

В ходе обсуждения теоретического материала могут разгореться споры, дискуссии, к участию в которых должен стремиться каждый. Преподавателю необходимо внимательно и критически слушать, подмечать особенности в суждениях студентов, улавливать недостатки и ошибки, корректировать их знания, и, если нужно, выступить в роли рефери. При этом обратить внимание на то, что еще не было сказано, или поддержать и развить интересную мысль, высказанную выступающим студентом.

В заключение опроса преподаватель, еще раз кратко резюмирует теоретический материал, необходимый для решения задач. Также преподаватель может (выборочно) проверить конспекты студентов и, если потребуется, внести в них исправления и дополнения,

Затем приступают к решению практических задач, используя изученные теоретические положения.

Планы практических занятий, их тематика, рекомендуемая литература, цель и задачи ее изучения сообщаются преподавателем на вводных занятиях или в методических указаниях по данной дисциплине.

Методические рекомендации студентам к самостоятельной работе

Среди основных видов самостоятельной работы студентов выделяют следующие: подготовка к лекциям, практическим занятиям, зачетам и экзаменам, презентациям и докладам; написание рефератов, выполнение лабораторных и контрольных работ, участие в научной работе. Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности и уровня умений студентов.

Студентам необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у студентов свое отношение к конкретной проблеме.

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки настоящей рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины:

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 272 с.
2.	Азизов Т.Я., Введение в теорию пространств Понтрягина// Азизов Т.Я, Копачевский Н.Д.,Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского.Симферополь,2008. ***http://nikolay-d-kopachevsky.com/posobia.html***

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник

1.	Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 272 с.
2.	Азизов Т.Я., Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.// Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. М.: Наука, 1986.
3.	Иохвидов И.С., Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой// Иохвидов И.С., Крейн М.Г,. Труды ММО,I, 1956, т.5; II,1959,т.8
4.	Азизов Т.Я., Линейные операторы в гильбертовом пространстве с G-метрикой.// Азизов Т.Я., Иохвидов И.С., УМН,т.26,№4,1971. http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=rm&papered=5228&what=fullt&ption_lang=rus
5.	Азизов Т.Я., Линейные операторы в пространстве с индефинитной метрикой.// Азизов Т.Я., Иохвидов И.С, .Итоги науки и техники, ВИНИТИ. Математический анализ, т. 17 ,М.: Наука, 1979.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	Источник
1.	*Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http // www.lib.vsu.ru/)*
2.	*ЭБС «Университетская библиотека онлайн»*
3.	*Google, Yandex, Rambler*
4.	*http:www.math.msu.ru – официальный сайт мехмата МГУ*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1.	Юргелас, В. В. Функциональный анализ : практикум для студентов / В. В. Юргелас. – Воронеж: ВГУ, 2007. – 56 с.
2.	*Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете*

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460).

Перечень необходимого программного обеспечения:

Microsoft Windows 7 Enterprise, Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Visual Studio, Microsoft SQL Server Express, Microsoft Visual C++, Microsoft Web Deploy, MySQL Connector Net, DrWeb, Symantec Desktop Email Encryption Powered Technology 10.4, Lazarus, Java 8, NetBeans IDE, VMware Player, Python 2/3, LibreOffice 5 (*Writer (текстовый процессор), Calc (электронные таблицы), Impress (презентации), Draw (векторная графика), Base (база данных), Math (редактор формул)*), Gimp, MiKTeX, TeXstudio, Denwer, 1C: Предприятие 8 (*учебная версия*), Maxima, Total Commander, WinDjView, Foxit Reader, 7-Zip, Mozilla Firefox, BarsicLaz

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используются классы с компьютерной техникой, оснащенные необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть, читальные залы библиотеки.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПКВ-1.1 :	Знать: основные факты теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Уметь: доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Владеть: (иметь навык(и)): методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПКВ-1.2 :	Знать: основные факты теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Уметь: доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)

	Владеть: (иметь навык(и)): методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПКВ-1.3 :	Знать: основные факты теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Уметь: доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Владеть: (иметь навык(и)): методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПКВ-2.1 :	Знать: основные факты функционального анализа использующихся в теории пространств с индефинитной метрикой. .	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Уметь: доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Владеть: (иметь навык(и)): методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПКВ-2.2	Знать: основные факты функционального анализа использующихся в теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Уметь: доказывать основные результаты теории пространств Понтрягина.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)

	<u>Владеть</u>: методами исследования разработанными в теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПСК 2.2	знать: основные математические и физические модели использующие пространства с индефинитной метрикой.	1.16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	уметь: исследовать математические модели методами теории пространств Понтрягина.	1.16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	владеть: методами и подходами исследования некоторых математематических моделей гидродинамики с помощью теории пространств с индефинитной метрикой.	1.16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПКВ-3.1 :	<u>Знать</u>: основные математические и физические модели использующие пространства с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	<u>Уметь</u>: исследовать математические модели методами теории пространств Понтрягина.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	<u>Владеть</u>: (иметь навык(и)): методами и подходами исследования некоторых математематических моделей гидродинамики с помощью теории пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПКВ-4.1 :	<u>Знать</u>: основные методы математического и алгоритмического моделирования, применяемые при исследовании геометрии пространств с индефинитной метрикой	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)

	Уметь: разрабатывать эффективные алгоритмы для численного моделирования геометрических характеристик пространств с индефинитной метрикой..	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Владеть: (иметь навык(и)): методами математического и алгоритмического моделирования, применяемых при решении прикладных задач	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПКВ-4.2 :	Знать: основные методы математического и алгоритмического моделирования, применяемые при исследовании геометрии пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Уметь: разрабатывать эффективные алгоритмы для численного моделирования геометрических характеристик пространств с индефинитной метрикой.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	Владеть: (иметь навык(и)): методами математического и алгоритмического моделирования, применяемых при решении прикладных задач.	1-16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
ПСК 4.3	знать: основные методы математического и алгоритмического моделирования, применяемые при исследовании геометрии пространств с индефинитной метрикой.	1.16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
	уметь: разрабатывать эффективные алгоритмы для численного моделирования геометрических характеристик пространств с индефинитной метрикой.	1.16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)

	владеть: методами и методами математического и алгоритмического моделирования, применяемых при решении прикладных задач.	1.16	КИМ (зачет), КИМ (экзамен), КИМ (контрольная работа)
Промежуточная аттестация			КИМ (зачет), КИМ (экзамен)

19.2. Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации)

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки при доказательстве теорем или решении задач.	-	«Неудовлетворительно»
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичное знание основных понятий, определений, основных задач, формулировки теорем и методы их доказательства или не умеет решать задачи с использованием методов и подходов современного функционального анализа. Или имеет не полное представление об использовании основных методов исследования, допускает существенные ошибки при доказательстве теорем или решении задач.	Пороговый уровень	«Удовлетворительно»
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на до-	Базовый уровень	«Хорошо»

полнительные вопросы. Недостаточно продемонстрировано умение доказывать основные теоремы или решать задачи. Или содержатся отдельные пробелы при использовании основных методов исследования, или методов доказательства теорем и решения задач.		
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Продемонстрировано знание основных понятий, определений, основные задачи, формулировки теорем и методы их доказательства, умение анализировать, доказывать основные теоремы и решать задачи, владение основными методами исследования, основными методами доказательства теорем и решения задач.	Повышенный уровень	«Отлично»
Обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует знание учебного материала, возможно с некоторыми ошибками. Дополнительным условием получения оценки «зачтено» могут стать хорошие успехи при выполнении самостоятельных и контрольных работ, систематическая активная работа на лекционных и практических занятиях.	Пороговый уровень и выше порогового	«Зачтено»
Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или отсутствие их, допускает существенные ошибки, не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.	-	«Не зачтено»

19.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:

1. Неравенство Коши-Буняковского.
2. Слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве.

3. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.
4. Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность.
5. Замкнутые линейные операторы.
6. Свойства. Теорема Банаха.
7. Определение. Существование и единственность. Свойства. Пространство графика линейного оператора.
8. Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек.
9. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов.
10. Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.
11. Простейшие свойства самосопряженных операторов,
12. Свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция
13. Критерии существования самосопряженных расширений.
14. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.
15. Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.
16. Симметрические и положительно определенные операторы. Примеры. Неравенство Фридрихса.
17. Функционал энергии. Энергетическое пространство. Главные и естественные краевые условия.
18. Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве. Примеры. Представление обобщенного решения в виде ряда.
19. Сопряженные и самосопряженный операторы. Расширение Фридрихса с сохранением нижней грани.
20. Свойства собственных элементов и собственных значений самосопряженных операторов. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.
21. Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения.
22. Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.
23. Принцип Куранта. Теорема о монотонности спектра. Спетральная задача с двумя положительными операторами.
24. Задача Штурма-Лиувилля. Классические спектральные задачи математической физики. Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида.

19.3.2 Перечень практических заданий

1. **Задача 1**. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на [0;1] функций x(t) таких, что $|x(0)| \le K_1$, $\int_0^1 |x'(t)|^2 dt \le K_2$ где $K_1, K_2 > 0$ – постоянные, компактно в пространстве C[0;1].

Указание. Согласно теореме Арцела-Асколи, для предкомпактности семейства функций $M \subset C[a;b]$ $\Leftrightarrow$ равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность этого семейства. Если предкомпактное множество замкнуто, то оно компактно.

Задача 2. Будет ли компактным множество всех степеней x^n ($n \in \mathbf{N}$) в пространстве C[0;1].
Ответ. Нет.
Решение. Из последовательности элементов любого полного компакта можно выделить сходящуюся в нем подпоследовательность. Но любая бесконечная подпоследовательность из $\{x^n\}$ сходится к разрывной функции f(x) = {1, if x = 1; 0 otherwise}.

Задача 3. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве вполне ограничено.
Указание. Единичная сфера S в пространстве l_2 ограничена. Рассмотрим точки вида e_k (где на k-ом месте в последовательности стоит 1, а на остальных - 0). Расстояние между любыми двумя различными точками e_m и e_n равно $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ для $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ в S не существует конечной ε-сети (в каждом шаре радиуса ε с центром в узле такой ε-сети будет лежать не более одной точки e_k).

Задача 4. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество относительно компактно.
Указание. В конечномерном пространстве компактность означает замкнутость и ограниченность, поэтому замыкание всякого ограниченного множества компактно.

Задача 5. Доказать, что следующие функционалы в пространстве C[-1;1] являются линейными и непрерывными; найти их нормы.

а) $f(x) = \dfrac{1}{3}\left[x(-1) + x(1)\right]$

Указание. Любой функционал вида $g[x;t_0] = x(t_0)$, очевидно, является линейным и непрерывным. f(x) является линейной комбинацией таких функционалов. $\| g[x;t_0] \| \equiv 1$. $\| f \| = 2/3$.

б) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$

Указание. Линейность следует из линейности интеграла Римана I(x;[a;b]). Функционал вида I(x;[a;b]) ограничен и имеет норму (b-a). $\| f \| = 2$

в) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$

Указание. Любой функционал вида $J(x;y_0;[a;b]) = \int\limits_{a}^{b} y_0(t)x(t)dt$ линеен по x и ограничен. $\| J \| = \int\limits_{a}^{b} | y_0(t) | \, dt$. Таким образом, $\| f \| = 1$.

Задача 6. Пусть X – множество функций f(x), определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max\limits_{x}|f(x)|$. Будет ли пространство X банаховым?

Ответ. Нет.
Указание. Докажем, что пространство X не будет полным. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \{exp(- x^2)$, если $|x| \le n$; 0, если $|x| > n\}$. Очевидно, что эта последовательность фундаметальна, но сходится к функции $f(x)=exp(- x^2) \notin X$.

Задача 7. Является ли пространство непрерывных на отрезке [0;1] функций гильбертовым пространством, если скалярное произведение задается следующим образом: $(f,g) = \int\limits_{0}^{1} f(x)g(x)dx$?

Ответ. Нет.
Указание. Если предположить, что C[0;1] с заданным таким образом скалярным произведением есть гильбертово, то имеем подпространство в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$. Можно подобрать последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ из L_2, сходящуюся к разрывной функции $f(x)$ = {0, if x ≤ 1/2, 1, otherwise). Таким образом, подпространство C[0;1] не полно ⇒ противоречие.

Задача 8. Показать, что если в гильбертовом пространстве H последовательность x_n слабо сходится к x и $\|x_n\|\to\|x\|$, то последовательность x_n сходится сильно, т.е. $\|x_n - x\| \to 0$.

Указание. Предположим, что H сепарабельно. Тогда оно изоморфно пространству l_2. Поэтому достаточно доказать это утверждение для пространства l_2. Действительно, $\|x_n - x\|^2=(x_n-x,x_n-x)=\|x_n\|^2+\|x\|^2-2(x,x_n)= \|x_n\|^2-\|x\|^2+2(x,x-x_n)\to 0$ (т.к. согласно слабой сходимости, $(x,x_n-x) \to 0$).

Задача 9. Доказать, что любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H достигает нормы на замкнутом единичном шаре.

Указание. Считаем, что пространство H сепарабельно. Функционал F(x)=(a,x) достигает нормы $\|F\|=\|a\|$ на элементе $a/\|a\|$.

Задача 10. Найти норму оператора A, действующего в пространстве C[0;1], (или в пространстве $L_2[0;1]$): $Ax = tx(t)$.

Ответ. $\|A\| = \sup \{\|Ax\| \ (\|x\| \le 1)\} = 1$.

Задача 11. Определить оператор A^* и нормы операторов A и A^*, если $A{:}l_2\to l_2$, где $A(x_1,\ldots,x_n,\ldots)= A(0,x_1,\ldots,x_n,\ldots)$.

Указание. Сопряженным к l_2 является пространство функционалов вида G(x)=(g,x), где $g\in l_2$. Нужно подобрать оператор A^* на множестве таких функционалов, такой что $(g,Ax)=(A^*g,x)$. Для функционала G(x)=(g,x), где $g=(g_1,g_2,\ldots,g_n,\ldots)$ положим $A^*G(x)=G'(x)=(g',x)$, где $g'=(g_2,g_3,\ldots, g_n,\ldots)$. Поскольку A переводит единичный шар в единичный шар, то $\|A\| = 1$. Поскольку оператор A ограничен и пространство l_2 банахово, то $\|A^*\| = \|A\| = 1$.

Задача 12. Определить спектр оператора A, действующего в пространстве

l_2: $A(x_1,\ldots,x_n,\ldots)=\left(x_1,\dfrac{x_2}{2},\dfrac{x_3}{3},\ldots,\dfrac{x_n}{n},\ldots\right)$.

Ответ. $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n=1/n, n\in\mathbf{N}\}$.

Указание. Оператор A компактен, поэтому его спектр состоит из нуля и собственных значений. Числа λ_n являются собственными значениями, т.к. $Ker(A-\lambda_n I)\neq\{0\}$.

Задача 13. В пространстве l_2 задан оператор A: $A(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)=\left(0,\dfrac{x_1}{1},\dfrac{x_2}{2},\ldots,\dfrac{x_n}{n},\ldots\right)$. Доказать, что оператор A компактен, найти его спектр.

Ответ. $\sigma(A) = \{0\}$.

Указание. Оператор A компактен, т.к. является композицией компактного оператора из задачи 52 и ограниченного оператора (сдвига). Поскольку оператор задан в гильбертовом пространстве и компактен, то число 0 входит в его спектр. Легко показать, что собственных значений у оператора нет: из $(A-\lambda I)x = 0$, $\lambda\neq 0$ следует $x = 0$.

Задача 14. Привести пример линейного, но не непрерывного функционала.

Пример. Пространство $\{P_i(x)\}$ всевозможных многочленов над **R**. Норма: $\|P\|=\max(|P(x)|)$ на отрезке [0;1/2]. Функционал f(P) = P(1). Функционал f не является непрерывным. В самом деле, рассмотрим последовательность $P_n=x^n$. Очевидно, что $\|P_n\| \to 0$, но $f(P_n)\to\infty$.

Контрольно-измерительный материал №_1_

1. Привести пример линейного, но не непрерывного функционала.
2. Выполняется ли тождество параллелограмма в пространстве непрерывных функций?

19.3.2 Перечень практических заданий

1. Чем отличаются линейные многообразия от линейных подпространств?
2. Приведите пример линейного многообразия в пространстве C[0,1], которое не является подпространством.
3. Выполняется ли тождество параллелограмма в пространстве непрерывных функций?
4. Как осуществляется процесс ортогонализации?
5. Как применяется процесс ортогонализации для построения систем ортогональных многочленов?
6. В чем состоит экстремальное свойство коэффициентов Фурье?
7. Чем отличается ортонормированный базис от ортонормированной системы?
8. Как определяется ортогональное дополнение для произвольного множества гильбертова пространства?
9. Является ли это множество замкнутым?
10. Как определяется замкнутая ортонормированная система?
11. Приведите примеры ортонормированных базисов.
12. Является ли линейный ограниченный оператор в ЛНП непрерывным?
13. Верно ли обратное утверждение?
14. Как определяется норма ограниченного оператора?
15. Как оценивается норма интегрального оператора в пространстве квадратично суммируемых функций?
16. Как формулируется теорема о продолжении оператора по непрерывности?
17. Как определяются действия над линейными операторами?
18. При каких условиях полно пространство операторов?
19. Как определяется сопряженное пространство к ЛНП?
20. Почему оно всегда полное?
21. Как определяются поточечная и равномерная сходимости последовательностей операторов?
22. Как связаны эти понятия?
23. Как понимается поточечная полнота пространства операторов?
24. В чем смысл принципа фиксации особенности?
25. Как связана обратимость оператора с разрешимостью операторного уравнения?
26. Является ли переход к обратному оператору непрерывной операцией?
27. Как понимается близость оператора к единичному или обратимому в соответствующих теоремах об обратимости?
28. Какой вид имеет оператор, обратный к оператору вида "единичный + интегральный с малой нормой"?
29. Как решаются интегральные уравнения с вырожденными ядрами?
30. Является ли регулярным значением число a, если уравнение (A- a I)x=y имеет единственное решение при любой

правой части y ?
31. Как в доказательстве теоремы Хана - Банаха осуществляется
продолжение функционала на одно измерение?
32. В каком смысле функционал может разделять элемент и
подпространство?
33. Как определяется сопряженное пространство к линейному
нормированному пространству?
34. Как определяется норма в сопряженном пространстве?
35. Является ли сопряженное пространство полным?
36. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в
гильбертовом пространстве?
37. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в
пространстве непрерывных функций?
38. Как определяется второе сопряженное пространство?
39. Как осуществляется вложение банахова пространства во второе
сопряженное?
40. Как определяется сопряженный оператор?
41. Как связаны матрицы оператора и сопряженного оператора в
Rn ?
42. Как определяется слабая сходимость последовательностей
функционалов?
43. Как связаны слабая сходимость и сходимость по норме?
44. Как вопрос о сходимости квадратурных формул сводится к вопросу
о слабой сходимости функционалов?
45. При каком условии из слабой сходимости последовательности
элементов в гильбертовом пространстве следует ее сходимость по
норме?
46. Как определяется понятие слабой компактности множества
элементов?
47. Как определяется вполне непрерывный оператор?
48. Является ли он ограниченным?
49. Является ли единичный оператор вполне непрерывным?
50. На основании какого результата устанавливается полная
непрерывность интегрального оператора в пространстве непрерывных
функций?
51. Как устанавливается полная непрерывность оператора Гильберта - Шмидта?
52. Почему ядро оператора вида "единичный плюс вполне
непрерывный"является конечномерным подпространством?
53. Может ли ядро вполне непрерывного оператора быть
бесконечномерным?
54. Является ли образ оператора вида "единичный плюс вполне
непрерывный" замкнутым?
55. Следует ли из теоремы о спектре вполне непрерывного оператора
существование ненулевого собственного значения?
56. Может ли вполне непрерывный оператор для ненулевого
собственного значения иметь бесконечную линейно независимую
систему собственных векторов?
57. Пусть при некоторой фиксированной правой части операторное
уравнение с оператором вида "единичный плюс вполне непрерывный"
имеет единственное решение. Что можно сказать о разрешимости этого уравнения при любой
правой части? Сохранится ли единственность?
58. Как формулируются условия разрешимости операторного уравнения.

59. Как определяется гильбертово сопряженный оператор?
60. На основании какой теоремы утверждается его существование?
61. Как устанавливается вещественность собственных значений самосопряженного оператора?
62. Как используется вещественность собственных значений ССО в доказательстве теоремы о регулярном значении?
63. Как устроен спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора?
64. Из каких результатов следует существование ненулевого собственного значения у самосопряженного вполне непрерывного оператора?

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

1. Чем отличаются линейные многообразия от линейных подпространств?
2. Приведите пример линейного многообразия в пространстве C[0,1], которое не является подпространством.
3. Выполняется ли тождество параллелограмма в пространстве непрерывных функций?
4. Как осуществляется процесс ортогонализации?
5. Как применяется процесс ортогонализации для построения систем ортогональных многочленов?
6. В чем состоит экстремальное свойство коэффициентов Фурье?
7. Чем отличается ортонормированный базис от ортонормированной системы?
8. Как определяется ортогональное дополнение для произвольного множества гильбертова пространства?
9. Является ли это множество замкнутым?
10. Как определяется замкнутая ортонормированная система?
11. Приведите примеры ортонормированных базисов.
12. Является ли линейный ограниченный оператор в ЛНП непрерывным?
13. Верно ли обратное утверждение?
14. Как определяется норма ограниченного оператора?
15. Как оценивается норма интегрального оператора в пространстве квадратично суммируемых функций?
16. Как формулируется теорема о продолжении оператора по непрерывности?
17. Как определяются действия над линейными операторами?
18. При каких условиях полно пространство операторов?
19. Как определяется сопряженное пространство к ЛНП?
20. Почему оно всегда полное?
21. Как определяются поточечная и равномерная сходимости последовательностей операторов?
22. Как связаны эти понятия?
23. Как понимается поточечная полнота пространства операторов?
24. В чем смысл принципа фиксации особенности?
25. Как связана обратимость оператора с разрешимостью операторного уравнения?
26. Является ли переход к обратному оператору непрерывной операцией?
27. Как понимается близость оператора к единичному или обратимому в соответствующих теоремах об обратимости?

28. Какой вид имеет оператор, обратный к оператору вида "единичный + интегральный с малой нормой"?
29. Как решаются интегральные уравнения с вырожденными ядрами?
30. Является ли регулярным значением число a, если уравнение (A- a I)x=y имеет единственное решение при любой правой части y ?
31. Как в доказательстве теоремы Хана - Банаха осуществляется продолжение функционала на одно измерение?
32. В каком смысле функционал может разделять элемент и подпространство?
33. Как определяется сопряженное пространство к линейному нормированному пространству?
34. Как определяется норма в сопряженном пространстве?
35. Является ли сопряженное пространство полным?
36. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве?
37. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве непрерывных функций?
38. Как определяется второе сопряженное пространство?
39. Как осуществляется вложение банахова пространства во второе сопряженное?
40. Как определяется сопряженный оператор?
41. Как связаны матрицы оператора и сопряженного оператора в Rn ?
42. Как определяется слабая сходимость последовательностей функционалов?
43. Как связаны слабая сходимость и сходимость по норме?
44. Как вопрос о сходимости квадратурных формул сводится к вопросу о слабой сходимости функционалов?
45. При каком условии из слабой сходимости последовательности элементов в гильбертовом пространстве следует ее сходимость по норме?
46. Как определяется понятие слабой компактности множества элементов?
47. Как определяется вполне непрерывный оператор?
48. Является ли он ограниченным?
49. Является ли единичный оператор вполне непрерывным?
50. На основании какого результата устанавливается полная непрерывность интегрального оператора в пространстве непрерывных функций?
51. Как устанавливается полная непрерывность оператора Гильберта - Шмидта?
52. Почему ядро оператора вида "единичный плюс вполне непрерывный"является конечномерным подпространством?
53. Может ли ядро вполне непрерывного оператора быть бесконечномерным?
54. Является ли образ оператора вида "единичный плюс вполне непрерывный" замкнутым?
55. Следует ли из теоремы о спектре вполне непрерывного оператора существование ненулевого собственного значения?
56. Может ли вполне непрерывный оператор для ненулевого собственного значения иметь бесконечную линейно независимую систему собственных векторов?

57. Пусть при некоторой фиксированной правой части операторное
уравнение с оператором вида "единичный плюс вполне непрерывный"
имеет единственное решение. Что можно сказать о разрешимости этого уравнения при любой правой части? Сохранится ли единственность?
58. Как формулируются условия разрешимости операторного уравнения.
59. Как определяется гильбертово сопряженный оператор?
60. На основании какой теоремы утверждается его существование?
61. Как устанавливается вещественность собственных значений самосопряженного оператора?
62. Как используется вещественность собственных значений ССО в доказательстве теоремы о регулярном значении?
63. Как устроен спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора?
64. Из каких результатов следует существование ненулевого собственного значения у самосопряженного вполне непрерывного оператора?

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Текущий контроль это одна из составляющих оценки качества освоения образовательных программ, направленный на проверку знаний, умений и навыков обучающихся. Текущий контроль осуществляется по ходу обучения и дает возможность определить степень сформированности знаний, умений, навыков, а также их глубину и прочность.

Цель текущего контроля:

обеспечение оперативной обратной связи и определение фактического уровня знаний, умений и навыков обучающихся по конкретной дисциплине учебного плана в процессе его обучения.

Задачи текущего контроля:

- повышение качества и прочности знаний студентов;
- приобретение и развитие навыков самостоятельной работы;
- повышение академической активности студентов;
- обеспечение оперативного управления учебной деятельностью в течение семестра.

Текущий контроль проводится в течение семестра по итогам выполнения контрольных работ, участия в практических занятиях, коллоквиуму и т.д. Текущий контроль успеваемости студентов является постоянным, осуществляется в течение семестра, в ходе повседневной учебной работы (формы и виды текущего контроля успеваемости студентов определяются учебными планами).

По курсу планируются следующие виды текущего контроля: устный опрос, контрольная работа, коллоквиум.

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями и задается ограничение по времени 90 минут.

В ходе проведения коллоквиума обучающемуся выдается программа коллоквиума, бланк ответа и билет с заданием, ограничение по времени также 90 минут.

При организации текущего контроля уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенций могут быть определены как среднее по результатам контрольных работ и устных ответов. Каждая контрольная работа оценивается по пятибалльной системе, если в итоге средний балл составляет не менее 3 баллов, выставляется оценка «зачтено».

Коллоквиум позволяет получить оценку по части изученного в семестре материала в полном соответствии с критериями и шкалой промежуточной аттестации. Оценка в баллах сохраняется для дальнейшего учета при формировании оценки в конце семестра.

Промежуточная аттестация это определение и оценка уровня знаний студента за определенный период обучения. Кроме оценки уровня знаний процедура аттестации предполагает на основе анализа текущей успеваемости и отношения к учебной работе оценку ряда личных качеств студента.

Промежуточная аттестация по дисциплине «Элементы спектральной теории» проводится в форме экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося учитываются при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента с результатами текущей аттестации ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию на общих основаниях.