

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой ВМ и ПИТ


Леденёва Т. М.
21.04.2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.22 Линейная алгебра

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

10.05.01 Компьютерная безопасность

2. Профиль подготовки/специализация:

специализация N 2 "Математические методы защиты информации"

3. Квалификация выпускника: специалист

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Вычислительной математики и прикладных информационных технологий

6. Составители программы: Медведева О. А., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры ВМиПИТ, Глушакова Т.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры ВМ и ПИТ, Лазарев К.П., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры ВМ и ПИТ.

7. Рекомендована:

научно-методическим советом факультета ПММ протокол №8 от 15.04.2022

8. Учебный год: 2022-2023

Семестр(ы): 1

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цель изучения дисциплины «Линейная алгебра» – дать студентам глубокие знания о методах, задачах и теоремах линейной алгебры, научить студентов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности.

Задачи учебной дисциплины: научить студентов владеть теоретическим материалом, решать задачи, использовать методы и теоремы линейной алгебры при решении прикладных задач. В результате изучения дисциплины студенты должны знать и уметь применять на практике основные методы линейной алгебры, владеть навыками решения практических задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений (вариативная) блока Б1, к которой относится дисциплина; требования к входным знаниям, умениям и навыкам; дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей))

Дисциплина «Линейная алгебра» (Б1.О.22) относится к обязательной части блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана и изучается во 2 семестре.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-3	Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности	ОПК-3.4	умеет решать основные задачи линейной алгебры	Знать: основные задачи линейной алгебры Уметь: решать основные задачи линейной алгебры Владеть: основными инструментами и подходами к решению основных задач линейной алгебры
		ОПК-3.7	знает основные свойства важнейших алгебраических систем: групп, колец, полей	Знать: основные свойства важнейших алгебраических систем: групп, колец, полей Уметь: применять на практике основные свойства важнейших алгебраических систем Владеть: навыками работы с важнейшими алгебраическими системами: группами, кольцами, полями
		ОПК-3.8	знает основы линейной алгебры и важнейшие свойства векторных пространств над произвольными полями	Знать: основы линейной алгебры и важнейшие свойства векторных пространств над произвольными полями Уметь: применять на практике важнейшие свойства векторных пространств над произвольными полями Владеть: базовыми инструментами линейной алгебры
		ОПК-3.9	знает основные свойства колец многочленов над кольцами и полями	Знать: основные свойства колец многочленов над кольцами и полями Уметь: применять на практике основные свойства колец многочленов Владеть: базовыми инструментами для работы с кольцами многочленов
		ОПК-3.10	знает основные свойства отображений важнейших алгебраических систем	Знать: основные свойства отображений важнейших алгебраических систем Уметь: применять на практике основные свойства отображений Владеть: навыками использования основных свойств отображений важнейших алгебраических систем
		ОПК-3.11	умеет производить стандартные алгебраические операции в основных числовых и конечных полях, кольцах, а также оперировать с подстановками, многочленами,	Знать: основные алгебраические операции в основных числовых и конечных полях, кольцах, алгебру многочленов и матриц Уметь: производить стандартные алгебраические операции в основных числовых и конечных полях, кольцах, а также оперировать с подстановками, многочленами, матрицами, в том числе с использованием компьютерных программ Владеть: базовыми инструментами для работы с многочленами, подстановками и матрицами

			матрицами, в том числе с использованием компьютерных программ	
		ОПК-3.12	умеет решать системы линейных уравнений над полями, приводить матрицы и квадратичные формы к каноническому виду	Знать: основные подходы к решению систем линейных уравнений, приведению матрицы и квадратичные формы к каноническому виду Уметь: решать системы линейных уравнений над полями, приводить матрицы и квадратичные формы к каноническому виду Владеть: базовыми подходами к решению систем линейных уравнений
		ОПК-3.13	умеет производить оценку качества полученных решений прикладных задач	Знать: основные принципы оценки качества полученных решений прикладных задач Уметь: производить оценку качества полученных решений прикладных задач Владеть: навыками оценки качества полученных решений
		ОПК-3.14	владеет методами решения стандартных алгебраических, матричных, подстановочных уравнений в алгебраических структурах	Знать: основные методы решения стандартных алгебраических, матричных, подстановочных уравнений Уметь: применять на практике методы решения стандартных алгебраических, матричных, подстановочных уравнений Владеть: методами решения стандартных алгебраических, матричных, подстановочных уравнений в алгебраических структурах
		ОПК-3.15	владеет навыками решения типовых линейных уравнений над полем и кольцом вычетов	Знать: основные методы решения типовых линейных уравнений над полем и кольцом вычетов Уметь: применять на практике методы решения типовых линейных уравнений над полем и кольцом вычетов Владеть: навыками решения типовых линейных уравнений над полем и кольцом вычетов
		ОПК-3.16	владеет навыками решения стандартных задач в векторных пространствах и методами нахождения канонических форм линейных преобразований	Знать: основные методы решения стандартных задач в векторных пространствах и методами нахождения канонических форм линейных преобразований Уметь: применять на практике стандартных задач в векторных пространствах и методами нахождения канонических форм линейных преобразований Владеть: навыками решения стандартных задач в векторных пространствах и методами нахождения канонических форм линейных преобразований

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах (в соответствии с учебным планом) — 4/144.

Форма промежуточной аттестации экзамен

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			1 семестр	2 семестр	...
Контактная работа		68		68	
в том числе:	лекции	34		34	
	практические	34		34	
	лабораторные	0		0	
	курсовая работа	0		0	
Самостоятельная работа		40		40	
Промежуточная аттестация (для экзамена)		36		36	
Итого:		144		144	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Линейные пространства	Линейное пространство. Простейшие свойства. Линейное подпространство. Критерий линейного подпространства. Линейная комбинация. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе и их свойства. Размерность линейного пространства. Свойства размерности. Связь понятий размерности и базиса. Изоморфизм линейных пространств. Критерий изоморфизма. Матрица перехода от одного базиса к другому. Связь координат вектора в различных базисах. Линейная оболочка. Сумма и пересечение подпространств. Размерность суммы двух подпространств. Прямая сумма подпространств. Прямое дополнение. Линейное многообразие.	Линейная алгебра КБ
1.2	Евклидовы и унитарные пространства	Евклидовы и унитарные пространства. Простейшие свойства. Неравенство Коши – Буняковского. Норма вектора. Теорема Пифагора. Тожество параллелограмма. Ортогональность. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грамма – Шмидта. Матрица и определитель Грамма. Ортогональное дополнение. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Расстояние до подпространства. Расстояние до многообразия. Линейный оператор. Линейное преобразование. Свойства линейного оператора.	Линейная алгебра КБ
1.3	Линейные преобразования	Матрица линейного оператора. Линейное выражение координат образа вектора при линейном отображении. Связь матриц линейного оператора в различных базисах. Операции сложения, умножения на число и умножения операторов. Образ и ядро линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Обратный оператор. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования. Характеристический многочлен. Собственные значения и собственные векторы линейного	Линейная алгебра КБ

		преобразования в n -мерном комплексном пространстве. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов. Собственное подпространство. Геометрическая кратность. Условия приведения матрицы линейного преобразования к диагональному виду. Жорданова форма матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли. Сопряженные и самосопряженные операторы в евклидовых и унитарных пространствах. Нормальные, ортогональные и унитарные операторы в евклидовых и унитарных пространствах.	
1.4	Линейные, билинейные и квадратичные формы	Линейные, билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Общий вид. Матрица формы. Преобразование матрицы при изменении базиса. Ранг формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод Якоби. Квадратичных форм в вещественном пространстве. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенность квадратичных форм в вещественном пространстве. Критерии положительной и отрицательной определенности квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием в евклидовом пространстве. Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду.	Линейная алгебра КБ
2. Практические занятия			
2.1	Линейные пространства	Линейное пространство. Линейное подпространство. Линейная комбинация. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе и их свойства. Размерность линейного пространства. Связь понятий размерности и базиса. Матрица перехода от одного базиса к другому. Связь координат вектора в различных базисах. Линейная оболочка. Сумма и пересечение подпространств. Размерность суммы двух подпространств. Прямая сумма подпространств.	Линейная алгебра КБ
2.2	Евклидовы и унитарные пространства	Евклидовы и унитарные пространства. Норма вектора. Теорема Пифагора. Тожество параллелограмма. Ортогональность. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грамма – Шмидта. Матрица и определитель Грамма. Ортогональное дополнение. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Расстояние до подпространства. Линейный оператор. Линейное преобразование.	Линейная алгебра КБ
2.3	Линейные преобразования	Матрица линейного оператора. Связь матриц линейного оператора в различных базисах. Операции сложения, умножения на число и умножения операторов. Образ и ядро линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Обратный оператор. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования. Характеристический многочлен. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов. Собственное подпространство. Геометрическая кратность. Условия приведения матрицы линейного преобразования к диагональному виду. Жорданова форма матрицы линейного преобразования.	Линейная алгебра КБ
2.4	Линейные, билинейные и квадратичные формы	Линейные, билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Матрица формы. Преобразование матрицы при изменении базиса. Ранг формы. Приведение квадратичной формы к	Линейная алгебра КБ

		каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод Якоби. Квадратичных форм в вещественном пространстве. Критерии положительной и отрицательной определенности квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием в евклидовом пространстве. Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду.	
--	--	---	--

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Линейные пространства	9	9	0	10	28
2	Евклидовы и унитарные пространства	9	9	0	10	28
3	Линейные преобразования	8	8	0	10	26
4	Линейные, билинейные и квадратичные формы	8	8	0	10	26
	Итого:	34	34	0	40	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: указание наиболее сложных разделов, работа с конспектами лекций, презентационным материалом, рекомендации по выполнению курсовой работы, по организации самостоятельной работы по дисциплине и др.)

Количество часов, отведенных для лекционного курса, не позволяет реализовать в лекциях всей учебной программы. Исходя из этого, каждый лектор создает свою тематику лекций, которую в устной или письменной форме представляет студентам при первой встрече. Важно студенту понять, что лекция есть своеобразная творческая форма самостоятельной работы. Надо пытаться стать активным соучастником лекции: думать, сравнивать известное с вновь получаемыми знаниями.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

Работая с литературой по теме занятий, делайте выписки текста, содержащего характеристику или комментарии уже знакомого Вам источника. Умение работать с литературой означает научиться осмысленно пользоваться источниками. Прежде чем приступить к освоению научной литературы, рекомендуется чтение учебников и учебных пособий.

При подготовке к экзамену следует в полной мере использовать лекционный материал и академический курс учебника, рекомендованного преподавателем.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Горлач, Б. А. <i>Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник</i> / Горлач Б. А. — 1-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 300 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/99103 .
2	Курош А. Г. <i>Курс высшей алгебры : учеб.</i> / А. Г. Курош. — Москва : Лань, 2013. — 431 с. Режим доступа: https://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=30198
3	Проскуряков И. В. <i>Сборник задач по линейной алгебре</i> / И. В. Проскуряков. — Москва : Лань, 2010. — 475 с. Режим доступа: https://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=529
4	Мальцев, И. А. <i>Линейная алгебра</i> / Мальцев И. А. — 2-е, испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 384 с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=610 .

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	Беклемишев Д. В. <i>Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для студ. вузов</i> / Д. В. Беклемишев. — Москва : Физматлит, 2007. — 307 с.

6	Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — Москва : Физматлит, 2005. — 278 с.
7	Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие для студ. физ.-мат. спец-стей вузов / И. В. Проскуряков. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2003. — 382 с.
8	Кострикин А. И. Введение в алгебру : учебник для студ. ун-тов / А. И. Кострикин. — Москва : Физматлит, 2009. — Ч. 1 : Основы алгебры. — 271 с.
9	Кострикин А. И. Введение в алгебру : учебник для студ. ун-тов / А. И. Кострикин. — Москва : Физматлит, 2009. — Ч. 2 : Линейная алгебра. — 367 с.
10	Ефимов Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. — Москва : Физматлит, 2004. — 463 с.
11	Куликов Л. Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел : учеб. пособие для студ. физ.-мат. специальностей пед. ин-тов / Л. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин. — Москва : Просвещение, 1993. — 287 с.
12	Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства : учеб. пособие для студ. ун-тов. — Москва : Наука, 1969. — 432 с.
13	Руководство к решению задач по алгебре. Ч. 1 / сост. Т. Н. Глушакова, Н. Н. Удоденко, Ю. В. Бондаренко. — Воронеж, 2002. — 67 с.
14	Руководство к решению задач по алгебре. Ч. 2. Жорданова форма матрицы и жорданов базис / сост. Н. Н. Удоденко, Т. Н. Глушакова. Воронеж, 2003. — 43 с.
15	Руководство к решению задач по алгебре. Ч. 3. Линейные пространства / сост. Ю. В. Бондаренко, Т. Н. Глушакова, Е. С. Тихомирова. — Воронеж, 2002. — 36 с.
16	Руководство к решению задач по алгебре. Ч. 4. Комплексные числа / сост. Т. Н. Глушакова, И. Б. Крыжко. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. — 21 с.
17	Руководство к решению задач по алгебре. Ч. 5. Элементы теории многочленов / сост. Т. Н. Глушакова, И. Б. Крыжко. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. — 15 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
18	www.lib.vsu.ru — Зональная научная библиотека ВГУ
19	Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре : учеб. пособие / Д. К. Фаддеев. — Москва : Лань, 2007. — 416 с. Режим доступа: https://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=397
20	Фаддеев Д. К. Задачи по высшей алгебре : учеб. пособие / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. — Москва : Лань, 2008. — 288 с. Режим доступа: https://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=399
21	Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений : учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сост. К. П. Лазарев. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012. — 74 с. Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-20.pdf
22	Линейная алгебра КБ онлайн-курс, размещенный на LMS-платформе edu.vsu.ru

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

Самостоятельная работа обучающегося должна включать подготовку к практическим занятиям и подготовку к промежуточной аттестации. Для этого рекомендуется освоить теоретический материал, соответствующих тем, по конспектам лекций и презентационному материалу, размещенному на ЭО ресурсах, литературу из представленного ниже перечня, материалы с тематических ресурсов сети Интернет.

№ п/п	Источник
1	Глушакова Т. Н. Введение в векторную алгебру : учеб. пособие / Т. Н. Глушакова, И. Б. Крыжко, М. Е. Эксаревская. — Воронеж : ЛОП ВГУ, 2005. — 39 с.
2	Решение задач по аналитической геометрии. Прямая и плоскость в пространстве : учеб. пособие для вузов / сост. Т. Н. Глушакова [и др.]. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2008. — 39 с.
3	Глушакова Т.Н. Задачи по аналитической геометрии на плоскости [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Т. Н. Глушакова, К. П. Лазарев. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2018. — 92 с.
4	Глушакова Т.Н. Введение в аналитическую геометрию : учебное пособие / Т.Н. Глушакова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — 181 с. : ил. — Библиогр.: с. 181. — ISBN 978-5-9273-2884-0.

5	Глушакова Т.Н. <i>Прямая и плоскость в пространстве : учебно-метод. пособие / Т.Н. Глушакова, Е.М. Аристова, К.П. Лазарев, О.Г. Корольков .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019 .— 51 с</i>
6	<i>Векторы. Системы координат : учебно-методическое пособие : / Воронеж. гос. ун-т ; сост.: В.В. Корзунина, К.П. Лазарев, З.А. Шабунина .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017 .— 55 с. : ил. — Библиогр.: с. 54-55.</i>
7	Глушакова, Т. Н. <i>Поверхности в пространстве : учебно-методическое пособие / Т. Н. Глушакова, О. Г. Корольков, К. П. Лазарев .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020 .— 47 с.</i>

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение): (При реализации дисциплины могут проводиться различные типы лекций (вводная, обзорная и т.д.), семинарские занятия (проблемные, дискуссионные и т.д.), применяться дистанционные образовательные технологии в части освоения лекционного материала, проведения текущей аттестации, самостоятельной работы по дисциплине или отдельным ее разделам и т.д. При применении ЭО и ДОТ необходимо в п.15 в) указать используемые ресурсы (см. пример выше)

При реализации учебной дисциплины используются информационные электронно-образовательные ресурсы www.lib.vsu.ru и <https://e.lanbook.com>.

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Линейная алгебра КБ», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель, компьютер (ноутбук), мультимедиа оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения). ОС Windows 10, интернет-браузер (Mozilla Firefox), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами (LibreOffice).

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Линейные пространства	ОПК-3	ОПК-3.4, ОПК-3.7, ОПК-3.8, ОПК-3.12	Контрольная работа 1
2	Евклидовы и унитарные пространства	ОПК-3	ОПК-3.10, ОПК-3.11, ОПК-3.14	Контрольная работа 1
3	Линейные преобразования	ОПК-3	ОПК-3.11, ОПК-3.12, ОПК-3.14	Контрольная работа 2
4	Линейные, билинейные и квадратичные формы	ОПК-3	ОПК-3.9, ОПК-3.11, ОПК-3.13, ОПК-3.15, ОПК-3.16	Контрольная работа 2
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				Перечень вопросов

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Контрольная работа

Контрольная работа 1 (пример варианта)

1. В некотором базисе заданы координаты векторов $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$. Покажите, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис и найдите координаты вектора x в этом базисе.

2. В некотором базисе заданы координаты двух систем векторов $a_1 = (5, 8, -10, -2)$, $a_2 = (-1, -1, 2, 7)$, $a_3 = (2, 2, -4, -8)$, $a_4 = (-1, -1, 2, 4)$; $b_1 = (1, 7, -10, -5)$, $b_2 = (2, 5, -8, -4)$, $b_3 = (-3, 2, -2, -1)$, $b_4 = (4, 1, 0, 0)$. Линейные оболочки этих систем векторов определяют два подпространства $L_1 = \text{Lin}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $L_2 = \text{Lin}(b_1, b_2, b_3, b_4)$. Найдите базисы и размерности каждого подпространства L_1, L_2 , а также их суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$.

3. В линейном пространстве E задано подмножество $L \subset E$, состоящее из векторов z с координатами $z = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, для которых выполнены условия
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$
 Проверьте, что L — линейное подпространство в E , и найдите его базис и размерность.

4. Посредством процесса ортогонализации найдите ортогональный базис линейной оболочки векторов $(1, 2, 1, 3)$, $(4, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 0)$.

5. Представьте вектор x евклидова пространства с координатами $(-5, 4, 1, -4)$ в виде суммы $x = y + z$, где вектор y принадлежит подпространству L , натянутому на векторы $(-2, 2, 3, -2)$, $(2, 4, 1, 3)$, $(0, 6, 4, 1)$, а вектор z ортогонален L .

Контрольная работа 2 (пример варианта)

1. Покажите, что оператор $A(u) = 2xu' - 3u$ является линейным преобразованием пространства многочленов с действительными коэффициентами степени не выше двух. Найдите матрицу этого линейного преобразования в базисе $e_1 = x^2, e_2 = x, e_3 = 1$.

2. Линейное преобразование φ евклидова пространства в базисе из векторов $f_1 = (1, 2, 1)$, $f_2 = (1, 1, 2)$, $f_3 = (1, 1, 0)$, имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$
. Найдите матрицу сопряжённого

преобразование φ^* в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

3. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданные в некотором базисе матрицей
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
.

4. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$, и выясните будет ли она знакоопределённой.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Собеседование по билетам

Перечень вопросов для промежуточной аттестации:

1. Линейное пространство. Простейшие свойства. Линейное подпространство. Критерий линейного подпространства.
2. Линейная комбинация. Линейная зависимость и линейная независимость векторов.
3. Базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе и их свойства.
4. Размерность линейного пространства. Свойства размерности. Связь понятий размерности и базиса.
5. Изоморфизм линейных пространств. Критерий изоморфизма.
6. Матрица перехода от одного базиса к другому. Связь координат вектора в различных базисах.
7. Линейная оболочка. Сумма и пересечение подпространств.
8. Размерность суммы двух подпространств.
9. Прямая сумма подпространств.
10. Прямое дополнение. Линейное многообразие.
11. Евклидовы и унитарные пространства. Простейшие свойства.
12. Неравенство Коши – Буняковского. Норма вектора. Теорема Пифагора. Тожество параллелограмма.
13. Ортогональность. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грамма – Шмидта.
14. Матрица и определитель Грамма.
15. Ортогональное дополнение. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство.
16. Расстояние до подпространства. Расстояние до многообразия.
17. Линейный оператор. Линейное преобразование. Свойства линейного оператора.
18. Матрица линейного оператора. Линейное выражение координат образа вектора при линейном отображении. Связь матриц линейного оператора в различных базисах.
19. Операции сложения, умножения на число и умножения операторов.
20. Образ и ядро линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора.
21. Обратный оператор.
22. Инвариантные подпространства.
23. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования. Характеристический многочлен. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования в n -мерном комплексном пространстве. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов.
24. Собственное подпространство. Геометрическая кратность. Условия приведения матрицы линейного преобразования к диагональному виду.
25. Жорданова форма матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли.
26. Сопряженные и самосопряженные операторы в евклидовых и унитарных пространствах.
27. Нормальные, ортогональные и унитарные операторы в евклидовых и унитарных пространствах.

28. Линейные, билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Общий вид. Матрица формы. Преобразование матрицы при изменении базиса. Ранг формы.
29. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод Якоби.
30. Квадратичных форм в вещественном пространстве. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенность квадратичных форм в вещественном пространстве. Критерии положительной и отрицательной определенности квадратичной формы.
31. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием в евклидовом пространстве. Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду.

Инструкция по сдаче экзамена:

Каждый контрольно-измерительный материал состоит из двух блоков. Первый из них содержит теоретический вопрос из перечня вопросов к промежуточной аттестации №1, второй – практическое задание.

Критерии оценивания контрольной работы:

Отлично	5 правильно выполненных задания
Хорошо	4 правильно выполненных задания
Удовлетворительно	3 правильно выполненных задания
Неудовлетворительно	правильно выполнено менее 3 заданий

Критерии оценивания собеседования по экзаменационным билетам:

Отлично	отличное владение теорией и решение задач не ниже хорошего уровня; или отличное решение задач и владение теорией не ниже хорошего уровня
Хорошо	владение теорией не ниже хорошего уровня и решение задач не ниже удовлетворительного уровня; или владение теорией не ниже удовлетворительного уровня и решение задач не ниже хорошего уровня
Удовлетворительно	удовлетворительное владение теорией и удовлетворительное решение задач
Неудовлетворительно	неудовлетворительное владение теорией; или неудовлетворительное решение задач