

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

МиКМ

проф. А.В. Ковалев

18.05.2022г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.18 Дифференциальная геометрия и топология

1. Шифр и наименование направления подготовки / специальности:

01.03.03 Механика и математическое моделирование

2. Профиль подготовки: Компьютерный инжиниринг в механике сплошных сред

3. Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Механики и компьютерного моделирования

6. Составители программы:

Минаева Надежда Витальевна, доктор физ-мат. наук, профессор, факультет ПММ,
кафедра МиКМ, nminaeva@yandex.ru

7. Рекомендована: НМС факультета ПММ протокол № 8 15.04.2022

8. Учебный год: 2023 - 2024

Семестр(ы): 3

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» являются: формирование математической культуры студента в области геометрии и топологии, изучение фундаментальных понятий геометрии, топологии и тензорного анализа, овладение классическим математическим аппаратом дифференциальной геометрии и топологии.

Задачи учебной дисциплины: научить студентов владеть теоретическим материалом, уметь формулировать и доказывать основные классические и современные результаты дисциплины, владеть навыками решения классических и современных задач и обоснования полученных результатов.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина относится к обязательной части блока Б1. Для успешного овладения данной дисциплиной студентам необходимы знания дисциплин: аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ (особенно разделы - дифференцирование функций одной и многих переменных, интегрирование). Освоение дисциплины позволит в дальнейшем изучать дисциплины: теоретическая и прикладная механика, мехатроника, сопротивление материалов.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Решает типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, сформулированных в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук	Знать основные понятия и теоремы теории кривых, геометрию поверхностей, тензорный анализ, связность и ковариантное дифференцирование
		ОПК-1.2	Применяет системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач.	Уметь применять полученные знания при решении задач по дифференциальной геометрии, топологии и прикладных задач в изучаемых спецкурсах, при выполнении контрольных работ, курсовых и проектов, при научно-исследовательской работе по направлению Владеть методами и методиками построения поверхностей, ковариантного дифференцирования, основами тензорного анализа
		ОПК-1.3	Осуществляет выбор современных математических инструментальных средств для обработки изучаемых данных в соответствии с поставленной задачей, анализирует результаты расчетов и обосновывает полученные результаты.	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 3/108

Форма промежуточной аттестации(зачет/экзамен) зачет с оценкой

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам
		№ 3
Аудиторные занятия	64	64
В том числе: лекции	32	32

	практические	32	32
	лабораторные		
Самостоятельная работа		44	44
Форма промежуточной аттестации (экзамен – час.)			
Итого:		108	108

13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
1. Лекции			
1.	Теория кривых	Геометрия кривых. Простая дуга. Определение кривых. Способы задания кривых. Кривизна плоской кривой. Эволюта. Пространственные кривые; сопровождающий трехгранник. Кривизна и кручение пространственной кривой	Дифгеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599
2.	Геометрия поверхностей	Геометрия поверхностей. Гладкая поверхность. Способы задания поверхностей. Касательная плоскость, нормаль. Первая квадратичная форма. Площадь поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные направления и главные кривизны в точке поверхности. Формулы для нахождения главных кривизн, главных направлений, полной и средней кривизны поверхности, заданной параметрически. Формулы Эйлера, теорема Менье. Дифференциальные формулы, символы Кристоффеля. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии на поверхности. Уравнение геодезической линии. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро	Дифгеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599
3.	Тензорный анализ	Тензоры в линейном пространстве. Полилинейные функции. Законы преобразования вектора, ковектора, квадратичной формы, линейного оператора. Общее определение тензорного поля в области аффинного пространства. Алгебра тензоров. Линейные операции над тензорами. Тензорное умножение. Кососимметрические тензоры. Дифференциальные формы. Внешнее умножение форм. Внешнее дифференцирование форм. Свойства оператора внешнего дифференцирования.	Дифгеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599
4.	Связность и ковариантное дифференцирование.	Определение связности. Ковариантная производная. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности симметричной римановой связности. Параллельный перенос. Уравнение параллельного переноса. Геодезические. Параллельный перенос в римановой связности. Перенос вдоль геодезической. Геодезические на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Тензор кривизны: два его определения. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса и ее следствия.	Дифгеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599

2. Практические занятия			
1.	Теория кривых	Геометрия кривых. Простая дуга. Определение кривых. Способы задания кривых. Кривизна плоской кривой. Эволюта. Пространственные кривые; сопровождающий трехгранник. Кривизна и кручение пространственной кривой	Диффеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599
2.	Геометрия поверхностей	Геометрия поверхностей. Гладкая поверхность. Способы задания поверхностей. Касательная плоскость, нормаль. Первая квадратичная форма. Площадь поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные направления и главные кривизны в точке поверхности. Формулы для нахождения главных кривизн, главных направлений, полной и средней кривизны поверхности, заданной параметрически. Формулы Эйлера, теорема Минье. Дифференциальные формулы, символы Кристоффеля. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии на поверхности. Уравнение геодезической линии. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро	Диффеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599
3.	Тензорный анализ	Тензоры в линейном пространстве. Полилинейные функции. Законы преобразования вектора, ковектора, квадратичной формы, линейного оператора. Общее определение тензорного поля в области аффинного пространства. Алгебра тензоров. Линейные операции над тензорами. Тензорное умножение. Кососимметрические тензоры. Дифференциальные формы. Внешнее умножение форм. Внешнее дифференцирование форм. Свойства оператора внешнего дифференцирования.	Диффеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599
4.	Связность и ковариантное дифференцирование.	Определение связности. Ковариантная производная. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности симметричной римановой связности. Параллельный перенос. Уравнение параллельного переноса. Геодезические. Параллельный перенос в римановой связности. Перенос вдоль геодезической. Геодезические на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Тензор кривизны: два его определения. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса и ее следствия.	Диффеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599

13.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Теория кривых	8	8		11	27
2	Геометрия поверхностей	10	10		11	31
3	Тензорный анализ	8	8		11	27
4	Связность и ковариантное дифференцирование.	6	6		11	23
	Итого:	32	32		44	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: указание наиболее сложных разделов, работа с конспектами лекций, презентационным материалом, рекомен-

дации по выполнению курсовой работы, по организации самостоятельной работы по дисциплине и др)

Освоение дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» включает лекционные занятия, практические занятия и самостоятельную работу обучающихся. На первом занятии студент получает информацию для доступа к комплексу учебно-методических материалов.

Лекционные занятия посвящены рассмотрению теоретических основ составляющих современные научные направления дифференциальной геометрии и топологии, ключевых принципов, базовых понятий, стандартов и методологий.

Практические занятия предназначены для формирования умений и навыков, закрепленных компетенций по ОПОП. Они организуются в виде работы над практико-ориентированными заданиями, домашние задания, собеседования.

Самостоятельная работа студентов включает в себя проработку учебного материала лекций, разбор заданий, подготовку к контрольной работе.

Для успешного освоения дисциплины рекомендуется подробно конспектировать лекционный материал, просматривать основную и дополнительную литературу по соответствующей теме, чтобы систематизировать изучаемый материал.

В течение семестра обучающимся предлагается выполнять практикоориентированные, домашние задания. Промежуточная аттестация проводится в форме собеседования на основе вопросов из п.20.2.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения следует выполнять все указания преподавателя по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию [Электронный ресурс] / Паньженский В. И. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Лань, 2015. – 240 с. – Рекомендовано Государственным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика». – Книга из коллекции Лань - Математика. – ISBN 978-5-8114-1979-1. – <URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67459 >
2	Веблен, Освальд. Основания дифференциальной геометрии / О. Веблен, Дж. Уайтхед ; Пер. с англ. М.Г. Фрейдиной с доп. В.В. Вагнера. – М. : Гос. изд-во ин. лит., 1949. – 229,[1] с. – <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/books/bm5423.djvu >.
3.	Дифференциальная геометрия : пособие по курсу "Дифференциальная геометрия" : специальность 010901 (010500) - Механика / Воронеж. гос. ун-т; сост. : А.В. Крутов, Ю.М. Мяснянкин. – Воронеж : ЛОП ВГУ, 2004. – 23 с. : ил. – Библиогр.: с.21. – <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/feb05029.pdf >.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1.	<i>Лекции и лабораторные занятия по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т ; сост. Р.С. Адамова. — Электрон. текстовые дан. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2008. — Загл. с титул. экрана. — Для зарегистрированных читателей ВГУ. — Текстовый файл. — <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81.pdf> .—</i>

	<URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-1.pdf > .— <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-2.pdf >
2.	Топология и дифференциальная геометрия : Учеб. пособие: Для студ. 2 к. д/о / Воронеж. гос. ун-т. Каф. алгебры и тополог. методов анализа; Сост. Ю. Е. Гликлик .— 3-е изд. — Воронеж, 2002 .— 72 с. — 16.55 .— <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/jul07001.pdf >.
3.	Монж, Гаспар. Приложение анализа к геометрии / Г. Монж ; Пер. с фр. В.А. Гуковской; Под ред. с предисл. и примечаниями М.Я. Выгодского .— М. : Обьедин. науч.-тех изд-во , 1936 .— 699 с. : ил .— (Классики естествознания) .— <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/books/b147974.djvu >.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1.	Электронно-библиотечная система «Консультант студента». - Режим доступа: https://www.studentlibrary.ru/
2	Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: https://e.lanbook.com/
3	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. - Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru .
4	Дифгеометрия, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

Самостоятельная работа обучающегося должна включать подготовку к практическим занятиям, контрольной работе и подготовку к промежуточной аттестации.

Для обеспечения самостоятельной работы студентов в электронном курсе дисциплины на образовательном портале «Электронный университет ВГУ» сформирован учебно-методический комплекс Дифгеометрия, <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599>., который включает в себя: программу курса, учебные пособия и справочные материалы, методические указания по выполнению заданий. Студенты получают доступ к данным материалам на первом занятии по дисциплине.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале. Применяются разные типы лекций (вводная, обзорная, информационная, проблемная).

Информационные технологии для реализации учебной дисциплины:

- технологии синхронного и асинхронного взаимодействия студентов и преподавателя посредством служб (сервисов) по пересылке и получению электронных сообщений, в том числе, по сети Интернет а также другие Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.;

- сервис электронной почты для оперативной связи преподавателя и студентов.

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, для организации самостоятельной работы обучающихся используется онлайн-курс, размещенный на платформе Электронного университета ВГУ <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599>, а также другие Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Лекционная аудитория должна быть оборудована учебной мебелью, компьютером, мультимедийным оборудованием (проектор, экран, средства звуковоспроизведения), допускается переносное оборудование.

Учебная аудитория для практических занятий: специализированная мебель, персональные компьютеры в количестве, обеспечивающем возможность индивидуальной работы, компьютер преподавателя, мультимедийное оборудование (проектор, экран).

Для самостоятельной работы необходимы компьютерные классы, помещения, оснащенные компьютерами с доступом к сети Интернет.

Программное обеспечение: ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Chrome, Яндекс.Браузер, Mozilla Firefox), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами, таблицами (MS Office, МойОфис, LibreOffice).

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Теория кривых	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2	Практикоориентированные задания/домашние задания Контрольная работа
2.	Геометрия поверхностей	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Практикоориентированные задания/домашние задания Контрольная работа
3	Тензорный анализ	ОПК-1	ОПК-1.3	Практикоориентированные задания/домашние задания
4	Связность и ковариантное дифференцирование.	ОПК-1	ОПК-1.3	Практикоориентированные задания/домашние задания
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет с оценкой				Перечень вопросов

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Практикоориентированные задания/домашние задания

(наименование оценочного средства текущего контроля успеваемости)

Перечень заданий из задачников и пособий из п.16

Описание технологии проведения. Проводится контроль путем проверки выполненных упражнений

Шкалы и критерии оценивания

Оценка	Критерии оценок
Отлично	Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов
Хорошо	<i>Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов, но есть некоторые ошибки.</i>
Удовлетворительно	<i>Неправильное решение задачи, но верно выбран метод решения.</i>
Неудовлетворительно	<i>Неправильное решение задачи, причем неверно выбран метод решения.</i>

Контрольная работа

Примеры вариантов:

Контрольно-измерительный материал № 1

1. Найти длину дуги гиперболической винтовой линии, заключенную между точками O и t .
2. Параметризовать при помощи естественного параметра.

Контрольно-измерительный материал № 2

1. Найти сопровождающий трехгранник для винтовой линии в точке $(a, 0, 0)$.
2. Вычислить кривизну

Описание технологии проведения. Проводится контроль путем проверки выполненных упражнений

Шкалы и критерии оценивания

Оценка	Критерии оценок
Отлично	Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов
Хорошо	<i>Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов, но есть некоторые ошибки.</i>
Удовлетворительно	<i>Неправильное решение задачи, но верно выбран метод решения.</i>
Неудовлетворительно	<i>Неправильное решение задачи, причем неверно выбран метод решения.</i>

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Собеседование по вопросам

(наименование оценочного средства промежуточной аттестации)

Вопросы к зачету

1. Основные системы координат.
2. Вектор-функция
3. Способы задания кривой.
4. Сопровождающий трехгранник (плоскости, оси)
5. Длина дуги.
6. Естественная параметризация
7. Понятие кривизны,

8. теорема о кривизне.
9. Соприкасающаяся окружность.
10. Понятие кручения
11. теорема о кручении.

Описание технологии проведения. Зачет проводится в форме собеседования на основе КИМ, составленных на основе вопросов для подготовки к зачету.

Оценка	Критерии оценок
Отлично	Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Владение основными методами решения задач. Умение получить основные характеристики объектов.
Хорошо	Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование, но возможны некоторые неточности при ответе. Владение основными методами решения задач. Умение получить основные характеристики объектов.
Удовлетворительно	Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Умение получить основные характеристики объектов.
Неудовлетворительно	Нетвёрдое знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Плохое владение методами решения задач.

20.3 Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).

ОПК-1

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Длина дуги кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$ равна

- ☐ $5a/2$
- ☐ $7a/4$
- ☒ $8a$
- ☐ $4a$

2. Спрямолинейной плоскостью кривой γ в точке (t_0) называется:

- ☐ нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости кривой γ в точке (t_0)
- ☐ плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль кривой γ в точке (t_0)
- ☒ плоскость, проходящая через касательную и бинормаль кривой γ в точке (M_0)

3. Кривизна $k(t)$ регулярной кривой γ в произвольной точке $t \in I$ вычисляется по формуле:

- ☐ $k(t) = |[r'(t), r''(t)]| / |r'(t)|$
- ☐ $k(t) = |[r'(t), r''(t)]| / |r'(t)|^2$
- ☒ $k(t) = |[r'(t), r''(t)]| / |r'(t)|^3$

4. Вектор-функция $r(t)$ каждому аргументу t ставит в соответствие:

- а) число; **б) вектор**; в) точке; г) скаляр.

5. Проекция винтовой линии $x = a \cos(t)$; $y = a \sin(t)$; $z = bt$ на координатную плоскость xOy есть:

а) прямая; б) **окружность**; в) пилообразная ломаная; г) синусоидальная линия.

7. Прямая, проходящая через данную точку гладкой кривой $r = r(t)$ параллельно вектору первой производной, называется:

а) **касательной**; б) нормалью; в) бинормалью; г) главной нормалью.

8. Уравнения касательной к линии $x = a \cos(t)$; $y = b \sin(t)$; $z = e^t$ при $t = 0$ имеют вид:

а) $\frac{x-a}{1} = \frac{y}{b} = \frac{z-1}{a}$ б) $\frac{x-a}{b} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{1}$

в) $\frac{x-a}{0} = \frac{y}{b} = \frac{z-1}{1}$ г) $\frac{x-a}{1} = \frac{y}{b} = \frac{z-1}{0}$

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Какие точки являются особыми, привести описание нескольких типов особых точек.

Пример ответа: Пусть плоская фигура l задана уравнением $F(x, y) = 0$. Особыми могут быть только те точки, в которых $F_x(x, y) = 0$, $F_y(x, y) = 0$.

Определение. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ особая точка линии $F(x, y) = 0$ и $\delta = \left(F_{xy}|_{M_0}\right)^2 - F_{xx}|_{M_0} \cdot F_{yy}|_{M_0}$. Тогда если $\delta < 0$, то точка M_0 называется *изолированной* (касательных нет), если $\delta > 0$, то точка M_0 называется *точкой самопересечения, самоприкосновения* (две касательные), если $\delta = 0$, то точка M_0 называется *точкой возврата* (одна касательная).

2. Сопровождающий трехгранник

Пример ответа:

Определение. Всякая плоскость, проходящая через касательную прямую кривой, называется ее *касательной плоскостью*.

Определение. Касательная плоскость, проходящая через главную нормаль кривой, называется *соприкасающейся*.

Определение. Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*.

Определение. Касательная, главная нормаль и бинормаль определяют в каждой точке кривой трехгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой кривой. Этот трехгранник называется *сопровождающим, основным или натуральным трехгранником кривой*.

Граниями основного трехгранника будут три взаимно перпендикулярные плоскости.

1. Соприкасающаяся плоскость, содержащая касательную и главную нормаль.

2. Нормальная плоскость, содержащая главную нормаль и бинормаль.

3. Третья плоскость, содержащая бинормаль и касательную, называется спрямляющей плоскостью.

3. Кривизна, кручение, их геометрический смысл

Пример ответа:

Пусть кривая γ задана относительно натурального параметра s с помощью векторного параметрического уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Длина второй производной вектор-функции $\mathbf{r}(s)$ называется кривизной кривой γ в точке со значением параметра s . Кривизна гладкой кривой γ в точке M_0 есть предел, к которому стремится отношение угла между касательными в точках M_0 и M к длине дуги M_0M , когда точка M , оставаясь на γ , стремится к M_0 .

Гладкая кривая γ является прямой или ее частью тогда и только тогда, когда во всех ее точках кривизна равна нулю.

Кручение линии γ – это коэффициент при векторе $\beta(s)$ в формуле для вектора производной главной нормали по параметру s . В точке M_0 гладкой линии γ , в которой кривизна отлична от нуля, абсолютное значение кручения γ равно пределу, к которому стремится отношение угла между бинормальными в точках M_0 и M к длине дуги M_0M , когда точка M , оставаясь на линии γ стремится к точке M_0 .

Гладкая линия будет плоской тогда и только тогда, когда кручение во всех ее точках равно 0.

4. Естественная параметризация.

Пример ответа:

Пусть элементарная линия γ задана векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in U$. Выберем в качестве параметра для описания линии длину дуги кривой со знаком от точки со значением параметра t_0 до точки со значением параметра t . Таким образом, мы получаем функцию $s = s(t)$. Это строго возрастающая функция (длина дуги растет), она имеет производные всех порядков по t (правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и гладкость линии γ), и $ds/dt \neq 0$. Значит, функция $s = s(t)$ является допустимой заменой параметра t на параметр s . Параметр s называется натуральным параметром. Также говорят, что кривая задана в естественной параметризации.

5. Главные кривизны, полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности

Пример ответа:

Определение. Главными кривизнами поверхности называются экстремальные значения нормальных кривизн в заданной точке (если они имеются)

Определение. Касательные к кривым на поверхности, нормальные кривизны которых – главные, называются *главными направлениями* поверхности.

Главные направления поверхности являются главными направлениями индикатрисы Дюпена.

Определение. Кривая на поверхности, в каждой точке которой касательная направлена по главному направлению, называется *линией кривизны* поверхности.

Определение. Гауссовой (полной) кривизной поверхности называется число, равное произведению главных кривизн

Определение. Средней кривизной поверхности называется число, равное среднему арифметическому главных кривизн

Описание технологии проведения. Проводится в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только вопросы с кратким текстовым ответом или представленные в форме эссе

Критерии и шкалы оценивания:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ, в том числе частично.

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

- 5 баллов – задание выполнено верно;
- 2 балла – выполнение задания содержит незначительные ошибки;
- 0 баллов – задание не выполнено или выполнено неверно.