

- овладение студентами теоретическими и методическими основами моделирования с использованием моделей и методов линейной алгебры и математического программирования;
- ознакомление с вычислительными алгоритмами решения задач линейной алгебры и математического программирования;
- применение методов линейной алгебры и математического программирования для решения конкретных экономических задач;
- овладение современными приемами математического моделирования с использованием универсальных программных средств;
- приобретение студентами практических навыков при решении задач моделирования;
- формирование представления об исследовании экономических систем методами математического моделирования.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к блоку Б1 учебного плана и включена в его базовую часть.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-2	способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач	<p>Знать: основные теоретические положения линейной алгебры в рамках изучаемых разделов, применяемые в экономике.</p> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> – решать практические задачи методами линейной алгебры в рамках изучаемых разделов; – анализировать информацию, необходимую для решения поставленной экономической задачи инструментами линейной алгебры. <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> – навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; – навыками обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; – навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов.
ОПК-3	способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы	<p>Знать: особенности и области применения линейной алгебры для решения профессиональных задач.</p> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> – анализировать информацию, необходимую для решения поставленной экономической задачи инструментами линейной алгебры; – применять методы линейной алгебры для решения профессиональных задач. <p>Владеть:</p>

		<ul style="list-style-type: none"> – навыками обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; – навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов.
ПК-4	способностью на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> – основы математических методов моделирования экономических систем; – особенности и области применения линейной алгебры для решения профессиональных задач. <p>Уметь: применять методы линейной алгебры для решения профессиональных задач.</p> <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> – навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; – навыками обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; – навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. 5/180.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость		
	Всего	По семестрам	
		1 семестр	2 семестр
Аудиторные занятия	72	-	72
в том числе: лекции	36	-	36
практические	36	-	36
лабораторные	-	-	-
Самостоятельная работа	72	-	72
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час. / экзамен – ___ час.)	36	-	36
Итого:	180	-	180

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
		1. Лекции
1.1	Матрицы.	Матрицы. Виды матриц (квадратная, нулевая, единичная, диагональная, симметрическая). Операции над матрицами (умножение на число, сложение, умножение, возведение в степень, транспонирование). Свойства операций.
1.2	Определители.	Определитель матрицы, его свойства. Методы вычисления определителей. Миноры. Алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа.

1.3	Обратная матрица. Ранг матрицы.	Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Эквивалентные матрицы. Ступенчатый вид матрицы. Базисный минор.
1.4	Общий вид и свойства системы линейных уравнений.	Определение системы линейных уравнений. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные системы линейных уравнений. Равносильные системы линейных уравнений. Матричная форма системы линейных уравнений. Метод обратной матрицы.
1.5	Метод Крамера. Метод Гаусса.	Метод Крамера. Метод Гаусса. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные и свободные переменные. Общее, частное и базисное решение систем линейных уравнений.
1.6	Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.	Определение системы линейных однородных уравнений, фундаментальной системы решений. Теорема об общем решении системы линейных однородных уравнений.
1.7	Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.	Линейные балансовые системы в экономике на примере модели многоотраслевой экономики Леонтьева. Продуктивные модели Леонтьева. Критерии продуктивности модели Леонтьева.
1.8	Векторное пространство.	Векторы на плоскости и в пространстве. Операции над векторами, коллинеарные векторы. Скалярное произведение векторов, его свойства. Проекция вектора на ось. Понятие n -мерного вектора. Векторное пространство. Размерность и базис векторного пространства. Евклидово пространство.
1.9	Линейная зависимость векторов. Базис и ранг системы векторов.	Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Свойства линейно зависимой системы векторов. Базис и ранг системы векторов. Разложение векторов по базису. Матрица перехода от одного базиса к другому.
1.10	Линейные операторы.	Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора. Теорема о связи матрицы одного и того же оператора для разных базисов.
1.11	Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.	Определение собственного значения и собственного вектора линейного оператора. Характеристическое уравнение линейного оператора. Свойства собственных значений матрицы линейного оператора. Диагональная форма матрицы линейного оператора.
1.12-1.13	Квадратичные формы	Определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы. Преобразование квадратичной формы. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Метод Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм. Положительно (отрицательно) определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Линейная модель торговли.
1.14-1.15	Элементы аналитической геометрии	Системы координат. Уравнение прямой: с угловым коэффициентом, общее, в отрезках. Уравнение пучка прямых, уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Окружность: определение, каноническое уравнение и свойства. Эллипс: определение, каноническое уравнение и свойства. Гипербола: определение, каноническое уравнение и свойства. Парабола: определение, каноническое уравнение и свойства. Общая теория кривых 2-го порядка. Плоскость: общее уравнение, понятие нормального вектора. Частные случаи расположения плоскости в координатном пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Прямая в пространстве: понятие направляющего вектора, каноническое уравнение прямой, общее уравнение. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол

		между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Обзор поверхностей 2-го порядка.
1.16	Элементы выпуклого анализа	Выпуклые множества в пространстве R^n . Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Геометрические примеры крайних (угловых) точек. Базисные и небазисные компоненты крайней точки. Алгебраическая характеристика крайней точки полиэдра (многогранника). Выпуклая оболочка системы точек в R^n
1.17	Классификация задач и моделей математического программирования.	Линейное, нелинейное, выпуклое, невыпуклое, целочисленное, частично – целочисленное, стохастическое и динамическое программирование. Модель транспортной задачи. Модель планирования производства на предприятии. Модель задачи о диете. Модель задачи о назначении. Линейная модель обмена.
1.18	Начальные сведения о методах оптимизации. Теория двойственности.	Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования. Математическая постановка задачи линейного программирования. Общая, стандартная и каноническая задача линейного программирования. Приведение задачи линейного программирования к каноническому виду. Запись задачи линейного программирования в матричном виде. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения. Решение задач линейного программирования методом перебора вершин. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Алгоритм симплекс-метода. Нахождение исходного допустимого базиса. Метод искусственного базиса. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности.
2. Практические занятия		
2.1	Матрицы. Операции над матрицами.	Операции над матрицами (умножение на число, сложение, умножение, транспонирование). Свойства операций. Решение задач с экономическим содержанием, с использованием изученных операций над матрицами.
2.2	Определители, методы их вычисления.	Вычисление определителей второго и третьего порядка: методом треугольника; с использованием свойств определителя, с использованием теоремы Лапласа. Вычисление определителей высших порядков.
2.3	Обратная матрица.	Нахождение обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований.
2.4	Ранг матрицы.	Нахождение ранга матрицы. Определение максимального числа линейно независимых строк (столбцов) матрицы.
2.5	Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод обратной матрицы.	Решение матричных уравнений. Решение системы линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы. Решение задач с экономическим содержанием, с использованием систем линейных уравнений.
2.6	Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Метод Жордана-Гаусса.	Решение системы линейных уравнений методом Гаусса, методом Жордана-Гаусса. Решение задач с экономическим содержанием, с использованием систем линейных уравнений.
2.7	Общее и базисное решение систем линейных уравнений. Система фундаментальных решений системы линейных однородных уравнений.	Нахождение общего и базисного решения систем линейных уравнений. Нахождение фундаментальной системы решений системы линейных уравнений.
2.8	Модель Леонтьева.	Определение продуктивности матрицы. Решение задач с применением модели многоотраслевой экономики Леонтьева.
2.9	Векторное пространство.	Операции над векторами. Скалярное произведение векторов, его свойства. Определение линейной зависимости и

		независимости векторов. Разложение векторов по базису. Матрица перехода от одного базиса к другому.
2.10	Линейные операторы.	Определение линейности оператора. Нахождение матрицы линейного оператора. для разных базисов.
2.11	Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.	Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
2.12	Линейная модель торговли.	Нахождение соотношений национальных доходов стран для сбалансированной торговли.
2.13	Квадратичные формы.	Нахождение квадратичной формы соответствующей заданной матрице. Определение квадратичной формы в матричном виде. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Метод Лагранжа. Исследование квадратичной формы на знакоопределенность. Критерий Сильвестра.
2.14 - 2.15.	Элементы аналитической геометрии.	Уравнение прямой: с угловым коэффициентом, общее, в отрезках. Уравнение пучка прямых, уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Плоскость: общее уравнение, понятие нормального вектора. Частные случаи расположения плоскости в координатном пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Прямая в пространстве: каноническое уравнение прямой, общее уравнение. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Решение задач с экономическим содержанием, с использованием элементов аналитической геометрии.
2.16	Элементы выпуклого анализа.	Системы линейных неравенств и их геометрический смысл. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Геометрические примеры крайних (угловых) точек. Базисные и небазисные компоненты крайней точки. Алгебраическая характеристика крайней точки полиэдра (многогранника).
2.17	Задачи математического программирования.	Задача об использовании ресурсов. Задачи о диете. Задача о загрузке оборудования. Линейная модель обмена.
2.18	Методы оптимизации.	Решение задач линейного программирования.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Самостоятельная работа	Контроль	Всего
1.	Матрицы. Определители.	6	8	12		26
2.	Системы линейных уравнений.	8	8	12		28
3.	Векторы.	8	8	12		28
4.	Квадратичные формы	4	2	12		18
5.	Элементы аналитической геометрии. Элементы выпуклого анализа.	6	6	12		24
6.	Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации. Теория двойственности.	4	4	12		20
	Контроль:				36	36
	Итого:	36	36	72	36	180

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для обеспечения систематической и регулярной работы по изучению дисциплины и успешного прохождения текущих и промежуточных аттестационных испытаний студенту рекомендуется:

- посещать аудиторные лекционные занятия, которые включают в себя подробное изучение каждой темы. В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала, обращать внимание на рекомендации преподавателя;
- посещать аудиторные практические занятия, которые включают в себя подробный разбор решения практических задач. В ходе практических занятий необходимо вести конспектирование учебного материала, обращать внимание на рекомендации преподавателя;
- выполнять домашние задания. Домашние задания включают в себя решение задач, аналогичных разобранным в аудитории. При выполнении задания необходимо привести развернутые пояснения выполнения задания и проанализировать полученные результаты, рекомендуется использование лекций, учебной литературы. Также домашние задания могут включать проработку материалов, разобранных на предыдущей лекции, что позволит более глубоко и качественно освоить изучаемый материал;
- написать два теоретических письменных опроса;
- написать три контрольных работы.

В случае отсутствия на аудиторных занятиях студенту необходимо сдать все отчетные элементы (теоретические опросы, контрольные работы) для допуска к промежуточной аттестации.

Промежуточные аттестационные испытания по всем разделам учебной дисциплины проводятся в виде экзамена. Форма и порядок проведения экзамена: письменно.

При ответе на вопросы промежуточной аттестации студент должен показать знания теоретического материала курса, навыки решения практических заданий.

Большое значение имеет самостоятельная работа обучающихся, которая позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала.

Самостоятельная работа направлена на самостоятельную отработку изученных тем и вопросов учебной дисциплины. Самостоятельная работа является обязательной для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. Самостоятельная работа с лекционным материалом, учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet является наиболее эффективным методом получения знаний. Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Виды самостоятельной работы: проработка лекций, дополнение лекций с использованием учебной и научной литературы; выполнение домашних заданий (практических и теоретических); подготовка к практическим занятиям, контрольным работам, теоретическим опросам.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<i>Математика в экономике : учебник. Ч.1 [Электронный ресурс] / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. - 2013. - изд. 3-е, перераб. и доп. - 384 с. Режим доступа: https://biblioclub.lib.vsu.ru/index.php?page=book_view&book_id=220236</i>
2	<i>Горлач Б. А. Линейная алгебра : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по экон. специальностям [Электронный ресурс] / Б.А. Горлач. – СПб. : Лань, 2012. - 480 с. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4042</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
-------	----------

3	Гайворонская С. А. <i>Линейная алгебра : курс лекций для студентов факультета международных отношений / С. А. Гайворонская. – Воронеж : ФМО ВГУ, 2012. – 91 с.</i>
4	Мальцев И.А. <i>Линейная алгебра [Электронный ресурс] / И.А.Мальцев. – СПб. : Лань, 2010. – изд. 2-е, испр. и доп – 384 с. – Режим доступа : http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=251</i>
5	<i>Высшая математика для экономистов : учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; ред. Н.Ш. Кремер. – 3-е изд. – Москва : Юнити, 2015. – 482 с. : граф. – (Золотой фонд российских учебников). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114541</i>
6	<i>Ильин, В.А. Линейная алгебра : учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стереотип. – Москва : Физматлит, 2010. – 278 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974</i>

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

№ п/п	Источник
9	<i>Каталог ЗНБ ВГУ. – URL: https://lib.vsu.ru/</i>
10	<i>ЭБС «Консультант студента»</i>
11	<i>ЭБС «Университетская библиотека online»</i>
12	<i>ЭБС «Лань»</i>
13	<i>Евростат. – URL: https://ec.europa.eu/eurostat</i>

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	<i>Файлы с заданиями для домашней работы</i>
2	<i>Методические указания для самостоятельной работы студентов по курсу «Линейная алгебра» [Электронный ресурс] : для студ. 1 курса экон. фак. По направлениям «Экономика» и «Экон. Безопасность» / Воронеж. гос. ун-т ; [сост. : В.В. Давнис и др.] .— Электрон. текстовые дан. (1 файл : Кб). — Воронеж, 2015. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интрасети ВГУ. — Текстовый файл. — Widows 2000 ; Adobe Acrobat Reader. — <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-279.pdf>.</i>

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы

Программное обеспечение:

WinPro 8 RUS Upgrd OLP NL Acdmc,

OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc,

WinSvrStd 2012 RUS OLP NL Acdmc 2Proc,

Неисключительные права на ПО Dr. Web Enterprise Security Suite Комплексная защита Dr. Web Desktop Security Suite

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель, проектор, ноутбук, экран

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
---------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------

	посредством формирования знаний, умений, навыков)		
ОПК-2: способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач	Знать: основные теоретические положения линейной алгебры в рамках изучаемых разделов, применяемые в экономике.	1.1 Матрицы. 1.2 Определители. 1.3 Обратная матрица. Ранг матрицы. 1.4 Общий вид и свойства системы линейных уравнений. 1.5 Метод Крамера. Метод Гаусса. 1.6 Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. 1.8 Векторное пространство. 1.9 Линейная зависимость векторов. Базис и ранг системы векторов. 1.10 Линейные операторы. 1.11 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. 1.12-1.13 Квадратичные формы	Теоретический опрос №1 Теоретический опрос №2
	Уметь: – решать практические задачи методами линейной алгебры в рамках изучаемых разделов; – анализировать информацию, необходимую для решения поставленной экономической задачи инструментами линейной алгебры.	2.1 Матрицы. 2.2 Определители. 2.3 Обратная матрица. Ранг матрицы. 2.4 Общий вид и свойства системы линейных уравнений. 2.5 Метод Крамера. Метод Гаусса. 2.6 Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. 2.8 Векторное пространство. 2.9 Линейная зависимость векторов. Базис и ранг системы векторов. 2.10 Линейные операторы. 2.11 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. 2.12-2.13 Квадратичные формы	Контрольная работа №1 Контрольная работа №2

	<p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; - навыками обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; - навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов. 	<p>1.1 (2.1) Матрицы. 1.4 (2.4) Общий вид и свойства системы линейных уравнений. 1.5 (2.5) Метод Крамера. Метод Гаусса. 1.6 (2.6) Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. 1.11 (2.11) Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.</p>	<p>Практические задания</p>
<p>ОПК-3: способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы</p>	<p>Знать: особенности и области применения линейной алгебры для решения профессиональных задач.</p>	<p>1.7. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева. 1.12-1.13 Линейная модель торговли. 1.14-1.15 Элементы аналитической геометрии.</p>	<p>Теоретический опрос №1 Теоретический опрос №2</p>
	<p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - анализировать информацию, необходимую для решения поставленной экономической задачи инструментами линейной алгебры; - применять методы линейной алгебры для решения профессиональных задач. 	<p>2.8. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева. 2.12 Линейная модель торговли. 2.14-2.15 Элементы аналитической геометрии.</p>	<p>Контрольная работа №2 Контрольная работа №3</p>
	<p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; - навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов. 	<p>1.7. (2.8) Модель многоотраслевой экономики Леонтьева. 1.12-1.13 (2.12) Линейная модель торговли. 1.14-1.15 (2.14-2.15) Элементы аналитической геометрии.</p>	<p>Практические задания</p>
<p>ПК-4: способностью на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно</p>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - основы математических методов моделирования экономических систем; - особенности и области применения линейной алгебры для решения профессиональных задач 	<p>1.16. Элементы выпуклого анализа. 1.17. Классификация задач и моделей математического программирования. 1.18. Начальные сведения о методах оптимизации. Теория двойственности</p>	<p>Опрос</p>

интерпретировать полученные результаты.	Уметь: применять методы линейной алгебры для решения профессиональных задач.	2.16. Элементы выпуклого анализа. 2.17. Классификация задач и моделей математического программирования. 2.18. Начальные сведения о методах оптимизации. Теория двойственности.	Практические задания
	Владеть: – навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; – навыками обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов	1.16. (2.16) Элементы выпуклого анализа. 1.17 (2.17). Задачи математического программирования. 1.18 (2.18). Методы оптимизации.	Практические задания
Промежуточная аттестация: экзамен			КИМ

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):

1. Знание основных понятий и методов линейной алгебры.
2. Умение выполнять операции с матрицами, вычислять определитель, находить обратную матрицу, находить ранг матрицы, решать системы линейных уравнений методами Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса, находить общее и базисное решения систем линейных уравнений, фундаментальной системы решений системы линейных уравнений, вычислять необходимый объем валового выпуска по отраслям (модель Леонтьева), определять образуют ли векторы базис, выполнять разложение вектора по векторам базиса, определять являются ли векторы линейно зависимыми (независимыми), находить собственные значения и собственные векторы линейного оператора, находить соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли, находить квадратичную форму, соответствующую матрице, приводить к каноническому виду квадратичную форму, исследовать на знакоопределенность квадратичную форму, решать экономические задачи методами аналитической геометрии и выпуклого анализа, решать основные задачи математического программирования.
3. Умение применять теоретические знания и методы линейной алгебры для решения практических задач.
4. Умение анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.
5. Владение навыками применения математического инструментария для решения экономических задач.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-х балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Полное соответствие ответа всем из перечисленных критериев. Обучающийся в полной мере владеет теоретическими основами линейной алгебры, умеет применять методы линейной алгебры к решению практических задач. Возможны некоторые неточности при ответе на вопросы, вычислительные ошибки при решении практических задач.</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Полное соответствие ответа по крайней мере четырем из перечисленных критериев. Обучающийся владеет теоретическими основами линейной алгебры, умеет применять методы линейной алгебры к решению практических задач, но допускает отдельные несущественные ошибки.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<i>Полное соответствие ответа по крайней мере трем из перечисленных критериев. Обучающийся частично владеет теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен решать практические задачи, допускает несколько существенных ошибок в ответе.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
<i>Соответствие ответа менее трех из перечисленных критериев. Обучающийся не владеет теоретическими основами дисциплины, демонстрирует отрывочные знания, не способен решать практические задачи, допускает множественные существенные ошибки в ответе.</i>	<i>-</i>	<i>Неудовлетворительно</i>

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:

1. Определение матрицы. Квадратная матрица. Диагональная матрица. Единичная матрица. Нулевая матрица. Равные матрицы. Симметрические матрицы.
2. Действия с матрицами. Свойства операций суммирования матриц и произведения матрицы на число. Свойства произведения матриц.
3. Определитель матрицы. Свойства определителя.
4. Миноры и алгебраические дополнения. Правило Лапласа.
5. Определение операции транспонирования матрицы, свойства.
6. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы. Два способа нахождения обратной матрицы (с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований).
7. Общий вид и свойства системы линейных уравнений. Совместная (несовместная) система линейных уравнений. Определенная (неопределенная) система линейных уравнений. Расширенная матрица системы.
8. Ранг матрицы. Элементарные преобразования, сохраняющие ранг матрицы.
9. Линейная зависимость (независимость) строк матрицы. Линейная комбинация.
10. Формулы Крамера.
11. Метод Гаусса.
12. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли.
13. Система линейных однородных уравнений.
14. Фундаментальная система решений системы линейных уравнений.

15. Модель Леонтьева. Балансовые соотношения.
16. Понятие n -мерного вектора. Векторное пространство. Равные векторы. Нулевой вектор.
17. Операции над векторами. Свойства.
18. Линейное векторное пространство.
19. Скалярное произведение векторов.
20. Линейная зависимость векторов. Линейная комбинация векторов. Свойства. Геометрический смысл.
21. Базис и ранг системы векторов.
22. Представление вектора в произвольном базисе.
23. Разложение вектора в ортогональном базисе.
24. Оператор линейного преобразования.
25. Линейные операторы.
26. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Свойства.
27. Диагональная форма линейного оператора.
28. Квадратичные формы.
29. Преобразование квадратичных форм.
30. Канонический и нормальный вид квадратичных форм.
31. Критерий знакоопределенности квадратичной формы.
32. Линейная модель обмена.
33. Линии первого порядка.
34. Эллипс.
35. Гипербола.
36. Парабола.
37. Общее уравнение линии второго порядка.
38. Уравнение поверхности и линии.
39. Плоскость в пространстве.
40. Прямая в пространстве.
41. Взаимное расположение прямой и плоскости.
42. Эллипсоид.
43. Гиперболоид.
44. Выпуклые множества в пространстве R^n . Полупространства, выпуклые многогранные области.
45. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.
46. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Геометрические примеры крайних (угловых) точек.
47. Базисные и небазисные компоненты крайней точки.
48. Алгебраическая характеристика крайней точки полиэдра (многогранника).
49. Выпуклая оболочка системы точек в R^n .
50. Линейное, нелинейное, выпуклое, невыпуклое, целочисленное, частично – целочисленное, стохастическое и динамическое программирование.
51. Модель транспортной задачи.
52. Модель планирования производства на предприятии.
53. Модель задачи о диете.
54. Линейная модель обмена.
55. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.
56. Математическая постановка задачи линейного программирования. Общая, стандартная и каноническая задача линейного программирования.
57. Приведение задачи линейного программирования к каноническому виду.
58. Запись задачи линейного программирования в матричном виде.
59. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных.
60. Графический метод решения.
61. Решение задач линейного программирования методом перебора вершин.
62. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.
63. Алгоритм симплекс-метода.

64. Нахождение исходного допустимого базиса.
 65. Метод искусственного базиса.
 66. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности.

Пример контрольно-измерительного материала

УТВЕРЖДАЮ
 заведующая кафедрой международной экономики и внешнеэкономической деятельности
 _____ Е.В. Ендовицкая

 подпись _____ 201_ г.

Направление подготовки 38.03.01 «Экономика»
 Дисциплина Линейная алгебра
 Курс 1
 Форма обучения очная
 Вид аттестации промежуточная
 Вид контроля экзамен

Контрольно-измерительный материал №1.

1. Найдите значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Найдите число линейно независимых строк матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найдите определитель матрицы $B = A \cdot A'$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
4. Решите систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$.
5. Запишите квадратичную форму, соответствующую матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Укажите верное соответствие между различными видами уравнения прямой и их формой записи:

<ol style="list-style-type: none"> 1. $y - y_1 = k(x - x_1)$ 2. $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ 3. $y = kx + b$ 4. $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 5. $Ax + By + Cz + D = 0$ 6. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 	<ol style="list-style-type: none"> a. уравнение прямой в отрезках b. уравнение прямой с угловым коэффициентом c. общее уравнение прямой d. уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ e. уравнение прямой, проходящей через две заданные точки на плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

7. Предприятие выпускает три вида продукции, используя два вида сырья, нормы расходов сырья на единицу продукции задаются матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого вида сырья выражается матрицей $P = (2, 3)$, выпуск товаров задается матрицей $N' = (1 \ 1 \ 2)$. Определите денежные расходы предприятия на осуществление выпуска товаров.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Даны вершины треугольника $A(7, 9)$, $B(2, -3)$, $C(3, 6)$. Найти точку D пересечения биссектрисы AD со стороной BC .

19.3.2 Перечень практических заданий

1. Выполнять операции над матрицами.
2. Вычислять определители (метод треугольника, правило Лапласа).
3. Находить обратную матрицу (2 способа).
4. Находить ранг матрицы.
5. Решить матричное уравнение.
6. Решать систему уравнений, методом Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса.
7. Находить базисные решения системы линейных уравнений.
8. Находить фундаментальную систему решений системы линейных уравнений.
9. Выяснить продуктивна ли матрица.
10. Вычислять необходимый объем валового выпуска по отраслям (модель Леонтьева).
11. Определять образуют ли векторы базис.
12. Разложить вектор по векторам базиса.
13. Выяснять являются ли векторы линейно зависимыми (независимыми).
14. Проверить является ли оператор линейным.
15. Находить матрицу оператора в новом базисе.
16. Находить собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
17. Находить соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.
18. Находить квадратичную форму, соответствующую матрице.
19. Приводить к каноническому виду квадратичную форму.
20. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму.
21. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от данной точки и от данной прямой.
22. Даны вершины треугольника. Составить уравнение медианы и высоты, проведенной из вершины данного угла; уравнение биссектрисы данного внутреннего угла.
23. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку.
24. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно плоскости, проходящей через три данные точки.
25. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок данной прямой, отсекаемый данной гиперболой.
26. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы расходы сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия, ден.ед.	30	40	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделий *B* надо выпустить не менее, чем изделий *A*.

27. Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. ед. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден. ед. и содержит: 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов. Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не менее 16 ед.

28. На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт. в сутки		Затраты на работу линий, ден. ед. в сутки		План, шт.
	1	2	1	2	
<i>A</i>	4	3	400	300	50
<i>B</i>	6	5	100	200	40
<i>C</i>	8	2	300	400	50

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

19.3.3 Перечень вопросов для письменного теоретического опроса

Теоретический опрос №1. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений.

1. Определение матрицы.
2. Определение квадратной матрицы.
3. Свойства операций суммирования матриц.
4. Найти те произведения матриц AB и BA , которые существуют, объяснить

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5. Определение операции транспонирование матрицы, свойства.
6. Определение определителя второго порядка.
7. Свойства определителя.
8. Вычислить определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Определение минора элемента матрицы.
10. Вычислить алгебраическое дополнение выделенного элемента в пункте 8.
11. Определение обратной матрицы.
12. Определение совместной системы линейных уравнений.
13. Определение определенной системы линейных уравнений.
14. Определение ранга матрицы.
15. Правило Крамера.
16. Что означает линейная зависимость строк матрицы.
17. Определение системы линейных однородных уравнений.
18. Уравнение линейного межотраслевого баланса.
19. Соотношение баланса.

Теоретический опрос №2. Векторы. Квадратичные формы.

1. Что такое скалярная величина.
2. Определение коллинеарных векторов. Условие коллинеарности.
3. Длина вектора.

4. Определение суммы векторов (аналитически, графически).
5. Определение скалярного произведения векторов.
6. Формула для определения угла между векторами.
7. Закончите предложение: « n -мерное векторное пространство является линейным так как...».
8. Определение евклидова линейного векторного пространства.
9. Определение линейной комбинации векторов.
10. Определение линейно-независимой системы векторов.
11. Геометрический смысл линейной зависимости в случае двумерных векторов.
12. Определение ранга системы векторов.
13. Теорема о базисе системы векторов.
14. Определение линейного отображения.
15. Связь между вектором и его образом в векторной форме.
16. Определение собственного значения матрицы.
17. Характеристическое уравнение оператора.
18. Критерий Сильвестра.

Теоретические опросы проводятся в письменной форме.

Для оценивания результатов используется 4-х балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Правильные ответы $\geq 90\%$	Повышенный уровень	Отлично
Правильные ответы от 75% до 90%	Базовый уровень	Хорошо
Правильные ответы от 60% до 75%	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Правильные ответы $< 60\%$	-	Неудовлетворительно

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа №1. Матрицы. Определители.

1. Два различных по качеству вида масла продаются в трех магазинах. Матрица A задает объемы продаж этих продуктов в магазинах в первом квартале, матрица B - во втором квартале (тыс. руб.). Определить: 1) объем продаж за полугодие, 2) прирост продаж во втором квартале по сравнению первым

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Найти матрицу C^{-1} , обратную к матрице $C = AB^{-1} + 2E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ -3 & -10 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

4. Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 2 & -8 & -11 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

5. Предприятие производит три типа продукции, используя два вида ресурсов. Норма затрат ресурсов i -го вида на производство единицы продукции j -го типа задана матрицей затрат A , выпуск продукции за квартал – матрицей X , стоимость единицы каждого вида ресурса задана матрицей P . Найти: 1) Матрицу S полных затрат ресурсов каждого вида; 2) полную стоимость всех затраченных ресурсов.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Контрольная работа №2. Система линейных уравнений.

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Методом Гаусса решить систему уравнений, заданную в матричной форме: $AX=B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Дана матрица полных затрат $S = \begin{pmatrix} 1,125 & 0,125 \\ 0,125 & 1,125 \end{pmatrix}$ и вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix}$

Найти компоненты x_1, x_2 вектора валового выпуска $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа №3. Векторы. Квадратичные формы.

1. Выяснить являются ли линейно зависимыми векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$: $\bar{a}_1 = (1, 4, 6)$, $\bar{a}_2 = (1, -1, 1)$, $\bar{a}_3 = (1, 1, 3)$.

2. Даны четыре вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ и \bar{b} в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора \bar{b} в этом базисе: $\bar{a}_1 = (4, 5, 2)$, $\bar{a}_2 = (3, 0, 1)$, $\bar{a}_3 = (-1, 4, 2)$, $\bar{b} = (5, 7, 8)$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора \tilde{A} (матрицы A).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$. Выяснить, является ли она знакоопределенной.

5. Выяснить, в каком отношении должны быть национальные доходы трех стран для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Контрольные работы проводятся в письменной форме.

Для оценивания результатов используется 4-х балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Правильно решено 5 заданий, возможны некоторые неточности.</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Правильно решено 4 задания, возможны некоторые неточности.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<i>Правильно решено 3 задания, возможны некоторые неточности.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
<i>Правильно решено менее 3 заданий, допущены грубые ошибки.</i>	-	<i>Неудовлетворительно</i>

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в формах: письменного теоретического опроса, контрольной работы. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практические задания, позволяющие оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.