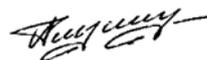


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей



А.В. Глушко
03.07.2018

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.02 Метод Фурье

Код и наименование дисциплины в соответствии с Учебным планом

1. Шифр и наименование направления подготовки / специальности:
01.05.01 Фундаментальная математика и механика
2. Профиль подготовки / специализация/магистерская программа: Теория функций и приложения
3. Квалификация (степень) выпускника: специалист
4. Форма обучения: Очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей
6. Составители программы: Ткачева С.А., канд. физ.-мат. наук, доцент
7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета. Протокол № 0500-07 от 03.07.2018
(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: 2020/2021

Семестры 6

9. Цели и задачи учебной дисциплины: Целью курса является изучение основ метода решения задач для уравнений с частными производными с помощью их разложений в ряды по собственным функциям. Данный метод известен под названиями «Метод разделения переменных» или «Метод Фурье» Практическая часть курса предполагает освоение методов решения задач для уравнений с частными производными различных типов с помощью их разложения в ряды Фурье.

Задачами изучения дисциплины выступает приобретение в рамках освоения теоретического и практического материала по дисциплине

Знаний

- нахождения собственных функций и собственных значений дифференциальных операторов;
- нахождения решений изучаемых задач в виде функциональных рядов, умение оценивать сходимость рядов;
- основных классических задач для уравнений с частными производными и способов их решений;

Умений:

- применять основных методов исследования решений начальных и начально-краевых задач для уравнений с частными производными
- применять методы математического моделирования при изучении реальных процессов и объектов физической природы с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля;
- применять полученные знания при решении конкретных задач математического физики.

Навыков:

- культуры математического мышления, логической и алгоритмической культурой;
- математики как универсальным языком науки, средством моделирования явлений и процессов;
- применения фундаментальных математических знаний и творческих навыков для быстрой адаптации к новым задачам, возникающим в процессе развития вычислительной техники и математических методов.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: (блок Б1, базовая или вариативная часть, к которой относится дисциплина; требования к входным знаниям, умениям и навыкам; дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей)

Курс входит в математический и естественно научный цикл (В) вариативная часть обязательные дисциплины обучения.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, уравнения математической физики, теоретическая механика.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, теорией функций комплексной переменной, элементами линейной алгебры, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Знание методов изучения решений начальных и начально-краевых задач для уравнений с частными производными является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов. Кроме того, уравнения с частными производными и задачи для них являются отдельным современным динамически развивающимся разделом математической науки.

Дисциплина является предшествующей для курсов методов вычислений, механики сплошной среды, математического моделирования, концепций современного естествознания, всех специальных курсов, изучающих задачи математической физики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОК-5	свободным владением литературным и деловым русским	Знать: основные современные проблемы в области математики и механики

	языком, навыками публичных выступлений, умением создавать и редактировать профессиональные тексты, владением одним из иностранных языков	Уметь: создавать и редактировать профессиональные тексты Владеть: литературным и деловым русским языком, навыками публичных выступлений, одним из иностранных языков
ОК-12	способностью самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности	Знать: методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний Уметь: самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности Владеть: навыками самоконтроля для приобретения новых знаний
ОК-14	владением основными методами и средствами получения, хранения, обработки информации, наличием навыков работы с компьютером	Знать: методы и средства получения, хранения, обработки информации Уметь: самостоятельно изучать новые методы решения задач с использованием современных образовательных и информационных технологий Владеть: основными методами и средствами получения, хранения, обработки информации, навыками работы с компьютером
ПК-1	владением методами физического, математического и алгоритмического моделирования при анализе научных и технических проблем на основе глубоких знаний фундаментальных математических дисциплин и компьютерных наук	Знать: основы математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, основные понятия и методы решения начальных и начально-краевых задач для уравнений математической физики Уметь: применять на практике метод Фурье решения задач, в общем виде выполнять математическую постановку прикладных задач, производить выбор решения Владеть: навыками практического использования базовых знаний
ПК-6	способностью к самостоятельному анализу поставленной задачи, выбору корректного метода ее решения, построению алгоритма, реализации его на электронно-вычислительной машине (ЭВМ), обработке и анализу полученной информации и представлению результатов	Знать: возможности применения метода Фурье к решению начальных и начально-краевых задач для уравнений с частными производными, корректные методы решения задач для уравнений с частными производными, построению алгоритма решения, реализации его на электронно-вычислительной машине (ЭВМ), обработке и анализу полученной информации и представлению результатов Уметь: применять методы решений на практике Владеть: навыками научного анализа процессов, навыками практического использования электронно-вычислительных машин (ЭВМ)
ПК-7	способностью и нацеленностью на самостоятельный анализ физических аспектов в классических постановках математических задач и задач механики	Знать: естественнонаучную сущность проблем математики, проблемы возникновения новых математических моделей физической природы Уметь: создавать и исследовать новые математические аспекты в классических постановках математических задач и задач механики Владеть: способностью и нацеленностью на самостоятельный анализ физических аспектов в классических постановках математических задач и задач механики
ПК-9	умением ориентироваться в современных методах и алгоритмах	Знать: определения, термины, метод разделения переменных (метод Фурье) при решении задач

	компьютерной математики, совершенствовать их, углублять и развивать математическую теорию и физико-механические модели, лежащие в их основе	математической физики Уметь: развивать математическую теорию и физико-механические модели, лежащие в их основе самостоятельно Владеть: современными методами и алгоритмами компьютерной математики, совершенствовать их, углублять и развивать математическую теорию и физико-механические модели, лежащие в их основе
ПК-10	способностью к собственному видению прикладного аспекта в строгих математических формулировках	Знать: области применения метода Фурье в задачах математической физики Уметь: самостоятельно анализировать математические модели физических процессов Владеть: навыками собственного видения прикладного аспекта в строгих математических формулировках
ПК-14	владением методами физического и математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе глубоких знаний фундаментальных физико-математических дисциплин, теории эксперимента и компьютерных наук	Знать: метод Фурье построения решения моделей задач для уравнений с частными производными и задач математической физики Уметь: самостоятельно анализировать математические модели физических процессов Владеть: методами физического и математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе глубоких знаний фундаментальных физико-математических дисциплин, теории эксперимента и компьютерных наук
ПК-19	умением извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, специализированных сайтов форумов в сети Интернет, реферативных журналов	Знать: навыки практического использования электронно-вычислительных машин (ЭВМ) Уметь: извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, специализированных сайтов форумов в сети Интернет, реферативных журналов Владеть: методами физического и математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе глубоких знаний фундаментальных физико-математических дисциплин, теории эксперимента и компьютерных наук

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах (в соответствии с учебным планом) — 72 / 2.

Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) Зачет

13. Виды учебной работы

Виды учебной работы	Трудоемкость				
	Всего	По семестрам			
		6 семестр	№ семестра	№ семестра	№ семестра
Аудиторные занятия	32	32			
В том числе:					
лекции	16	16			
практические	16	16			
лабораторные	-	-			
Самостоятельная работа	40	40			
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час./экзамен – ____ час.)					

Итого:	72	72			
--------	----	----	--	--	--

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Собственные значения и собственные функции. Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Построение частных решений и решения начально-краевой задачи.
1.2	Ортонормированные системы функций	Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве H . Свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Лемма (о полноте) для ортонормированной системы функций
1.3	Обоснование метода Фурье	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны.
1.4	Общая схема метода Фурье	Постановка задачи. Разделение переменных. Лемма о линейно независимых собственных функциях. Лемма об ортогональности собственных функций с весом. Лемма о неотрицательности собственных значений. Построение формального решения.
1.5	Метод Фурье для уравнения вынужденных колебаний струны	Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах. Вынужденные колебания струны с подвижными концами.
1.6	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности	Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями. Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями. Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями.
1.7	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа	Оператор Лапласа в полярных координатах. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге на плоскости.
2. Практические работы		
2.1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Нахождение собственных значений и собственных функций. Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Построение частных решений и решения начально-краевой задачи.
2.2	Ортонормированные системы функций	Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве H . Свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Лемма (о полноте) для ортонормированной системы функций
2.3	Обоснование метода Фурье	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны.
2.4	Общая схема метода Фурье	Постановка задачи. Разделение переменных. Лемма о линейно независимых собственных функциях. Лемма об ортогональности собственных функций с весом. Лемма о неотрицательности собственных значений. Построение формального решения.
2.5	Метод Фурье для уравнения вынужденных колебаний	Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах. Вынужденные колебания струны с подвижными концами.

	струны	
2.6	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности	Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями.
		Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями.
		Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями.
2.7	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа	Оператор Лапласа в полярных координатах.
		Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге на плоскости.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	2	2		6	10
2	Ортонормированные системы функций	2	2		4	8
3	Обоснование метода Фурье	2	2		4	8
4	Общая схема метода Фурье	4	4		8	16
5	Метод Фурье для уравнения вынужденных колебаний	2	2		6	10
6	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности	2	2		6	10
7	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа	2	2		6	10
	Итого:	16	16		40	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. Практические занятия реализуются в соответствии с рабочим учебным планом при последовательном изучении дисциплины.

Для обеспечения систематической и регулярной работы по изучению дисциплины и успешного прохождения текущих и промежуточных аттестационных испытаний студенту рекомендуется:

- выполнять все виды работ, предусмотренных рабочим учебным планом по дисциплине;
- выполнять домашние задания. Выполнение домашних заданий направлено на отработку навыков решения задач по разделам учебной программы. При выполнении задания необходимо привести развернутые пояснения выполнения задания, проанализировать полученные результаты. При необходимости обучающиеся имеют возможность задать вопросы преподавателю и разрешить возникшие трудности.

- посещать аудиторные лекционные и практические занятия;
- сдать контрольные работы по изученным темам.

При подготовке и сдачи практических работ рекомендуется использование учебной литературы, дополнительных файлов с теоретическим материалом по изучаемым темам (Можно

ознакомиться на сайте кафедры). По всем темам представляются распечатанные материалы, которые используются в работе, как в аудитории, так и при выполнении домашних заданий. В связи с тем, что активность обучающегося на лабораторных занятиях является предметом контроля его продвижения в освоении курса, то подготовка к таким занятиям требует ответственного отношения.

Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке и самостоятельной работе.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
01	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
02	Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М : Физматлит, 2003. – 398 с.
03	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов. – М : Физматлит, 2003. – 286 с.
04	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.
05	Глушко В.П. Курс уравнений математической физики с использованием пакета Mathematica. Теория и технология решения задач : учеб. пособие / В.П. Глушко, А.В. Глушко. – СПб : Лань, 2010. – 320 с. илл. (+CD).

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
06	http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
07	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
08	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

(учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

Самостоятельная работа обучающегося направлена на самостоятельное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины. Самостоятельная работа является обязательной для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Самостоятельная работа с учебниками, учебно-методическими материалами, научной, справочной литературой, ресурсами сети Internet является наиболее эффективным методом получения знаний.

№ п/п	Источник
01	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.
02	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов. – М : Физматлит, 2003. – 286 с.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

1. <http://www.kuchp.ru> – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания

2. <http://eqworld.ipmnet.ru> – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

(при использовании лабораторного оборудования указывать полный перечень, при большом количестве оборудования можно вывести данный раздел в приложение к рабочей программе)

19. Фонд оценочных средств

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ОК-5: свободным владением литературным и деловым русским языком, навыками публичных выступлений, умением создавать и редактировать профессиональные тексты, владением одним из иностранных языков	Знать: основные современные проблемы в области математики и механики Уметь: создавать и редактировать профессиональные тексты Владеть: литературным и деловым русским языком, навыками публичных выступлений, одним из иностранных языков	Темы 1-7	Комплект КИМ № 1
ОК-12: способностью самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности	Знать: методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний Уметь: самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности Владеть: навыками самоконтроля для приобретения новых знаний	Темы 1-7	Комплект КИМ № 1
ОК-14: владением основными методами и средствами получения, хранения, обработки информации, наличием навыков работы с компьютером	Знать: методы и средства получения, хранения, обработки информации Уметь: самостоятельно изучать новые методы решения задач с использованием современных образовательных и информационных технологий Владеть: основными методами и средствами получения, хранения, обработки	Темы 1-7	Комплект КИМ № 1

	информации, навыками работы с компьютером		
ПК-1: владением методами физического, математического и алгоритмического моделирования при анализе научных и технических проблем на основе глубоких знаний фундаментальных математических дисциплин и компьютерных наук	<p>Знать: основы математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, основные понятия и методы решения начальных и начально-краевых задач для уравнений математической физики</p> <p>Уметь: применять на практике метод Фурье решения задач, в общем виде выполнять математическую постановку прикладных задач, производить выбор решения</p> <p>Владеть: навыками практического использования базовых знаний</p>	Тема 1-7	Комплект заданий для контрольной работы
ПК-6: способностью к самостоятельному анализу поставленной задачи, выбору корректного метода ее решения, построению алгоритма, реализации его на электронно-вычислительной машине (ЭВМ), обработке и анализу полученной информации и представлению результатов	<p>Знать: возможности применения метода Фурье к решению начальных и начально-краевых задач для уравнений с частными производными, корректные методы решения задач для уравнений с частными производными, построению алгоритма решения, реализации его на электронно-вычислительной машине (ЭВМ), обработке и анализу полученной информации и представлению результатов</p> <p>Уметь: применять методы решений на практике</p> <p>Владеть: навыками научного анализа процессов, навыками практического использования электронно-вычислительных машин (ЭВМ)</p>	Тема 1-7	Комплект заданий для контрольной работы
ПК-7: способностью и нацеленностью на самостоятельный анализ физических аспектов в классических постановках математических задач и задач механики	<p>Знать: естественнонаучную сущность проблем математики, проблемы возникновения новых математических моделей физической природы</p> <p>Уметь: создавать и исследовать новые математические аспекты в классических постановках математических задач и задач механики</p> <p>Владеть: способностью и нацеленностью на самостоятельный анализ физических аспектов в классических постановках</p>	Тема 1-7	Комплект заданий для контрольной работы

	математических задач и задач механики		
ПК-9: умением ориентироваться в современных методах и алгоритмах компьютерной математики, совершенствовать их, углублять и развивать математическую теорию и физико-механические модели, лежащие в их основе	Знать: определения, термины, метод разделения переменных (метод Фурье) при решении задач математической физики Уметь: развивать математическую теорию и физико-механические модели, лежащие в их основе самостоятельно Владеть: современными методами и алгоритмами компьютерной математики, совершенствовать их, углублять и развивать математическую теорию и физико-механические модели, лежащие в их основе	Тема 1-7	Комплект заданий для контрольной работы
ПК-10: способностью к собственному видению прикладного аспекта в строгих математических формулировках	Знать: области применения метода Фурье в задачах математической физики Уметь: самостоятельно анализировать математические модели физических процессов Владеть: навыками собственного видения прикладного аспекта в строгих математических формулировках	Тема 1-7	Комплект заданий для контрольной работы
ПК-14: владением методами физического и математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе глубоких знаний фундаментальных физико-математических дисциплин, теории эксперимента и компьютерных наук	Знать: метод Фурье построения решения моделей задач для уравнений с частными производными и задач математической физики Уметь: самостоятельно анализировать математические модели физических процессов Владеть: методами физического и математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе глубоких знаний фундаментальных физико-математических дисциплин, теории эксперимента и компьютерных наук	Тема 1-7	Комплект КИМ № 1
ПК-19: умением извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, специализированных сайтов форумов в сети Интернет, реферативных журналов	Знать: навыки практического использования электронно-вычислительных машин (ЭВМ) Уметь: извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, специализированных сайтов форумов в сети Интернет, реферативных журналов Владеть: методами физического и математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе	Тема 1-7	Комплект КИМ № 1

	глубоких знаний фундаментальных физико-математических дисциплин, теории эксперимента и компьютерных наук	
Промежуточная аттестация Зачет		Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации (Комплект КИМ № 1)

19.2. Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Оценка «зачтено» выставляется в любом из трех случаев: 1. Активная работа в ходе семестра, удовлетворительное написание контрольной работы и сдача на положительную оценку заданий зачетной работы. 2. Верный ответ на не менее двух (из трех) заданий зачетной работы при отсутствии штрафных баллов за систематические пропуски. 3. Верный ответ на не менее двух (из трех) заданий зачетной работы и все дополнительные вопросы, выясняющие знания студента, пропустившего значительное количество занятий.	Базовый	Зачтено
оценка «незачтено» выставляется студенту, если его знания не удовлетворяют вышеприведенным требованиям на положительные оценки.	-	Не зачтено

19.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к зачету:

Перечень вопросов к зачету
Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Разделение переменных. Собственные значения и собственные функции.
Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Построение частных решений и решения начально-краевой задачи.
Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве H . Минимизирующее свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
Лемма (о полноте) для ортонормированной системы в гильбертовом пространстве H .
Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны.
Постановка задачи. Разделение переменных. Лемма о линейно независимых собственных функциях.
Лемма об ортогональности собственных функций с весом $\rho(x)$.
Лемма о неотрицательности собственных значений.

Построение формального решения.
Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах.
Вынужденные колебания струны с подвижными концами.
Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями.
Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями.
Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями.
Представление оператора Лапласа в полярных координатах.
Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге на плоскости.

19.3.2 Перечень практических заданий

Уравнения гиперболического типа

1. Изучить вынужденные поперечные колебания струны, закрепленной на конце $x=0$ и подверженной на конце $x=l$ действию возмущающей гармонической силы, равное $A \sin \omega t$.
2. Изучить продольные колебания однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила $F = A \sin \omega t$, направление которой совпадает с осью стержня.
3. Однородная струна длины l , закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, колеблется под действием внешней гармонической силы $F(x,t) = \rho f(x) \sin \omega t$, рассчитанной на единицу длины. Найти отклонение $u(x,t)$ струны при произвольных начальных условиях. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

4. Решить уравнение

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad (0 < x < l)$$

$$u(0,t) = t \quad u(x,0) = 0$$

$$u(l,t) = 0 \quad u_t(x,0) = 1 - x$$

5. Решить уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + u \quad (0 < x < l)$$

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = 0$$

$$u(l,t) = t \quad u'_t(x,0) = \frac{x}{l}$$

6. Решить уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \operatorname{sh} x$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = 0$$

$$u(l,t) = 0 \quad u_t(x,0) = 0$$

7. Решить уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + bx(x-l)$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = 0$$

$$u(l,t) = 0 \quad u_t(x,0) = 0$$

8. Решить уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + x(x-l)t^2$$

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = 0$$

$$u(l,t) = 0 \quad u_t(x,0) = 0$$

9. Решить уравнение

$$u_{xx} - a^2 u_{tt} - 2hu_t - b^2 u = 0$$

при условиях

$$u(0,t) = A \quad u(x,0) = 0$$

$$u(l,t) = 0 \quad u_t(x,0) = 0$$

10. Решить следующую смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + x, \quad (0 < x < \pi)$$

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = \sin 2x$$

$$u(\pi,t) = 0 \quad u_t(x,0) = 0$$

11. Решить уравнение

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1 \quad (0 < x < 1)$$

при условиях

$$u(0,t) = 0 \quad u(x,0) = 0$$

$$u(1,t) = 0 \quad u_t(x,0) = 0$$

12. Решить следующие смешанные задачи

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$$u_x(0,t) = 2t \quad u(x,0) = \cos x$$

$$u(\frac{\pi}{2}, t) = \pi t \quad u_t(x,0) = 2x$$

Уравнения параболического типа

1. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

А. Концы стержня $x=0$ и $x=l$ поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u(x,0) = u_0(x)$

Рассмотреть случаи, когда : а) $u_0(x) = A = const$, б) $u_0(x) = x(l-x)$

В. Конец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конце $x=l$ происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, начальная температура стержня $u(x,0) = u_0(x)$.

С. На обоих концах стержня ($x=0$ и $x=l$) происходит теплообмен с окружающей средой, а начальная температура стержня $u(x,0) = u_0(x)$.

2. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

А. Концы стержня $x=0$ и $x=l$ поддерживаются при постоянных температурах $u(0,t) = u_1$, $u(l,t) = u_2$, а начальная температура равна $u(x,0) = u_0(x) = const$.

В. Концы стержня имеют постоянную температуру $u(0,t) = u_1$, $u(l,t) = 0$, а начальная температура задается формулой $u(x,0) = x(l-x)$.

С. Левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u(l, t) = u_2$, начальная температура стержня $u(x, 0) = \frac{x}{l}$.

3. Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце $x = l$ поддерживается температура, равная нулю, а на левом конце температура равна $u(0, t) = At$, где $A = const$. Начальная температура стержня равна нулю.

Решить следующие смешанные задачи:

$$4. \quad u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1)$$

$$u_x(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = x^2 - 1$$

$$5. \quad u_{xx} = u_t + u \quad (0 < x < l)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad u(x, 0) = 1$$

$$6. \quad u_t = u_{xx} - 4u \quad (0 < x < \pi)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad u(x, 0) = x^2 - \pi x$$

$$7. \quad u_t = u_{xx} \quad (0 < x < l)$$

$$u_x(0, t) = 1 \quad u(x, 0) = 0$$

$$u(l, t) = 0$$

В полуполосе ($0 < x < l$) для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ решить смешанные задачи со следующими условиями:

$$8. \quad u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = Ax, \quad A = const$$

$$9. \quad u(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$10. \quad u_x(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = A(l - x), \quad A = const$$

Решить следующие смешанные задачи:

$$11. \quad u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$$u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \quad u(x, 0) = 0$$

$$12. \quad u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$$u(0, t) = 0 \quad u(x, 0) = x$$

$$u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 1$$

Уравнения эллиптического типа

1. Решить уравнение Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = -4$ для круга радиуса a с центром в начале координат при краевом условии $u|_{r=a} = 0$.

2. Найти решение уравнения Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = -Axy$ в круге радиуса R с центром в точке $(0, 0)$ при краевом условии $u|_{r=R} = 0$.

3. Решить уравнение Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = -12(x^2 - y^2)$ в кольце $a \leq r \leq b$, если $u|_{r=a} = 0$, $u_r|_{r=b} = 0$.

4. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = \sin^3 \varphi$.

5. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = \cos^4 \varphi$.
6. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi$.
7. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что $u_r|_{r=R} = A \cos 2\varphi$.
8. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что $u_r|_{r=R} = \sin^3 \varphi$.
9. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что $u|_{r=1} = u_1 = \text{const}$
 $u|_{r=2} = u_2 = \text{const}$.
10. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что $u|_{r=1} = 1 + \cos^2 \varphi$
 $u|_{r=2} = \sin^2 \varphi$.
11. Найти решение уравнения $u_{xx} + u_{yy} = A$ в кольце $R_1 < r < R_2$, если $u|_{r=R_1} = u_1$, $u|_{r=R_2} = u_2$ (A , u_1 , u_2 – заданные числа).

19.3.3 Тестовые задания

Контрольно-измерительный материал № 1

1. В результате решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & x \in [0;l], t > 0, \\ u(0,t) = 0, & \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), & \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), & x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases} \end{array}$$

2. Является ли число $\lambda = 0$ собственным значением задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases}$$

а) да, б) нет.

3. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & x \in [0;l], t > 0, \\ u(0,t) = 0, & \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), & \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), & x \in [0;l]. \end{cases}$$

Пусть функции $X_k(x)$, где $k = 1, 2, \dots$, являются собственными функциями задачи

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$ сходится и дважды дифференцируем, тогда он всегда будет

- а) удовлетворять только дифференциальному уравнению,
- б) удовлетворять только граничным условиям,
- в) удовлетворять только начальным условиям,
- г) удовлетворять дифференциальному уравнению и граничным условиям,
- д) удовлетворять дифференциальному уравнению и начальным условиям,
- е) удовлетворять начальным и граничным условиям,
- ж) являться решением задачи.

19.3.4. Перечень заданий для контрольных работ

Вариант 1

Задание 1. Решить задачу

$$\begin{aligned}
 u_{tt} + u_t &= u_{xx} \quad (0 < x < 1) \\
 u(0, t) &= t & u(x, 0) &= 0 \\
 u(1, t) &= 0 & u_t(x, 0) &= 1 - x
 \end{aligned}$$

Задание 2. Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце $x = l$ поддерживается температура, равная нулю, а на левом конце температура равна $u(0, t) = At$, где $A = const$. Начальная температура стержня равна нулю.

Задание 3. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = \sin^3 \varphi$.

19.3.5. Темы курсовых работ

19.3.6 Темы рефератов

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующих формирование компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций. Текущая аттестация проводится в форме выполнения контрольной работы.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практические задания, позволяющие оценить степень сформированности умений и навыков. Критерии оценивания приведены выше.