

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
цифровых технологий



С.Д.Кургалин  
30.06.2018 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.Б.21 УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

02.03.01 Математика и компьютерные науки

**2. Профиль подготовки/специализация:** для всех профилей

**3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** цифровых технологий

**6. Составители программы:** Крыловецкий Александр Абрамович, кандидат физико-математических наук, доцент

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом факультета компьютерных наук (протокол № 6 от 25.06.2018)

**8. Учебный год:** 2019-2020

**Семестр(ы):** 4

**9. Цели и задачи учебной дисциплины:** фундаментальная подготовка в области уравнений в частных производных; овладение аналитическими методами математической физики; овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** дисциплина относится к базовой части блока Б1. Для успешного освоения дисциплины необходимо предварительное изучение курса математического анализа и дифференциальных уравнений.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.	<p>знать: классификацию уравнений в частных производных, метод разделения переменных и метод функций источника решения краевых задач;</p> <p>уметь: правильно классифицировать краевую задачу и выбирать методы решения;</p> <p>владеть: навыками самостоятельного выбора методов для решения различных задач профессиональной деятельности.</p>
ПК-2	Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знать постановок классических задач математики.	<p>знать: постановку классических задач математической физики;</p> <p>уметь: применять полученные знания для постановки новых задач в области математической физики;</p> <p>владеть: навыками реализации в пакете программ символьной математики методов решения уравнений в частных производных.</p>
ПК-5	Способность использовать методы математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач.	<p>знать: методы математического и алгоритмического моделирования в области математической физики;</p> <p>уметь: выбирать и адаптировать существующие численные методы для решения задач математической физики;</p> <p>владеть: навыками выбора и адаптации существующих методов решения задач математической физики.</p>

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 4/144.**

**Форма промежуточной аттестации:** 4 семестр – экзамен

### 13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		4 сем.
Аудиторные занятия	66	66
в том числе:		
лекции	34	34
практические	16	16
лабораторные	16	16
Самостоятельная работа	42	42
Экзамен	36	36
Итого:	144	144

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
1.1	Введение	Введение.
1.2	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными.
1.3	Уравнения гиперболического типа	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Метод распространяющихся волн. Метод разделения переменных. Задачи с данными на характеристиках. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа.
1.4	Уравнения параболического типа	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Метод разделения переменных. Задачи на бесконечной прямой. Задачи без начальных условий. Свойства дельта-функции
1.5	Уравнения эллиптического типа	Задачи, приводящие к уравнению Лапласа. Общие свойства гармонических функций. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных. Функция источника. Теория потенциала. Функции влияния точечных источников. Задачи математической теории дифракции.
<b>2. Лабораторные занятия</b>		
2.1	Введение	Введение.
2.2	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными.
2.3	Уравнения гиперболического типа	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Метод распространяющихся волн. Метод разделения переменных. Задачи с данными на характеристиках. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа.
2.4	Уравнения параболического типа	Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Метод разделения переменных. Задачи на бесконечной прямой. Задачи без начальных условий. Свойства дельта-функции
2.5	Уравнения эллиптического типа	Задачи, приводящие к уравнению Лапласа. Общие свойства гармонических функций. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных. Функция источника. Теория потенциала. Функции влияния точечных источников. Задачи математической теории дифракции.

## 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Введение	2	0	0	6	8
2	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	6	2	2	6	16
3	Уравнения гиперболического типа	10	5	5	10	30
4	Уравнения параболического типа	8	5	5	10	28
5	Уравнения эллиптического типа	8	4	4	10	26
	Итого:	34	16	16	42	108

## 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:

- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- методические указания и пособия;
- контрольные задания для закрепления теоретического материала;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Форма организации самостоятельной работы: подготовка к аудиторным занятиям; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов, К. Б. Уравнения математической физики : учебник / К. Б. Сабитов. — Москва : Физматлит, 2013. — 352 с. — <URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=275562&amp;sr=1">http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=275562&amp;sr=1</a> >.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Крыловецкий, А.А. Компьютерный практикум по уравнениям математической физики : учебное пособие для вузов / А.А. Крыловецкий, А.В. Флегель ; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2009. — 62 с.
3	Владимиров, В.С. Уравнения математической физики: учебник для студ. вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — Изд. 2-е, стер. — М.: Физматлит, 2008. — 398 с.
4	Емельянов, В.М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.М. Емельянов, Е.А. Рыбакина. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2008. — 214 с. — Режим доступа: <a href="http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=140">http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=140</a>
5	Конспект лекций по уравнениям математической физики для студентов IT-направлений [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. фак. компьютер. наук 2 и 3 к. днев. отд-ния, обуч. по направлениям: 010200 "Математика и компьютерные науки", 230400 "Информ. системы и технологии, 231000 "Програм. инженерия"] / Воронеж. гос. ун-т ; сост.: А.А. Крыловецкий, Т.А. Крыловецкая. — Электрон. текстовые. дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интрасети ВГУ. — Текстовый файл. — Windows 2000; Adobe Acrobat Reader. — URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m14-72.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m14-72.pdf</a>

6	Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики : учебник для студ. физ.-мат. специальностей ун-тов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. — 7-е изд. — М.: Изд-во Моск. ун-та : Наука, 2004. — 798 с.
7	Бицадзе, А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики : учебное пособие для студ. мех.-мат. и физ. спец. вузов. — М.: Наука, 1977. — 222 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
8	<a href="http://www.lib.vsu.ru">www.lib.vsu.ru</a> –ЗНБ ВГУ

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Крыловецкий, А.А. Компьютерный практикум по уравнениям математической физики : учебное пособие для вузов / А.А. Крыловецкий, А.В. Флегель ; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2009. — 62 с.
2	Конспект лекций по уравнениям математической физики для студентов IT-направлений [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. фак. компьютер. наук 2 и 3 к. днев. отд-ния, обуч. по направлениям: 010200 "Математика и компьютерные науки", 230400 "Информ. системы и технологии, 231000 "Програм. инженерия"] / Воронеж. гос. ун-т ; сост.: А.А. Крыловецкий , Т.А. Крыловецкая. — Электрон. текстовые. дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интрасети ВГУ. — Текстовый файл. — Windows 2000; Adobe Acrobat Reader. — URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m14-72.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m14-72.pdf</a>

**17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)** — программы Maple, Mathematica.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** лекционная аудитория, оснащённая мультимедийным проектором, компьютерный класс с необходимым программным обеспечением.

**19. Фонд оценочных средств:**

**19.1 Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения**

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС (средства оценивания)
ПК-1	Знать: классификацию уравнений в частных производных, метод разделения переменных и метод функций источника решения краевых задач.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4
	Уметь: правильно классифицировать краевую задачу и выбирать методы решения.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
	Владеть: навыками самостоятельного выбора методов для решения различных задач профессиональной деятельности.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4

ПК-2	Знать: постановку классических задач математической физики.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4
	Уметь: применять полученные знания для постановки новых задач в области математической физики.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
	Владеть: навыками реализации в пакете программ символьной математики методов решения уравнений в частных производных.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
ПК-5	Знать: методы математического и алгоритмического моделирования в области математической физики.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4
	Уметь: выбирать и адаптировать существующие численные методы для решения задач математической физики.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
	Владеть: навыками выбора и адаптации существующих методов решения задач математической физики.	Разделы 1-5	Контрольные работы 1-4 Лабораторные работы 1-4
<b>Промежуточная аттестация</b>			КИМ

## 19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание классификации уравнений в частных производных, метода разделения переменных и метода функций источника решения краевых задач;
- 2) знание постановок классических задач математической физики;
- 3) знание методов математического и алгоритмического моделирования в области математической физики;
- 4) умение правильно классифицировать краевую задачу и выбирать методы решения;
- 5) умение применять полученные знания для постановки новых задач в области математической физики;
- 6) умение выбирать и адаптировать существующие численные методы для решения задач математической физики;
- 7) владение навыками самостоятельного выбора методов для решения различных задач профессиональной деятельности;
- 8) владение навыками реализации в пакете программ символьной математики методов решения уравнений в частных производных;
- 9) владение навыками выбора и адаптации существующих методов решения задач математической физики.

Для оценивания результатов обучения на экзамене и на зачёте с оценкой используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Обучающийся демонстрирует высокий уровень владения материалом, ориентируется в предметной области, верно отвечает на все дополнительные вопросы.	Повышенный уровень	Отлично
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному или двум из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Допускаются ошибки при воспроизведении части теоретических положений.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Сформированные	Пороговый уровень	Удовлетворительно

знания основных понятий, определений и теорем, изучаемых в курсе, не всегда полное их понимание с затруднениями при воспроизведении.		
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым четырём из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе.	–	Неудовлетворительно

### **19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

#### **19.3.1 Перечень вопросов к экзамену**

##### **Раздел 1. Введение.**

1. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных второго порядка.
2. Линейное уравнение с частными производными второго порядка и его общее решение.

##### **Раздел 2. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными.**

1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Характеристики линейного уравнения второго порядка. Уравнение характеристик.

##### **Раздел 3. Уравнения гиперболического типа.**

1. Уравнение поперечных колебаний струны.
2. Уравнение колебаний упругого стержня.
3. Уравнение поперечных колебаний мембраны.
4. Задача Коши для уравнения струны, формула Даламбера.
5. Ограниченная струна. Метод Фурье.
6. Задача Штурма-Лиувилля.
7. Метод Фурье для задачи о колебаниях прямоугольной мембраны.
8. Метод Фурье для задачи о колебаниях круглой мембраны.

##### **Раздел 4. Уравнения параболического типа.**

1. Линейная задача о распространении тепла.
2. Граничные и начальные условия для уравнения теплопроводности.
3. Уравнение диффузии.
4. Решение задачи о теплопроводности для бесконечного стержня с помощью преобразования Фурье.
5. Решение однородной задачи теплопроводности для конечного отрезка.
6. Решение неоднородной задачи теплопроводности для конечного отрезка методом функции источника.

##### **Раздел 5. Уравнения эллиптического типа.**

1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа.
2. Частные решения уравнения Лапласа.
3. Общие свойства гармонических функций.
4. Краевые задачи для уравнения Лапласа.
5. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных.

### 19.3.2 Перечень заданий для контрольных работ

#### Контрольная работа № 1

##### Вариант 1

**Задание 1 (3 балла).** Определите тип уравнения

$$27u_{xx} - 18u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_y - 9 = 0.$$

**Задание 2 (4 балла).** Определите тип уравнения

$$35u_y - 48u_{yy} - 11u_{xx} + \sin(x) = 0.$$

**Задание 3 (5 баллов).** Определите тип уравнения при  $x > 1$

$$2 \cos(y)u_{xx} - 2xu_{xy} + \sin(y)u_{yy} + \sin(x)u_x + 7 = 0.$$

**Задание 4 (8 баллов).** Найдите общее решение уравнения

$$u_{xx} = xy.$$

**Задание 5 (10 баллов).** Найдите общее решение уравнения

$$u_{xy} = \sin(x) + \sin(y).$$

**Задание 6 (20 баллов).** Приведите уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + 9 = 0.$$

##### Вариант 2

**Задание 1 (3 балла).** Определите тип уравнения

$$-9u_{xx} + 20u_{xy} - 12u_{yy} - 11u_x + 2u = 0.$$

**Задание 2 (4 балла).** Определите тип уравнения

$$2u_x + 5u_{yy} - 18u_{xy} + 3e^{-x}u = 0.$$

**Задание 3 (5 баллов).** Определите тип уравнения при  $y > 0$

$$y^2 \sin^2(x)u_{xx} + 4y \cos(x)u_{xy} - 4u_{yy} + 2yu_x = 5.$$

**Задание 4 (8 баллов).** Найдите общее решение уравнения

$$u_{xy} = x + y^2.$$

**Задание 5 (10 баллов).** Найдите общее решение уравнения

$$u_{yy} = 2 \sin(x) + e^{-y}.$$

**Задание 6 (20 баллов).** Приведите уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_y - u = 0.$$

#### Контрольная работа № 2

##### Вариант 1

**Задание 1 (20 баллов).** Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 16u_{tt} = 0, x \in [0, 4],$$

$$u(0, t) = 0, u_x(4, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{5\pi}{8}x\right), u_t(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right).$$

**Задание 2 (30 баллов).** Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 4u_{tt} = 0, x \in [0, 2],$$

$$u(0, t) = 0, u(2, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 2x, u_t(x, 0) = 0.$$

##### Вариант 2

**Задание 1 (20 баллов).** Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 9u_{tt} = 0, x \in [0, 2],$$

$$u_x(0, t) = 0, u(2, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 5 \cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right), u_t(x, 0) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right).$$

**Задание 2 (30 баллов).** Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 25u_{tt} = 0, x \in [0, 3],$$

$$u(0, t) = 0, u(3, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x.$$

### Контрольная работа № 3

#### Вариант 1

**Задание 1 (20 баллов).** Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - u_t = 2xe^{-t}, x \in [0, 1],$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0.$$

**Задание 2 (30 баллов).** Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 4u_t = 4x - 12t^2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{-2t}, x \in [0, 3];$$

$$u(0, t) = t^3, u_x(3, t) = 1 - t;$$

$$u(x, 0) = x.$$

#### Вариант 2

**Задание 1 (20 баллов).** Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - 9u_t = 5xt, x \in [0, 2],$$

$$u(0, t) = 0, u(2, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0.$$

**Задание 2 (30 баллов).** Решите задачу методом разделения переменных

$$u_{xx} - u_t = -2t + 2xe^{-t} + 7t \sin\left(\frac{3\pi}{10}x\right), x \in [0, 5];$$

$$u(0, t) = t^2 + 1, u_x(5, t) = 2e^{-t};$$

$$u(x, 0) = 2x + 1.$$

### 19.3.3 Перечень заданий для лабораторных работ

#### 1. Задания для решения на компьютере к разделам 1 и 2.

**Задание 1 (12 баллов).** Привести уравнения к каноническому виду

- 1)  $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0;$
- 2)  $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0;$
- 3)  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0;$
- 4)  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0;$
- 5)  $7y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0;$

$$6) y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0.$$

**Задание 2 (6 баллов).** Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

$$(\ell + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0.$$

и исследовать их зависимость от  $\ell$ , где  $\ell$  – числовой параметр.

**Задание 3 (12 баллов).** Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется

- 1)  $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ ;
- 2)  $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ ;
- 3)  $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$ ;
- 4)  $\sin^2(x)u_{xx} - 2y \sin(x)u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ .

**Задание 4 (8 баллов).** Найти общее решение уравнений с постоянными коэффициентами

- 1)  $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$ ;
- 2)  $u_{xx} + u_{xy} = \sin(xy)$ ;
- 3)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u = 0$ ;
- 4)  $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$ .

**Задание 5 (12 баллов).** Найти общее решение уравнений с переменными коэффициентами

- 1)  $u_{xx} - 2 \sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$ ;
- 2)  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0$ ;
- 3)  $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$ ;
- 4)  $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} - 4y^2 u_x = 0$ .

## 2. Задания для решения на компьютере к разделу 3.

Выполнение заданий 1-8 предполагает использование стандартных функций программного пакета символьной математики для нахождения численного решения краевой задачи и его графическое изображение. Задания 9-19 требуется решить методом разделения переменных (методом Фурье). Во всех заданиях, если иное не оговорено отдельно, все начальные условия предполагаются однородными.

**Задание 1 (2 балла).** Решить однородное уравнение поперечных колебаний струны с закрепленными концами для случая возбуждения точечным ударом

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 100, & x = 1/4, \\ 0, & x \neq 1/4. \end{cases}$$

**Задание 2 (2 балла).** Решить неоднородное уравнение поперечных колебаний струны с закрепленными концами для случая возбуждения ударом прямоугольного молоточка

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 10, & 0,3 \leq x \leq 0,35, \\ 0, & 0 \leq x < 0,3 \text{ или } 0,35 < x \leq 1, \end{cases}$$

и точечной постоянной неоднородности

$$f(x) = \begin{cases} 10, & x = 0,7, \\ 0, & x \neq 0,7. \end{cases}$$

**Задание 3 (2 балла).** Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальная скорость всех точек струны равна нулю.

**Задание 4 (3 балла).** К струне  $0 \leq x \leq 2$  с жестко закрепленными концами с момента времени  $t = 0$  приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью  $f(x, t) = \sin(2\pi x) \sin(\omega t)$ . Найти колебания струны в среде без сопротивления; исследовать возможность резонанса (линейного по времени роста амплитуды колебаний).

**Задание 5 (3 балла).** Решить предыдущую задачу, предполагая, что колебания происходят в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости.

**Задание 6 (2 балла).** Найти колебания струны  $0 \leq x \leq 1$  с жестко закрепленными концами, если к точке  $x = 1/3$  этой струны с момента времени  $t = 0$  приложена сила  $f(t) = \cos(\omega t)$ .

**Задание 7 (2 балла).** Найти колебания струны  $0 \leq x \leq 1$  с жестко закрепленными концами под действием силы, приложенной с момента  $t = 0$  и имеющей плотность  $f(x, t) = t \sin(\pi x), 0 \leq t < +\infty$ , предполагая, что внешняя среда не оказывает сопротивления колебаниям.

**Задание 8 (2 балла).** Решить предыдущую задачу, считая действие силы ограниченным по времени

$$f(x, t) = \begin{cases} t \sin(\pi x), & t \leq 10, \\ 0, & t > 10. \end{cases}$$

Найти установившиеся колебания для  $t > 10$ .

**Задание 9 (2 балла).** Найти формальное решение уравнения малых продольных колебаний однородного упругого стержня длины  $L$ . В начальный момент времени стержень сжат на величину  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll L$ ). Начальная скорость точек стержня равна нулю.

**Задание 10 (2 балла).** Решить предыдущую задачу, если дополнительно к начальному сжатию одному из концов стержня мгновенно сообщается импульс  $P$ .

**Задание 11 (2 балла).** Найти продольные колебания стержня, один конец которого ( $x = 0$ ) закреплен жестко, а другой ( $x = L$ ) свободен, при начальных условиях  $u(x, 0) = kx$ ,  $u_t(x, 0) = 0$  при  $0 \leq x \leq L$ .

**Задание 12 (4 балла).** Найти колебания упругого стержня со свободными концами, получившего в начальный момент времени продольный импульс  $P$  в один из концов.

**Задание 13 (4 балла).** Найти продольные колебания стержня  $0 \leq x \leq L$  в среде без сопротивления, если конец  $x = 0$  стержня закреплен жестко, а к концу  $x = L$ , начиная с момента времени  $t = 0$ , приложена сила  $f(t) = A \sin(\omega t), 0 \leq t < +\infty$ .

**Задание 14 (4 балла).** Решить предыдущую задачу для силы  $f(t) = At, 0 \leq t < +\infty$ ,  $A = \text{const}$ .

**Задание 15 (2 балла).** Решить однородное уравнение малых поперечных колебаний квадратной мембраны

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = 4x(1-x) \sin^5 y \sin(1-y), \quad u_t(x, y, 0) = 0,$$

и однородными граничными условиями.

**Задание 16 (2 балла).** Решить однородное уравнение малых поперечных колебаний квадратной мембраны, закрепленной по краям и возбуждаемой точечным мгновенным ударом

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \delta(x - 1/2)\delta(y - 1/2).$$

**Задание 17 (3 балла).** Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны  $0 \leq x \leq L_1$ ,  $0 \leq y \leq L_2$  с закрепленными краями. Колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране и перпендикулярной к её поверхности силой  $f(t) = \sin \omega t$ ,  $0 \leq t < +\infty$ .

**Задание 18 (3 балла).** Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны  $0 \leq x \leq L_1$ ,  $0 \leq y \leq L_2$  с закрепленными краями. Колебания вызваны сосредоточенной поперечной силой  $f(t) = \sin \omega t$ ,  $0 \leq t < +\infty$ , приложенной к точке  $(x_0, y_0)$ ,  $0 < x_0 < L_1$ ,  $0 < y_0 < L_2$ .

**Задание 19 (4 балла).** Найти установившиеся колебания прямоугольной мембраны  $0 \leq x \leq L_1$ ,  $0 \leq y \leq L_2$  с закрепленными краями в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, под действием непрерывно распределенной по мембране и перпендикулярной к её поверхности силы  $f(t) = \sin \omega t$ ,  $0 \leq t < +\infty$ .

### 3. Задания для решения на компьютере к разделу 4.

Задания 1-6 необходимо решить методом преобразования Фурье. Для выполнения заданий 7-9 применяется метод функции источника.

**Задание 1 (2 балла).** Решить уравнение теплопроводности для неограниченного одномерного стержня с заданным начальным условием

$$u(x, 0) = \theta(x+1) - \theta(x-1),$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

**Задание 2 (2 балла).** Решить уравнение теплопроводности для неограниченного одномерного стержня с заданным начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

**Задание 3 (4 балла).** Применяя интегральное синусное преобразование Фурье решить однородное уравнение теплопроводности для полубесконечного одномерного стержня

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

с начальным условием  $u(x, 0) = \varphi(x)$  и однородным краевым условием  $u(0, t) = 0$ .

**Задание 4 (4 балла).** Решить предыдущую задачу для  $u(x,0) = e^{-x^2}$ .

**Задание 5 (4 балла).** Применяя интегральное преобразование Фурье решить неоднородное уравнение теплопроводности для бесконечного одномерного стержня

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty \leq x < +\infty, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

с начальным условием  $u(x,0) = 0$ .

**Задание 6 (5 баллов).** Решить предыдущую задачу для полубесконечного стержня  $0 \leq x < +\infty$  с нулевыми начальным  $u(x,0) = 0$  и граничным  $u(0,t) = 0$  условиями.

**Задание 7 (9 баллов).** Решить неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \leq x \leq L,$$

с однородным начальным  $u(x,0) = 0$  и граничным условием  $u(L,t) = 0$  и заданной функцией неоднородности:

1)  $f(x,t) = x[\theta(x) - \theta(x-1)]te^{-t}$  ( $\theta(x)$  – функция Хевисайда);

2)  $f(x,t) = \sin(2\pi x)[\theta(x) - \theta(x-0,5)]te^{-t}$ ;

3)  $f(x,t) = x \sin(\pi x)[\theta(x) - \theta(x-1)]$ .

**Задание 8 (10 баллов).** Решить неоднородное уравнение теплопроводности теплоизолированного стержня

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \leq x \leq L,$$

с начальным условием  $u(x,0) = 0$ .

**Задание 9 (10 баллов).** Решить неоднородное уравнение теплопроводности теплоизолированного стержня  $0 \leq x \leq L$ , левый конец которого теплоизолирован, а правый конец поддерживается при постоянной нулевой температуре. Функция неоднородности:

$$f(x,t) = x[\theta(x) - \theta(x-1)]te^{-t}.$$

Начальное распределение температур  $u(x,0) = 0$ .

#### **19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в формах: письменного опроса и контрольных работ. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования, а также в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе контроля знаний на факультете компьютерных наук ВГУ.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.