

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и операторных уравнений

Каменский М.И.

подпись, расшифровка подписи

26.06.2018 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.В.ДВ.10.01 Элементы нелинейного функционального анализа

**1. Код и наименование направления подготовки / специальности:** 02.03.01

математика и компьютерные науки.

**2. Профиль подготовки / специализации:** математическое и компьютерное моделирование

**3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений

**6. Составители программы:** Сапронова Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, tsapr@mail.ru

**7. Рекомендована:** НМС математического факультета, протокол №0500-07 от 30.07.2018 г.

**8. Учебный год:** 2018–2019

**Семестр(ы):** седьмой

**9. Цели и задачи учебной дисциплины:** изучение основ дифференциального исчисления в банаховых пространствах, элементов дифференциальной топологии и теории Морса.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** дисциплина относится к естественнонаучному циклу и является дисциплиной по выбору вариативной части данного цикла.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса «Элементы нелинейного функционального анализа»:

- математический анализ (производная и дифференциал функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные);
- функциональный анализ (метрические и линейные пространства, непрерывные отображения, норма, линейный ограниченный оператор, изоморфизм);
- дифференциальная геометрия и топология (топологические пространства, гомеоморфизм);
- линейная алгебра (матрицы, определители).

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	способность к определению общих форм и закономерностей предметной области	уметь: определять закономерности предметной области
ПК-2	способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	знать: постановки классических задач математики уметь: математически корректно ставить естественнонаучные задачи
ПК-3	способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	уметь: строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах (в соответствии с учебным планом) — 3/108.**

**Форма промежуточной аттестации — экзамен.**

**13. Виды учебной работы**

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)			
	Всего	В том числе интерактивные часы	По семестрам	
			сем. 7	сем. 8
Аудиторные занятия	50		50	
в том числе:				
лекции	34		34	
практические	16		16	
лабораторные	0		0	
Самостоятельная работа	22		22	
Контроль	36		36	
Итого:	108		108	
Форма промежуточной аттестации	Экзамен + 1 контрольная		Экзамен + 1 контрольная	

	работа		работа	
--	--------	--	--------	--

### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
1.1	Дифференциальное исчисление в банаховых пространствах	Определение производной Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах. Теорема о производной Фреше композиции отображений. Определение дифференциала и производной Гато отображения, действующего в нормированных пространствах. Примеры. Связь между производной Фреше и производной Гато. Теорема о среднем (обобщение теоремы Лагранжа). Производные высших порядков. Определение гладкого отображения и диффеоморфизма. Примеры диффеоморфизмов. Теорема об обратном отображении.
1.2	Банаховы многообразия	Определение гладкого многообразия (карты, атлас, локальные координаты, функции перехода, $C^r$ – согласованность карт). Примеры. Гладкие функции на многообразии и их критические точки. Гладкие отображения многообразий.
1.3	Элементы теории Морса	Матрица Гессе гладкой функции нескольких переменных. невырожденные критические точки. Индекс Морса. Лемма Морса. Вычисление индекса.
<b>2. Практические занятия</b>		
2.1	Дифференциальное исчисление в банаховых пространствах	Определение производной Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах. Теорема о производной Фреше композиции отображений. Определение дифференциала и производной Гато отображения, действующего в нормированных пространствах. Примеры. Связь между производной Фреше и производной Гато. Теорема о среднем (обобщение теоремы Лагранжа). Производные высших порядков. Определение гладкого отображения и диффеоморфизма. Примеры диффеоморфизмов. Теорема об обратном отображении.
2.2	Банаховы многообразия	Определение гладкого многообразия (карты, атлас, локальные координаты, функции перехода, $C^r$ – согласованность карт). Примеры. Гладкие функции на многообразии и их критические точки. Гладкие отображения многообразий.
2.3	Элементы теории Морса	Матрица Гессе гладкой функции нескольких переменных. невырожденные критические точки. Индекс Морса. Лемма Морса. Вычисление индекса.

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)					Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Контроль	
1	Дифференциальное исчисление в банаховых пространствах	20	10	0	12	20	62
2	Банаховы многообразия	10	2	0	7	10	29
3	Элементы теории Морса	4	4	0	3	6	17
Итого:		34	16	0	22	36	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В ходе изучения курса предусмотрена самостоятельная работа (в виде выполнения домашних заданий), а также проведение коллоквиума (в форме индивидуального собеседования) и контрольной работы.

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – СПб.: Лань, 2009. – 272 с. (см. <a href="https://vk.com/nelinan">https://vk.com/nelinan</a> )
2	Васильев В.А. Топология для младшекурсников / В.А. Васильев. – М.: МЦНМО, 2014. – 160 с.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 572 с.
4	Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М.: Мир, 1971. – 392 с. (см. <a href="https://vk.com/nelinan">https://vk.com/nelinan</a> )
5	Борисович Ю.Г. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович [и др.] – М.: Наука, 1995. – 416 с.

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М.: Мир, 1971. – 392 с. (см. <a href="https://vk.com/nelinan">https://vk.com/nelinan</a> )
2	Борисович Ю.Г. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович [и др.] – М.: Наука, 1995. – 416 с.

**17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Лекционная аудитория, аудитории для лабораторных, компьютер, мультимедийный проектор, доска (мел, маркеры).

## 19. Фонд оценочных средств

### 19.1 Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-1 способность к определению общих форм и закономерностей предметной области	уметь: определять закономерности предметной области	Разделы 1–3	Комплект КИМ, контрольная работа
ПК-2 способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	знать: постановки классических задач математики уметь: математически корректно ставить естественнонаучные задачи	Разделы 1–3	Комплект КИМ, контрольная работа

ПК-3 способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	уметь: строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Разделы 1–3	Комплект КИМ, контрольная работа
<b>Промежуточная аттестация</b>			Комплект КИМ

\* В графе «ФОС» в обязательном порядке перечисляются оценочные средства текущей и промежуточной аттестаций.

## 19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), умеет доказывать теоремы, способен иллюстрировать ответ примерами и применять теоретические знания при решении задач.	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами и применять теоретические знания при решении задач, но допускает ошибки в доказательстве теорем.	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, но не умеет доказывать теоремы.	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
Обучающийся не владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины).	–	<i>Неудовлетворительно</i>

## 19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

### 19.3.1 Вопросы к экзамену

1	Нормированные пространства: определение, примеры. Определение банахова пространства.
2	Линейные ограниченные операторы: определение, примеры. Норма оператора. Связь ограниченности оператора с его непрерывностью.
3	Пространства со скалярным произведением: определение, примеры. Определение гильбертова пространства.
4	Определение производной Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах. Примеры (вычисления производных).
5	Теорема о производной Фреше композиции отображений (с доказательством).. Примеры.
6	Определение дифференциала и производной Гато отображения, действующего в нормированных пространствах. Примеры.
7	Связь между производной Фреше и производной Гато. Пример отображения, дифференцируемого по Гато, но не дифференцируемого по Фреше (в данной точке).
8	Теорема о дифференцируемости по Фреше отображения, имеющего непрерывную

	производную Гато (без док-ва).
9	Теорема о среднем (обобщение теоремы Лагранжа) (с доказательством).
10	Производные высших порядков отображения, действующего в банаховых пространствах.
11	Представление второй производной в виде билинейного отображения. Симметричность второй производной.
12	Производные высших порядков отображения как полилинейные отображения. Пример.
13	Определение гладкого отображения и диффеоморфизма. Примеры диффеоморфизмов.
14	Теорема об обратном отображении (о локальном диффеоморфизме) (без док-ва).
15	Определение топологического пространства. Примеры топологических пространств. Непрерывные отображения топологических пространств. Индуцированная топология.
16	Определение гладкого многообразия (карты, атлас, локальные координаты, функции перехода, $C^r$ – согласованность карт).
17	Различные способы введения структуры гладкого многообразия на окружности.
18	Различные способы введения структуры гладкого многообразия на двумерной сфере.
19	Структура гладкого многообразия на двумерном торе.
20	Гладкие функции на многообразии и их критические точки.
21	Гладкие отображения многообразий.
22	Матрица Гессе гладкой функции нескольких переменных. невырожденные критические точки. Индекс Морса. Лемма Морса (без док-ва). Вычисление индекса.

### 19.3.2 Комплект КИМ

#### Контрольно-измерительный материал № 1

1. Теорема о производной Фреше композиции отображений (с доказательством).  
Примеры.
2. Гладкие функции на многообразии и их критические точки.

#### Контрольно-измерительный материал № 2

1. Связь между производной Фреше и производной Гато. Пример отображения, дифференцируемого по Гато, но не дифференцируемого по Фреше (в данной точке).
2. Структура гладкого многообразия на двумерном торе.

#### Контрольно-измерительный материал № 3

1. Теорема о среднем (обобщение теоремы Лагранжа) (с доказательством).
2. Различные способы введения структуры гладкого многообразия на двумерной сфере.

#### Контрольно-измерительный материал № 4

1. Производные высших порядков отображения как полилинейные отображения.  
Пример.
2. Различные способы введения структуры гладкого многообразия на окружности.

#### Контрольно-измерительный материал № 5

1. Определение гладкого отображения и диффеоморфизма. Примеры диффеоморфизмов.
2. Гладкие отображения многообразий.

### 19.3.3 Комплект заданий для контрольной работы

#### Вариант 1

1. Найти матрицу производной Фреше отображения  $f \circ g$  в точке  $(1, -1)$ , если  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 2x_2x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1^3 \\ -y_1y_2 \\ y_2^2 - y_1^2 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите производную Фреше отображения  $f(X) = X^2$ ,  $f: L(E, F) \rightarrow L(E, F)$ .

#### Вариант 2

1. Найти матрицу производной Фреше отображения  $g \circ f$  в точке  $(1, 1, -1)$ , если  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1x_2x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 2y_1y_2 \\ y_2^3 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите производную Фреше функционала  $f(x) = \int_0^1 x^2(t) dt + x(0)$ , заданного на пространстве  $C[0, 1]$ .

### 19.4 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в формах: устного опроса (индивидуальный опрос на коллоквиуме); письменных работ (контрольные работы). Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний, или практические задания, позволяющие оценить степень сформированности умений, навыков и опыт деятельности.

При оценивании используются количественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.

