

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

теории функций и геометрии



Семенов Е.М.

31.08.2018г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.05.01 Ортогональные ряды

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки/специализация: Теория функций и приложения

3. Квалификация (степень) выпускника: Специалист

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

0503 теории функций и геометрии

6. Составители программы: Семенов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор

7. Рекомендована: НМС математического факультета ВГУ,
протокол № 0500-07 от 03.07.2018 г.

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: 2018/2019 уч.год

Семестр(ы): 5

9. Цели и задачи учебной дисциплины: Целью дисциплины является ознакомление студентов с основными теоремами, проблемами и методами теории ортогональных рядов, которая занимает одно из центральных мест в анализе. Ортогональные ряды широко используются в различных разделах анализа.

Задачи дисциплины:

- демонстрация на примерах математических понятий и методов сущности научного подхода, специфики математики, ее роли в развитии других наук;
- овладение студентами основными навыками применения ортогональных рядов в задачах анализа;
- выработка умений анализировать полученные результаты, решать типовые задачи, приобретение навыков работы со специальной математической литературой;
- формирование умений использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Специальный курс «Ортогональные ряды» относится к вариативной части математического цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВО) по специальности 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика» (специалитет).

Опирается на курсы: «Математический анализ», «Линейная алгебра» «Теория вероятностей» и помогает студентам решать конкретные задачи, возникающие в различных разделах анализа. Курс позволяет взглянуть с единой точки зрения на различные задачи анализа и теории вероятностей. Излагаются основные методы теории ортогональных рядов. Изучаются ортонормированные системы общего вида и важные конкретные системы, такие как системы Хаара, тригонометрическая система, система Радемахера.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-1	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, дискретной математики, теории вероятностей,	Знать: основные свойства ортогональных рядов Уметь: уметь находить коэффициенты Фурье Владеть (иметь навык(и)): основными методами теории ортогональных рядов и смежных вопросов анализа

	математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики, механики сплошной среды, теории управления и оптимизации в будущей профессиональной деятельности	
ОПК-3	способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	Знать: свойства ортогональных рядов Уметь раскладывать функции в ряды Фурье Владеть: аппаратом теории рядов Фурье
ПК-3	способностью создавать и исследовать новые математические модели явлений реального мира, сред, тел и конструкций	Знать: основы теории рядов Фурье Уметь: использовать разложения в ряды Фурье для решения конкретных задач анализа Владеть (иметь навык(и)): достаточными знаниями в теории рядов Фурье
ОК-7	способностью к самоорганизации и самообразованию	Знать: основные понятия, определения и свойства объектов теории рядов и интегралов Фурье, формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений в других областях математического знания. Уметь: оперировать с ортогональными рядами и интегралами Фурье во всех формах; выполнять преобразования Фурье Владеть: теоретическими и практическими навыками применения методов теории ортогональных рядов и интегралов Фурье в научно-исследовательской и прикладной деятельности.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 3/108.

Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) экзамен

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра	№ семестра	...
Аудиторные занятия	50	5		
в том числе: лекции	16	5		
практические				
лабораторные	34	5		

Самостоятельная работа	22	5		
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час. / экзамен – 4,20 час.)	0	5		
Контроль	36	5		
Итого:	108			

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.	Пространства l_p, l_∞, C_0 , вложения.	Ортогональные ряды изучаются в конкретных банаховых пространствах, прежде всего в пространствах l_p .
2.	Сепарабельность l_p .	Доказывается, что пространство l_p сепарабельно при $p < \infty$ и несепарабельно при $p = \infty$.
3.	Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в l_p .	Изучаются сопряженные к l_p пространства.
4.	Пространства L_∞ и L_p , вложения.	С помощью неравенства Гельдера изучается зависимость от p норма элемента в пространствах l_p .
5.	Сепарабельность L_p .	Доказывается, что пространство L_p сепарабельно при $p < \infty$ и несепарабельно при $p = \infty$.
6.	Подпространства и изоморфизм, подпространства L_p .	Изучается понятие изоморфизм пространств и рассматриваются конкретные примеры изоморфных и изометричных пространств.
7.	Дополняемые подпространства	Приводятся примеры дополняемых и недополняемых подпространств.
8.	Дополняемость в L_p подпространства, порожденного дизъюнктивной системой функций.	Доказывается, что любое подпространство порожденное дизъюнктивной системой функций дополняемо в L_p .
9.	Система Радемахера.	Вводится система Радемахера и доказывается, что эти функции образуют ортонормированную систему.
10.	Неравенство Хинчина (1).	Доказывается, что система Радемахера порождает в L_p подпространство изоморфное L_2 .
11.	Неравенство Хинчина (2).	Доказывается, что система Радемахера порождает в L_p подпространство изоморфное L_2 .
12.	Неравенство Хинчина в пространстве Орлича (1).	Приводится обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.
13.	Неравенство Хинчина в пространстве Орлича (2).	Приводится обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.
14.	Дополняемость в L_p подпространства, порожденного системой Радемахера.	Доказывается, что подпространство, порожденное системой Радемахера, дополняемо в L_p с помощью ортогонального проектора.
15.	Сходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд Радемахера сходится почти везде, если коэффициенты ряда принадлежат l_2 .
16.	Расходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд по системе Радемахера расходится почти везде, если коэффициенты ряда не принадлежат l_2 .
17.	Пространства Радемахера.	Свойства подпространства, порожденного системой Радемахера.
18.	Экстремальные свойства системы Радемахера.	Подробное изложение экстремальных свойств системы Радемахера.
2. Практические занятия		
3. Лабораторные работы		
1.	Пространства l_p, l_∞, C_0 , вложения.	Ортогональные ряды изучаются в конкретных банаховых пространствах, прежде всего в пространствах l_p .
2.	Сепарабельность l_p .	Доказывается, что пространство l_p сепарабельно при $p < \infty$

		и несепарабельно при $P = \infty$.
3.	Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в l_p .	Изучаются сопряженные к l_p пространства.
4.	Пространства L_∞ и L_p , вложения.	С помощью неравенства Гельдера изучается зависимость от p норма элемента в пространствах l_p .
5.	Сепарабельность L_p .	Доказывается, что пространство L_p сепарабельно при $P < \infty$ и несепарабельно при $P = \infty$.
6.	Подпространства и изоморфизм, подпространства L_p .	Изучается понятие изоморфизм пространств и рассматриваются конкретные примеры изоморфных и изометричных пространств.
7.	Дополняемые подпространства	Приводятся примеры дополняемых и недополняемых подпространств.
8.	Дополняемость в L_p подпространства, порожденного дизъюнктивной системой функций.	Доказывается, что любое подпространство порожденное дизъюнктивной системой функций дополняемо в L_p .
9.	Система Радемахера.	Вводится система Радемахера и доказывается, что эти функции образуют ортонормированную систему.
10.	Неравенство Хинчина (1).	Доказывается, что система Радемахера порождает в L_p подпространство изоморфное L_2 .
11.	Неравенство Хинчина (2).	Доказывается, что система Радемахера порождает в L_p подпространство изоморфное L_2 .
12.	Неравенство Хинчина в пространстве Орлича (1).	Приводится обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.
13.	Неравенство Хинчина в пространстве Орлича (2).	Приводится обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.
14.	Дополняемость в L_p подпространства, порожденного системой Радемахера.	Доказывается, что подпространство, порожденное системой Радемахера, дополняемо в L_p с помощью ортогонального проектора.
15.	Сходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд Радемахера сходится почти везде, если коэффициенты ряда принадлежат l_2 .
16.	Расходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд по системе Радемахера расходится почти везде, если коэффициенты ряда не принадлежат l_2 .
17.	Пространства Радемахера.	Свойства подпространства, порожденного системой Радемахера.
18.	Экстремальные свойства системы Радемахера.	Подробное изложение экстремальных свойств системы Радемахера.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Пространства последовательностей	6		12	5	23
2.	Пространства функций	6		12	5	23
3.	Свойства рядов Радемахера	4		10	12	26
	Итого:	16		34	22	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
-------	----------

1	<u>Гуревич, Александр Петрович</u> . Сборник задач по функциональному анализу / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов .— Москва : Лань, 2012 .— 192 с. - // Изд-во «Лань» : ЭБС. - <URL: http://e.lanbook.com
2	<u>Люстерник, Л. А.</u> Краткий курс функционального анализа [Текст] : .— Москва : Лань, 2009 .— 272 с. — // Изд-во «Лань» : ЭБС. - <URL: http://e.lanbook.com
3	<u>Дерр, Василий Яковлевич</u> . Функциональный анализ. Лекции и упражнения : учебное пособие для бакалавров : [для студ. вузов, обуч. по специальности высш. проф. образования 010101 "Математика" и направления подготовки высш. проф. образования "Математика", 010200 "Математика. Прикладная математика"] / В.Я. Дерр .— Москва : Юрайт, 2012 .— 463, [1] с. — (Бакалавр) .— Библиогр.: с.460-461.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
4	<u>Кашин, Борис Сергеевич</u> . Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян .— М. : Наука : Физматлит, 1984 .— 495 с.
5	<u>Бари, Нина Карловна</u> . Тригонометрические ряды / Н.К. Бари ; Под ред. П.Л. Ульянова .— М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961 .— 936 с.
6	<u>Треногин, Владилен Александрович</u> . Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с.
7	<u>Колмогоров, Андрей Николаевич</u> . Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2006 .— 570 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http // www.lib.vsu.ru/)
	Google, Yandex, Rambler

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1.	Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. – Новое изд. – М.: МЦНМО, 2017. – 336 с.: ил.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

При изучении дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения лекций и лабораторных занятий; учебные аудитории для проведения лекционных и лабораторных занятий;

осуществляется контроль посещаемости и выполнения всех видов самостоятельной работы. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому занятию.

19. Фонд оценочных средств:

Контрольно-измерительный материал № 6

1. СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА

- ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система $\{r_k(x)\}$. Введена Х. Радемахером [1]. Функции $r_k(x)$ можно определить равенствами

$$r_k(x) = \text{sign} \sin 2^k \pi x, \quad x \in [0, 1], \quad k = 1, 2, \dots$$

Другое определение функций Радемахера $r_k(x)$ получается путем рассмотрения двоичных разложений чисел отрезка $[0,1]$: если в двоичном разложении числа x на k -м месте стоит цифра 0, то полагают $r_k(x) = 1$, если же на k -м месте стоит 1, то $r_k(x) = -1$; в случае же, когда $x=0$ или число x допускает два разложения, полагают $r_k(x) = 0$. Согласно этому определению отрезок $[0,1]$ распадается на 2^k равных подинтервала, в каждом из которых функция $r_k(x)$ принимает попеременно значения $+1$ и -1 , а на концах подинтервалов $r_k(x) = 0$.

Система $\{r_k(x)\}$ представляет типичный пример стохастически независимых функций и имеет применения как в теории вероятностей, так и в теории ортогональных рядов.

Одно из важных свойств Р. с. устанавливается теоремой Радемахера: если $\sum c_k^2 < +\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ сходится почти всюду на $[0,1]$, и теоремой Хинчина-Колмогорова: если $\sum c_k^2 = +\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ расходится почти всюду на $[0,1]$.

Так как функции Радемахера в двоично иррациональных точках интервала $[0,1]$ принимают лишь значения ± 1 , то рассмотрение ряда $\sum c_n r_n(x)$ означает, что у членов ряда $\sum c_n$ выбирается распределение знаков ± 1 , зависящее от точки x . Если $x=0$, $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ - представление числа $x \in [0,1]$ в виде бесконечной двоичной дроби, то при $a_n=0$ перед c_n ставится знак $+$ и при $a_n=1$ ставится знак $-$.

Вышеприведенные теоремы в терминах теории вероятностей означают, что если $\sum c_n^2 < +\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$ сходится для почти всех распределений знаков (сходится с вероятностью 1), и если $\sum c_n^2 = +\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$ расходится для почти всех распределений знаков (расходится с вероятностью 1).

Наоборот, ряд теорем теории вероятностей можно сформулировать в терминах функций Радемахера. Напр., теорема Кантелли о том, что при игре "в герб и решетку" со ставкой 1 средний выигрыш с вероятностью 1 стремится к нулю, означает, что почти всюду на $[0,1]$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k(x) = 0$$

2. МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

- одна из основных характеристик непрерывных функций. Н. м. непрерывной на отрезке функции $f(x)$ определяется как

$$\omega(\delta, f) = \max_{|h| < \delta} \max_x |f(x+h) - f(x)|.$$

Определение Н. м. введено А. Лебегом (A. Lebesgue) в 1910, хотя по существу понятие было известно и ранее. Если Н. м. функции $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta, f) \leq M\delta^\alpha,$$

где $0 < \alpha \leq 1$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет Липшица условию порядка α . Для того чтобы неотрицательная функция $\omega(\delta)$ была Н. м. нек-рой непрерывной функции, необходимо и: достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами: $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta)$ не убывает, $\omega(\delta)$ непрерывна, $\omega(\delta + \eta) \leq \omega(\delta) + \omega(\eta)$, $\delta, \eta > 0$. Рассматриваются также Н. м. высших порядков

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leq \delta} \max_x |\Delta_h^k f(x)|,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(x+ih)$$

- конечная разность k -го порядка функции $f(x)$, и Н. м. в произвольных пространствах функций, напр, интегральный Н. м. функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$ со степенью $p \geq 1$

$$\omega^{(p)}(\delta, f) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p}. (*)$$

Для 2π -периодической функции интеграл в выражении (*) берется по отрезку $[0, 2\pi]$.

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ОПК-1	Образовательные технологии: активные и интерактивные формы проведения занятий. В течение семестра студенты на лабораторных занятиях решают индивидуальные задания, соответствующего варианта.	Пространства функций	Лабораторные задания. Контрольная работа

	Результаты самостоятельных работ зачитываются во время экзамена.		
	Знать: основные понятия курса, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений;	Свойства рядов Радемахера	Лабораторные задания. Контрольная работа.
ОПК-3	Уметь: решать задачи вычислительного и теоретического характера;		Индивидуальные задания.
ПК-3	Владеть: математическим аппаратом, аналитическими методами исследования		Лабораторные задания. Контрольная работа.
ОК-7	способностью к самоорганизации и самообразованию		Лабораторные задания. Контрольная работа.
Промежуточная аттестация		КИМ	

* В графе «ФОС» в обязательном порядке перечисляются оценочные средства текущей и промежуточной аттестаций.

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач. Знание всего материала. Умение применить знания к решению задач.	Повышенный уровень	Отлично
Знание определений, свойств, теорем. Возможны ошибки в ответе, которые исправляются по наводящим вопросам преподавателя.	Базовый уровень	Хорошо
Знание основных определений, свойств, теорем.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	Неудовлетворительно

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.2 Вопросы к экзамену

1. Пространства l_p , l_∞ , C_0 , вложения.
2. Сепарабельность l_p .
3. Неравенство Гельдера, общий вид линейного функционала в l_p .
4. Пространства L_∞ и L_p , вложения.
5. Сепарабельность L_p .
6. Подпространства и изоморфизм, подпространства L_p .
7. Дополняемость в L_p подпространства, порожденного дизъюнктивной системой функций.
8. Система Радемахера.
9. Неравенство Хинчина (1).
10. Неравенство Хинчина (2).
11. Неравенство Хинчина в пространстве Орлича.
12. Дополняемость в L_p подпространства, порожденного системой Радемахера.
13. Сходимость рядов Радемахера.
14. Расходимость рядов Радемахера.

19.3.4 Тестовые задания

Тестовых заданий нет

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа №1 по теме Система Радемахера.

19.3.5 Темы курсовых работ

Нет курсовых работ.

19.3.6 Темы рефератов

1. Примеры вычисления модуля непрерывности
2. Свойства системы Радемахера

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме *устного опроса (индивидуальный опрос)*. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний или практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.