МИННАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

теории функций и геометрии

Семенов Е.М.

31.08.2018г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.05 Введение в нелинейный анализ

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки/специализация: Теория функций и приложения

3. Квалификация (степень) выпускника: Специалист

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

0503 теории функций и геометрии

6. Составители программы: Гельман Борис Данилович , д. ф.-м. н., доцент

7. Утверждена НМС математического факультета, протокол № 0500-07 от 03.07.2018 г.

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: 2018/2019 уч.год **Семестр(ы): 6**

9. **Цели и задачи учебной дисциплины:** Целью дисциплины является ознакомление студентов с основными теоремами, проблемами и методами нелинейного анализа. Нелинейный анализ тесно связан с анализом, линейной алгеброй и другими разделами математики, что является отражением внутреннего единства математики. Выявление этих взаимосвязей также является одной из целей дисциплины.
В результате изучения дисциплины студенты должны
(а) Знать
- основные задачи нелинейного анализа;
- основные геометрические понятия и факты, лежащие в основе теорем существования и приближенных методов решения уравнений;
- рассмотрение конкретных примеров.

(б) Уметь
- самостоятельно составлять машинные алгоритмы и программы решения операторных уравнений на основе известных методов и алгоритмов;
- модифицировать известные алгоритмы, реализовывать структуры данных, повышающие эффективность существующих;
- оценивать сложность алгоритмов на основе теоретических (нижних) оценок.

(в) Иметь представление о

- об оптимальных по сложности алгоритмах решения уравнений;
- математических методах анализа сложности геометрических задач и алгоритмов;
- об областях применения алгоритмов в прикладной математике.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Курс «Введение в нелинейный анализ» относится к профессиональному циклу, вариативной части математического цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВО) по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика» (специалитет).

Для освоения дисциплины необходимы знания дисциплин: дискретная математика, алгебра. Освоение дисциплины позволит в дальнейшем изучать дисциплины: теория чисел, численные методы, а также специальные курсы по профилю подготовки.
Является продолжением общих математических курсов. Дисциплина необходима для успешного написания курсовых и дипломных работ.

Наиболее важные проблемы комбинаторной геометрии связаны с проблемой существования решений операторных уравнений, которые возникают в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Эти проблемы рассматриваются в метрическом и пространствах. Одной из важных задач нелинейного анализа является доказательство теорем существования неподвижных точек нелинейных отображений. Она и является в этом курсе основной.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-1	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, дискретной математики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики, механики сплошной среды, теории управления и оптимизации в будущей профессиональной деятельности	знать: основные определения и результаты нелинейного анализа уметь: решать задачи по нелинейному анализу владеть (иметь навык(и)): основными методами нелинейного анализа и применять их для решения конкретных задач
ПК-1	способность к самостоятельному анализу поставленной задачи, выбору корректного метода ее решения, построению алгоритма и его реализации, обработке и анализу полученной информации	знать: основные теоремы о неподвижных точках уметь: применять эти теоремы для доказательства существования решений конкретных задач

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(*в соответствии с учебным планом)* **— 3**/108.

Форма промежуточной аттестации *(зачет/экзамен)* зачет

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра	№ семестра	…
Аудиторные занятия	108	6		
в том числе: лекции	34	6		
практические				
лабораторные	34	6		
Самостоятельная работа	40	6		
Форма промежуточной аттестации *(зачет – 3 час. / экзамен – 0 час.)*	0	6		
Итого:	108			

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
		1. Лекции
1	Метрические и нормированные пространства	Изучаются основные свойства пространств.
2	Принцип сжимающих отображений и его обобщения. Ослабленное условие сжатия..	Доказываются теоремы о неподвижных точках.
3	Отображения коммутирующие со сжимающими. Приложения принципа сжимающих отображений.	Даются приложения принципа сжимающих отображений к разрешимости интегральных и дифференциальных уравнений.
4	Теорема Каристи и следствия из неё..	Доказывается теорема Каристи и приводится ее приложение.
5	Полуотклонение множеств. Метрика Хаусдорфа	Дается определение и изучаются свойства метрики Хаусдорфа.
6	Теорема Надлера..	Доказывается теорема.
7	Теорема Арутюнова	Доказывается теорема.
8	Свойства компактных множеств. Проектор Шаудера.	Доказывается лемма Шаудера.
9	Теорема Шаудера (1-ый вариант)	Доказывается теорема..
10	Вполне непрерывные отображения. Примеры.	Дается определение и приводятся примеры вполне непрерывных операторов.
11	Теорема Шаудера (2-ой вариант)	Доказывается теорема..
12	Некоторые обобщения теоремы Шаудера.	Рассматриваются некоторые обобщения теоремы Шаудера
13	Приложение теоремы Шаудера к разрешимости задачи Коши	Доказывается теорема существования решения задачи Коши
14	Некоторые другие	Рассматриваются другие приложения теоремы Шаудера

	приложения теоремы Шаудера	
2. Практические занятия		
3. Лабораторные работы		
1	Метрические и нормированные пространства.	. Изучаются основные свойства пространств.
2	Принцип сжимающих отображений и его обобщения. Ослабленное условие сжатия..	. Доказываются теоремы о неподвижных точках.
3	Отображения коммутирующие со сжимающими. Приложения принципа сжимающих отображений.	Даются приложения принципа сжимающих отображений к разрешимости интегральных и дифференциальных уравнений.
4	Теорема Каристи и следствия из неё..	Доказывается теорема Каристи и приводится ее приложение
5	Полуотклонение множеств. Метрика Хаусдорфа.	Дается определение и изучаются свойства метрики Хаусдорфа.
6	Теорема Надлера	Доказывается теорема.
7	Теорема Арутюнова	Доказывается теорема.
8	Свойства компактных множеств. Проектор Шаудера.	Доказывается лемма Шаудера.
9	Теорема Шаудера (1-ый вариант)	Доказывается теорема.
10	Вполне непрерывные отображения. Примеры.	Дается определение и приводятся примеры вполне непрерывных операторов.
11	Теорема Шаудера (2-ой вариант)	Доказывается теорема.
12	Некоторые обобщения теоремы Шаудера.	Рассматриваются некоторые обобщения теоремы Шаудера
13	Приложение теоремы Шаудера к разрешимости задачи Коши	Доказывается теорема существования решения задачи Коши
14	Некоторые другие приложения теоремы Шаудера	Рассматриваются другие приложения теоремы Шаудера

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Принцип сжимающих отображений Банаха и его обобщения	12		12	12	36
2.	Метрика Хаусдорфа. Многозначные сжимающие отображения	10		10	14	34
3.	Теорема Шаудера	12		12	14	38
	Итого:	34		34	40	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	*Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2004 .— 570 с. : ил.*
2.	*Гельман, Борис Данилович. Введение в нелинейный анализ. Часть 1: [Учебное пособие]/ Б.Д. Гельман. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – 32 с.*
3.	*Гельман, Борис Данилович. Введение в нелинейный анализ. Часть 2: [Учебное пособие]/ Б.Д. Гельман. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – 31 с.*

б) дополнительная литература:

№ п/п	*Источник*
4.	*Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие для студ. мат. спец. ун-тов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1968 .— 496 с. : ил.*
5.	*Гуревич, Александр Петрович. Сборник задач по функциональному анализу : для студентов механико-математических факультетов / А.П. Гуревич, Л.Б. Зеленко ; Сарат. гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского .— Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1987 .— 106, [1] с. : ил.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
	ЭБС «Лань» : http://e.lanbook.com
	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http // www.lib.vsu.ru/)
	Google, Yandex, Rambler

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы *(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)*

№ п/п	Источник
1.	*Гуревич, Александр Петрович. Сборник задач по функциональному анализу : для студентов механико-математических факультетов / А.П. Гуревич, Л.Б. Зеленко ; Сарат. гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского .— Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1987 .— 106, [1] с. : ил.*

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

---

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: При изучении дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения лекций и лабораторных занятий; учебные аудитории для проведения лекционных и лабораторных занятий; осуществляется контроль посещаемости и выполнения всех видов самостоятельной работы. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому занятию.

---

19. Фонд оценочных средств:

1. **Принцип сжимающих отображений Банаха**

```
Пусть $(X,\rho )$ -- метрическое пространство, $f:D(f)\subset X\to X$ --
некоторое отображение.

Определение 1. Отображение $f$ называется сжимающим,
если существует такое число $k\in (0,1)$, что для любых $x,y\in D(f)$
справедливо неравенство
\begin{equation}
\rho (f(x),f(y))\leq  k\rho (x,y).
\end{equation}
Сжимающие отображения удовлетворяют следующим свойствам.

Лемма 1. Если отображение $f$ является сжимающим,
то:\\
(1)  $\rho (f^{m}(x),f^{m}(y))\leq  k^{m}\rho (x,y)$ для любых
$x,y\in X$, где $f^{m}=f\circ f\circ \cdots\circ f$ -- композиция
$m$ экземпляров отображения $f$.\\
(2) Для любых $x,y\in X$ справедливо следующее неравенство:
\begin{equation}
\rho(x,y)\leq \frac{1}{1-k}(\rho (x,f(x))+\rho (y,f(y)))
\end{equation}

Доказательство. (1) легко проверяется методом
математической индукции.\\
(2). Из неравенства треугольника вытекает следующее неравенство:
$$\rho (x,y)\leq \rho (x,f(x))+\rho (f(x),f(y))+\rho (y, f(y)).$$
Подставляя в это неравенство неравенство (1), получим:
$$\rho (x,y)\leq \rho (x,f(x))+k\rho (x,y)+\rho (y, f(y)).$$
Откуда и получается неравенство (1.2).

Теорема (Принцип сжимающих отображений). Пусть $X$ -- полное
метрическое пространство, $f:X\to X$ -- сжимающее отображение,
тог\-да:\\
(i) $f$ имеет единственную неподвижную точку $x_{*}$;\\
(ii) для любой точки $x\in X$ последовательность $\{ f^{n}(x) \}$
сходится к $x_{*}$;\\
(iii) справедливо неравенство:
$$\rho(f^{n}(x),x_{*})\leq\frac{k^{n}}{1-k}\rho (x,f(x)).$$

Доказательство. Единственность неподвижной точки очевидным
образом вытекает из неравенства (2), докажем существование
неподвижной точки.

Рассмотрим итерационную последовательность $\{ f^{n}(x) \}$
```

выходящую из точки x. Эта последовательность является фундаментальной, т.к.
$$\rho(f^{n}(x),f^{m}(x))\leq \frac{1}{1-k}(\rho
(f^{n}(x),f^{n}(f(x)))+\rho
(f^{m}(x),f^{m}(f(x))))\leq$$
$$ \leq\frac{k^{n}+k^{m}}{1-k}\rho
(x,f(x)).$$

Если $k<1$, то при n и m достаточно больших $\rho(f^{n}(x),f^{m}(x))$ можно сделать сколь угодно малым. Следовательно, итерационная последовательность $\{ f^{n}\}$ сходится к некоторому приделу x_{*}. Тогда $$\rho (x_{*}, f(x_{*})\leq \rho (x_{*},x_{n})+\rho (f(x_{n-1}), f(x_{*}))\leq \rho (x_{*},x_{n})+k\rho (x_{n-1}, x_{*}).$$ Следовательно, $\rho (x_{*}, f(x_{*}))$ меньше любого положительного числа, т.е. $x_{*}= f(x_{*})$.

Если в доказанном неравенстве перейти к пределу при $m\to \infty$, то получим справедливость неравенства (iii). Теорема доказана.

2. Неподвижные точки отображений, некоторая степень которых является сжимающей

Пусть $f,g:X\to X$ -- два произвольных отображения.

Определение. Будем говорить, что отображения f и g коммутируют, если $f(g(x))=g(f(x))$ для любой точки $x\in X$.

{\bf Примеры.} 1) Пусть $f:X\to X$ -- произвольное отображение, $g=id:X\to X$ -- единичное отображение, т.е. $id(x)=x$ для любой точки $x\in X$. Очевидно, что эти отображения всегда коммутируют.

2) Пусть $f:X\to X$ -- произвольное отображение, $g=f^{n}:X\to X$ -- некоторая степень отображения f. Очевидно, что эти отображения всегда коммутируют.

Лемма. Пусть отображения f и g коммутируют. Если отображение g имеет {\bf единственную} неподвижную точку, то отображение f также имеет неподвижную точку (может быть не одну).

Доказательство. Пусть x_0 -- единственная неподвижная точка отображения g, тогда $$g(f(x_0)=f(g(x_0)=f(x_0),$$ т.е. точка $y_0 =f(x_0)$ является неподвижной точкой отображения g. В силу единственности неподвижной точки $y_0 =x_0$, т.е. $f(x_0)=x_0$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть X -- полное метрическое пространство, $f:X\to X$ -- отображение такое, что некоторая степень $g=f^{n}$ является сжимающим отображением. Тогда f имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Так как отображения f и g коммутируют, то отображение f имеет неподвижную точку. Проветим единственность неподвижной точки. Пусть x_0 и x_1 неподвижные точки отображения f, тогда $$x_0 =f(x_0)=f^{2} (x_0)=...=f^{n} (x_0)=g(x_0)$$ и $$x_1 =f(x_1)=f^{2} (x_1)=...=f^{n} (x_1)=g(x_1).$$
Так как отображение g имеет единственную неподвижную точку, то $x_0 =x_1 $. Теорема доказана.\\

Применим теорему 1.7 к изучению разрешимости интегрального уравнения

Вольтерра вида, $$x(t)=\varphi
(t)+\int\limits_{0}^{t}K(t,s)v(s,x(s))\,ds.\eqno (1.4)$$ Будем
предполагать, что:\\ $[0,T]$ -- отрезок числовой прямой;\\
$C_{[0,T]}$ -- пространство непрерывных вектор-функций, определенных
на отрезке $[0,T]$ со значениями в R^{n} и нормой $||x||_{C}
=\max\limits_{t\in [o,T]}||x(t)||_{R^n}$.\\
Пусть:\\
{\bf (i)} $\varphi \in C_{[0,T]}$ -- некоторая фиксированная вектор-
функция;\\
{\bf (ii)} $K:[0,T]\times [0,T]\to R$ -- непрерывная числовая функция;\\
{\bf (iii)} $v:[0,T]\times R^{n}\to R^{n}$ -- непрерывное
отображение, липшицево по второму аргументу, т.е. существует такое
$c>0$, что для любых $t\in [0,T],$ $x, y\in R^{n}$ справедливо
неравенство:
$$||v(t,x)-v(t,y)||\leq c||x-y||.$$

Решением уравнения (1.4) будем называть функцию $x_{*}\in C_{[0,T]}$
такую, что $$x_{*}(t)=\varphi
(t)+\int\limits_{0}^{t}K(t,s)v(s,x_{*}(s))\,ds $$ для любого $t\in
[0,T]$.

Теорема. При сделанных предположениях уравнение
(1.4) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f:C_{[0,T]}\to
C_{[0,T]}$, определенное условием: $$y(t)=f(x)(t)=\varphi
(t)+\int\limits_{0}^{t}K(t,s)v(s,x(s))\,ds.$$ Проверим,что некоторая
степень этого отображения является сжимающей.

Пусть функции $x_1 ,
x_2 \in C_{[0,T]}$, тогда $$||f(x_1)(t)-f(x_2
)(t)||=||\int\limits_{0}^{t}K(t,s)(v(s,x_1 (s))-v(s,x_2
(s)))\,ds||\leq $$ $$\leq \int\limits_{0}^{t}|K(t,s)|\, ||v(s,x_1
(s))-v(s,x_2 (s))||\,ds.$$ Так как функция K определена на
компакте и непрерывна, то существует такое число N, что
$|K(t,s)|\leq N$ для любых $t.s\in [0,T]$. Тогда
$$\int\limits_{0}^{t}|K(t,s)|\, ||v(s,x_1 (s))-v(s,x_2 (s))||\,ds\leq
N\, \int\limits_{0}^{t}c \, ||x_1 (s)-x_2 (s)||\,ds\leq $$
$$\leq Nc\, ||x_1 -x_2 || \, t .$$ Таким образом,
$$||f(x_1)(t)-f(x_2)(t)||\leq Nc\, ||x_1 -x_2 || \, t .$$
Оценим теперь $||f^{2}(x_1)-f^{2} (x_2)||$. Очевидно, что $$f^{2}
(x)(t) =f(f(x))(t)=\varphi
(t)+\int\limits_{0}^{t}K(t,s)v(s,f(x)(s))\,ds. $$ Тогда
$$||f^{2}(x_1)(t)-f^{2} (x_2)(t)||=||\int\limits_{0}^{t}K(t,s)[v(s,f(x_1
)(s))-v(s,f(x_2) (s))]\,ds||\leq $$
$$\leq Nc\,\int\limits_{0}^{t}||f(x_1
)(s))-f(x_2) (s)||\,ds\leq Nc \int\limits_{0}^{t}Nc\, ||x_1 -x_2 ||
\, s \; ds=$$
$$ =N^{2}c^{2}||x_1 -x_2 ||\frac {t^{2}}{2}.$$ Таким
образом, $$||f^{2}(x_1)(t)-f^{2} (x_2)(t)||\leq \frac {N^2 c^2 t^2
}{2} ||x_1 -x_2 ||.$$ Аналогично, пользуясь методом математической
индукции и тем, что $$f^{k} (x)(t) =f(f^{k-1}(x))(t)=\varphi
(t)+\int\limits_{0}^{t}K(t,s)v(s,f^{k-1}(x)(s))\,ds,$$ получим,
$$||f^{k}(x_1)(t)-f^{k} (x_2)(t)||\leq \frac {N^k c^k t^k
}{k!} ||x_1 -x_2 ||\leq \frac {N^k c^k T^k }{k!} ||x_1 -x_2 ||.$$
Так как $$\lim\limits_{k\to\infty}\frac {N^k c^k T^k }{k!} =0,$$ то
существует такое n, что $\frac {N^n c^n T^n }{n!}<1$, т.е.
отображение f^n является сжимающим. Теперь утверждение теоремы
вытекает из теоремы 1.7.

3. Ослабленное условие сжатия

Пусть X --- полное метрическое пространство, $f:X\to X$ --- непрерывное отображение.
Определение. Будем говорить, что отображение f удовлетворяет ослабленному условию сжатия, если для любых $x,y\in X$, $x\not =y$, справедливо неравенство:
\begin{equation}
\rho (f(x),f(y))<\rho (x,y).
\end{equation}}
Очевидно, что любое сжимающее отображение удовлетворяет условию (3), но обратное неверно. Выясним, будет ли отображение, удовлетворяющее ослабленному условию сжатия, иметь неподвижную точку?

Оказывается, в общем случае оно может не иметь неподвижных точек.

{\bf Пример.} Пусть X множество всех вещественных чисел с метрикой $\rho (x,y)=|x-y|$. Рассмотрим отображение $f:X\to X$ определенное условием: $$f(x)=x-arctg (x)+\frac{\pi}{2}.$$
Проверим, что это отображение не имеет неподвижных точек, т.е. уравнение $x=f(x)$ не имеет решений. Действительно, если число x_0 является решением этого уравнения, то $arctg (x_0)=\frac{\pi}{2}.$ Однако, такое уравнение решений не имеет.

Проверим теперь, что это отображение удовлетворяет ослабленному условию сжатия. Пусть $x,y\in X$, $x\not =y$. Оценим $\rho (f(x),f(y))$. Имеем, $$\rho (f(x),f(y))=|f(x)-f(y)|\leq |f'(c)|\,|x-y|,$$
где $c\in [x,y]$. Так как $$|f'(x)| =|(x-arctg (x)+\frac{\pi}{2})'|=|1-\frac{1}{1+x^2}|=\frac{x^2}{1+x^2}<1$$ для любого $x\in X$. Следовательно, для любого $c\in X$ справедливо неравенство $|f'(c)|<1$, что и доказывает неравенство (1.5). Таким образом отображение f удовлетворяет ослабленному условию сжатия, однако не имеет неподвижных точек.

Однако, при более сильных предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема. {\it Пусть X --- компактное метрическое пространство, $f:X\to X$ --- отображение, удовлетворяющее ослабленному условию сжатия. Тогда f имеет единственную неподвижную точку.}

{\bf Доказательство.} Рассмотрим функцию $\alpha :X\to \mathbb{R}$ определенную условием: $$\alpha (x)=\rho (x,f(x)).$$ Проверим, что эта функция непрерывна. Для этого, оценим приращение функции α. Имеем: $$|\alpha(x)-\alpha(y)|=|\rho (x,f(x))-\rho (y,f(y))|\leq \rho (x,y)+\rho (f(x),f(y)).$$ Если $x\not =y$, то $|\alpha(x)-\alpha(y)|<2 \rho (x,y)$. Тогда для любых $x,y\in X$ имеем $|\alpha(x)-\alpha(y)|\leq 2 \rho (x,y)$. Очевидно, что это неравенство гарантирует непрерывность функции α.

Так как на компактном пространстве любая непрерывная функция достигает свой максимум и минимум (теорема Вейерштрасса), то существует точка $x_0 \in X$ такая, что $\alpha (x_0)=\min\limits_{x\in X}\alpha (x).$

Докажем, что число $\alpha_0 = \alpha (x_0)=0$. Предположим, что $\alpha (x_0)> 0$. Пусть $y_0 = f(x_0)$. Очевидно, что $y_0\not =x_0$. Тогда $\alpha (y_0)=\rho(y_0 ,f(y_0))\geq \alpha_0>0.$ С другой стороны, $$\rho(y_0 ,f(y_0))=\rho(f(x_0) ,f(y_0))<\rho(x_0 ,y_0)=\rho(x_0 ,f(x_0))=\alpha (x_0).$$ Полученное противоречие и доказывает, что $\alpha_0 =0$. Следовательно, $f(x_0)=x_0$, т.е. x_0 является неподвижной точкой отображения f.

Покажем, что неподвижная точка отображения f единственна. Предположим противное, пусть x_0 и x_1 --- неподвижные точки и $x_0 \not = x_1$.

Тогда $$0< \rho (x_0 ,x_1)=\rho(f(x_0),f(x_1))<\rho (x_0 ,x_1).$$
Полученное противоречие и доказывает теорему.

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ОПК-1	Образовательные технологии: активные и интерактивные формы проведения занятий. В течение семестра студенты на лабораторных занятиях решают индивидуальные задания, соответствующего варианта. Результаты самостоятельных работ зачитываются во время зачета.	Принцип сжимающих отображений и его обобщения. Теорема Шаудера.	Лабораторные задания. Контрольная работа.
	Знать: основные понятия курса, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений;		Лабораторные задания. Контрольная работа.
ПК-3	Способность к самостоятельному анализу поставленной задачи, выбору корректного метода ее решения, построению алгоритма и его реализации, обработке и анализу полученной информации	Принцип сжимающих отображений и его обобщения. Теорема Шаудера	Лабораторные задания. Контрольная работа.
Промежуточная аттестация			

* В графе «ФОС» в обязательном порядке перечисляются оценочные средства текущей и промежуточной аттестаций.

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
2) умение связывать теорию с практикой;
3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
4) умение применять полученные знания на практике;

5) владение понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способность иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач в области…	*Повышенный уровень*	*зачет*
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), допускает не значительные ошибки при ответе.	*Базовый уровень*	*зачет*
Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен дать ответ .	*Пороговый уровень*	*зачет*
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки,	–	*Незачет*

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.2 Вопросы к зачету

1. Метрические и нормированные пространства.
2. Принцип сжимающих отображений Банаха и его приложения.
3. Отображения коммутирующие со сжимающими. Приложения принципа сжимающих отображений.
4. Ослабленное условие сжатия.\
5. Теорема Какристи.
6. Теорема Арутюнова.
7. Метрика Хаусдорфа.
8. Теорема Надлера.
9. Лемма Шаудера.
10. Теорема Шаудера (1-ый вариант).
11. Вполне непрерывные отображения.
12. Теорема Шаудера (1-ой вариант).
13. Приложения теоремы Шаудера.

19.3.4 Тестовые задания

Тестовых заданий нет

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа №1 по теме «Принцип сжимающих отображений и его обобщения. »

19.3.5 Темы курсовых работ

Нет курсовых работ.

19.3.6 Темы рефератов

1. Метрика Хаусдорфа.
2. Теорема Арутюнова.

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «зачет» и «не зачет».

Задания текущего контроля и проведение промежуточной аттестации должны быть направлены на оценивание уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности; степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и практически значимую информацию; приобретение умений профессионально значимых для профессиональной деятельности.