МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

теории функций и геометрии

Семенов Е.М.

31.08.2018г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.06 Элементы спектральной теории
Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.05.01 Фундаментальная математика и механика

2. Профиль подготовки/специализация:

Теория функций и приложения (УВЦ)

3. Квалификация (степень) выпускника: специалист

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Теории функций и геометрии

6. Составители программы:
Денисов Михаил Сергеевич - андидат физ-мат. наук

7. Рекомендована: НМС математического факультета, протокол № 0500-07 от 03.07.2018
(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,

отметки о продлении вносятся вручную)

---

8. Учебный год: 2018/2019 **Семестр(ы):** 7

9.Цели и задачи учебной дисциплины: ознакомить студентов с проблемами индефинитных пространств, пространств Понтрягина и их приложениями.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

«Элементы спектральной теории» - специальный курс. Для его успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные при прохождении курсов алгебры, математического анализа, функционального анализа. Освоение этого курса даст знания, способные помочь в научно-исследовательской работе.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-1	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, дискретной математики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики, механики сплошной среды, теории управления и оптимизации в будущей профессиональной деятельности	знать: основные факты спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах. уметь: доказывать основные результаты спектральной теории операторов. владеть: методами спектральной теории операторов для исследования задач естествознания.
ПК-1	способностью к самостоятельному анализу поставленной задачи, выбору корректного метода ее решения, построению алгоритма и его реализации, обработке и анализу полученной информации	знать: примеры задач решаемых с помощью аппарата спектральной теории операторов. уметь: применять методы спектральной теории операторов. владеть: методами и подходами численного эксперимента при исследования некоторых задач естествознания методами спектральной теории операторов.

ПК-2	способностью к самостоятельному анализу физических аспектов в классических постановках математических задач и задач механики	знать: основные математические и физические модели использующие понятийный аппарат спектральной теории операторов. уметь: исследовать математические модели методами спектральной теории операторов. владеть: методами и подходами исследования некоторых задач естествознания методами спектральной теории операторов.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(*в соответствии с учебным планом)* **—** 144/4.

Форма промежуточной аттестации. Экзамен.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам № семестра - 7
Аудиторные занятия	50	50
в том числе: лекции	16	16
практические		
лабораторные	34	34
Самостоятельная работа	58	58
Форма промежуточной аттестации *(зачет – 0 час. / экзамен – 1 час.)*		
Контроль	36	36
Итого:	144	144

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
	1. Лекции	
1.1	Гильбертово пространство.	Неравенство Коши-Буняковского, слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность. Замкнутые линейные операторы. Свойства. Теорема Банаха.
1.2	Линейный оператор.	Определение. Существование и единственность. Свойства. Пространство графика линейного оператора.
1.3	Примеры линейных операторов.	Примеры линейных операторов в различных Гильбертовых пространствах.
1.4	Основные свойства линейных операторов. Сходимость.	Виды сходимости линейных операторов. Основные теоремы о сходимости линейных операторов.
1.5	Сопряженный оператор.	Свойства сопряженного оператора. Примеры сопряженных операторов в различных пространствах.
1.6		Замкнутость спектра, открытость множества регулярных

	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	точек. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов. Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.
1.7	Самосопряженный оператор.	Простейшие свойства самосопряженных операторов, свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция.
1.8	Симметрические операторы	Критерии существования самосопряженных расширений. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.
1.9	Краевая задача и ее оператор	Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.
1.10	Положительно определенные операторы	Симметрические и положительно определенные операторы. Примеры. Неравенство Фридрихса.
1.11	Энергетическое пространство положительно определенного оператора.	Функционал энергии. Энергетическое пространство. Главные и естественные краевые условия.
1.12	Обобщенное решение операторного уравнения	Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве. Примеры. Представление обобщенного решения в виде ряда.
1.13	Расширение положительно определенного оператора	Сопряженные и самосопряженный операторы. Расширение Фридрихса с сохранением нижней грани.
1.14	Задачи на собственные значения	Свойства собственных элементов и собственных значений самосопряженных операторов. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.
1.15	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре.	Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения.
1.16	Основные теоремы о спектре	Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.
1.17	Максиминимальный принцип	Принцип Куранта. Теорема о монотонности спектра. Спетральная задача с двумя положительными операторами.
1.18	Приложения	Задача Штурма-Лиувилля. Классические спектральные задачи математической физики. Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида.
3. Лабораторные работы		
3.1	Гильбертово пространство. Линейный оператор.	Неравенство Коши-Буняковского, слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.
3.2	Гильбертово пространство. Линейный оператор.	Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность. Замкнутые линейные операторы. Свойства. Теорема Банаха.
3.3	Сопряженный оператор.	Определение. Существование и единственность. Свойства.
3.4	Сопряженный оператор.	Пространство графика линейного оператора.

3.5	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.
3.6	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов.
3.7	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Простейшие свойства самосопряженных операторов, свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция.
3.8	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Критерии существования самосопряженных расширений. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.
3.9	Краевая задача и ее оператор	Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.
3.10	Положительно определенные операторы	Симметрические и положительно определенные операторы. Примеры. Неравенство Фридрихса.
3.11	Энергетическое пространство положительно определенного оператора.	Функционал энергии. Энергетическое пространство. Главные и естественные краевые условия.
3.12	Обобщенное решение операторного уравнения	Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве. Примеры. Представление обобщенного решения в виде ряда.
3.13	Расширение положительно определенного оператора	Сопряженные и самосопряженный операторы. Расширение Фридрихса с сохранением нижней грани.
3.14	Задачи на собственные значения	Свойства собственных элементов и собственных значений самосопряженных операторов. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.
3.15	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре.	Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения.
3.16	Основные теоремы о спектре	Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.
3.17	Максиминимальный принцип	Принцип Куранта. Теорема о монотонности спектра. Спетральная задача с двумя положительными операторами.
3.18	Приложения	Задача Штурма-Лиувилля. Классические спектральные задачи математической физики. Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Гильбертово пространство. Линейный оператор.	2	0	4	12	16

2	Сопряженный оператор.	2	0	2	10	8
3	Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора.	2	0	4	12	16
4	Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	2	0	4	12	16
5	Краевая задача и ее оператор Положительно определенные операторы Энергетическое пространство положительно определенного оператора.	2	0	6	12	24
6	Обобщенное решение операторного уравнения Расширение положительно определенного оператора Задачи на собственные значения	2	0	6	12	24
7	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре. Основные теоремы о спектре	2	0	4	12	24
8	Максиминимальный принцип Приложения	2	0	4	12	16
	Итого:	16	0	34	94	144

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций, презентационным материалом, выполнение практических заданий, тестов, заданий текущей аттестации и т.д.)

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Копачевский Н.Д., *Операторные методы математической физики* / Копачевский Н.Д. – Симферополь, ООО «Форма», 140 с. **http://nikolay-d-kopachevsky.com/posobia.html**

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	1. Копачевский Н.Д., Операторные методы в линейной гидродинамике. эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан .— М. : Наука, 1989 .— 413,[3] с. — Библиогр.: с. 398-410 .— Предм. указ. : с.411-413 .— ISBN 5-02-014203-4.
3	Покорный Ю.В., Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный [и др.] // .— .— 191 с. — Библиогр.: с. 184-187 .— Предм. указ.: с. 188-191.

4	Березанский Ю.М., Функциональный анализ : Курс лекций: Учебное пособие для студ. ун-тов, обуч. по специальности "Математи ка" / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель .— Киев : Выща школа, 1990 .— 600 с. : ил. — ISBN 5-11-001329-2 : 1.90.

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

№ п/п	Источник
6	***http://www.math.vsu.ru*** *– официальный сайт математического факультета ВГУ*
7	***http://www.math.msu.ru*** *– официальный сайт мехмата МГУ*

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы *(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)*

№ п/п	Источник
1.	Юргелас, В. В. Функциональный анализ : практикум для студентов / В. В. Юргелас. – Воронеж: ВГУ, 2007. – 56 с.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

---

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

(при использовании лабораторного оборудования указывать полный перечень, при большом количестве оборудования можно вынести данный раздел в приложение к рабочей программе)

Учебные аудитории для проведения лекционных и лабораторных занятий; конспекты лекций.

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)

ОПК-1	знать: основные факты спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах.	Гильбертово пространство. Линейный оператор. Сопряженный оператор. Спектр и регулярные точки линейного замкнутого оператора. Самосопряженный оператор. Симметрические операторы.	Устный опрос Решение задач
	уметь: доказывать основные результаты спектральной теории операторов.	Основные теоремы о спектральных свойствах линейных операторов.	Устный опрос Решение задач
	владеть: методами спектральной теории операторов для исследования задач естествознания.	Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.	Устный опрос Решение задач
ПК-1	знать: примеры задач решаемых с помощью аппарата спектральной теории операторов.	Свойства собственных элементов и собственных значений самосопряженных операторов. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.	Устный опрос Решение задач
	уметь: применять методы спектральной теории операторов.	Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения. Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра.	Устный опрос Решение задач

		Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.	
	владеть: методами и подходами численного эксперимента при исследования некоторых задач естествознания методами спектральной теории операторов.	Критерии существования самосопряженных расширений. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.	Устный опрос Решение задач
ПК-2	знать: основные математические и физические модели использующие понятийный аппарат спектральной теории операторов.	Симметрические и положительно определенные операторы. Примеры. Неравенство Фридрихса. Функционал энергии. Энергетическое пространство. Главные и естественные краевые условия. Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве. Примеры. Представление обобщенного решения в виде ряда.	Устный опрос Решение задач
	уметь: исследовать математические модели методами спектральной теории операторов.	Принцип Куранта. Теорема о монотонности спектра. Спетральная задача с двумя положительными	Устный опрос Решение задач

		операторами.	
	владеть: методами и подходами исследования некоторых задач естествознания методами спектральной теории операторов.	Задача Штурма-Лиувилля. Классические спектральные задачи математической физики. Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида.	Устный опрос Решение задач
Промежуточная аттестация			Устный опрос

* В графе «ФОС» в обязательном порядке перечисляются оценочные средства текущей и промежуточной аттестаций.

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Пример:

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):
владение теоретическими основами теории пространств Понтрягина, способность иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».
Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет теоретическими основами спектральной теории, способен иллюстрировать ответ примерами, применять теоретические знания для решения практических задач.	*Повышенный уровень*	*Отлично*
Обучающийся владеет теоретическими основами спектральной теории, способен иллюстрировать ответ примерами, допускает ошибки при применении теоретических знаний для решения практических задач.	*Базовый уровень*	*Хорошо*
Обучающийся владеет частично теоретическими основами спектральной теории, фрагментарно способен иллюстрировать ответ примерами, не умеет применять теоретические знания для решения практических задач.	*Пороговый уровень*	*Удовлетвори-тельно*
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные	–	*Неудовлетвори-*

знания, допускает грубые ошибки.		*тельно*

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к экзамену :

1. Неравенство Коши-Буняковского.
2. Слабая и сильная сходимости в гильбертовом пространстве.
3. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.
4. Ограниченные и непрерывные операторы. Эквивалентность.
5. Замкнутые линейные операторы.
6. Свойства. Теорема Банаха.
7. Определение. Существование и единственность. Свойства. Пространство графика линейного оператора.
8. Замкнутость спектра, открытость множества регулярных точек.
9. Существование спектра и регулярных точек у непрерывных операторов.
10. Примеры замкнутых операторов с пустым множеством регулярных точек и с пустым спектром. Связь частей спектра.
11. Простейшие свойства самосопряженных операторов,
12. Свойства спектра и регулярных точек, спектральная функция
13. Критерии существования самосопряженных расширений.
14. Описание самосопряженных расширений, обобщенная резольвента.
15. Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.
16. Симметрические и положительно определенные операторы. Примеры. Неравенство Фридрихса.
17. Функционал энергии. Энергетическое пространство. Главные и естественные краевые условия.
18. Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве. Примеры. Представление обобщенного решения в виде ряда.
19. Сопряженные и самосопряженный операторы. Расширение Фридрихса с сохранением нижней грани.
20. Свойства собственных элементов и собственных значений самосопряженных операторов. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.
21. Вариационный принцип для первого собственного значения. Минимизирующая последовательность для наименьшего собственного значения.
22. Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.
23. Принцип Куранта. Теорема о монотонности спектра. Спетральная задача с двумя положительными операторами.
24. Задача Штурма-Лиувилля. Классические спектральные задачи математической физики. Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида.

19.3.2 Перечень задач к экзамену :

Задача 1. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на [0;1] функций x(t) таких, что $|x(0)| \le K_1$, $\int\limits_0^1 |x'(t)|^2\, dt \le K_2$ где $K_1, K_2 > 0$ – постоянные, компактно в пространстве C[0;1].

Указание. Согласно теореме Арцела-Асколи, для предкомпактности семейства функций $M \subset C[a;b] \Leftrightarrow$ равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность этого семейства. Если предкомпактное множество замкнуто, то оно компактно.

Задача 2. Будет ли компактным множество всех степеней x^n ($n \in \mathbf{N}$) в пространстве C[0;1].
Ответ. Нет.
Решение. Из последовательности элементов любого полного компакта можно выделить сходящуюся в нем подпоследовательность. Но любая бесконечная подпоследовательность из $\{x^n\}$ сходится к разрывной функции f(x) = {1, if x = 1; 0 otherwise}.

Задача 3. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве вполне ограничено.

Указание. Единичная сфера S в пространстве l_2 ограничена. Рассмотрим точки вида e_k (где на k-ом месте в последовательности стоит 1, а на остальных - 0). Расстояние между любыми двумя различными точками e_m и e_n равно $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ для $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ в S не существует конечной ε-сети (в каждом шаре радиуса ε с центром в узле такой ε-сети будет лежать не более одной точки e_k).

Задача 4. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество относительно компактно.
Указание. В конечномерном пространстве компактность означает замкнутость и ограниченность, поэтому замыкание всякого ограниченного множества компактно.

Задача 5. Доказать, что следующие функционалы в пространстве C[-1;1] являются линейными и непрерывными; найти их нормы.

а) $f(x) = \frac{1}{3}\left[x(-1) + x(1)\right]$

Указание. Любой функционал вида $g[x;t_0] = x(t_0)$, очевидно, является линейным и непрерывным. f(x) является линейной комбинацией таких функционалов. $\| g[x;t_0] \| \equiv 1$. $\| f \| = 2/3$.

б) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$

Указание. Линейность следует из линейности интеграла Римана I(x;[a;b]). Функционал вида I(x;[a;b]) ограничен и имеет норму (b-a). $\| f \| = 2$

в) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$

Указание. Любой функционал вида $J(x;y_0;[a;b]) = \int\limits_{a}^{b} y_0(t)x(t)dt$ линеен по x и ограничен. $\| J \| = \int\limits_{a}^{b} |y_0(t)|\, dt$. Таким образом, $\| f \| = 1$.

Задача 6. Пусть X – множество функций f(x), определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max\limits_{x} |f(x)|$. Будет ли пространство X банаховым?
Ответ. Нет.
Указание. Докажем, что пространство X не будет полным. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \{exp(- x^2)$, если $|x| \le n$; 0, если $|x|>n\}$. Очевидно, что эта последовательность фундаметальна, но сходится к функции $f(x)=exp(- x^2) \notin X$.

Задача 7. Является ли пространство непрерывных на отрезке [0;1] функций гильбертовым пространством, если скалярное произведение задается следующим образом: $(f,g) = \int\limits_{0}^{1} f(x)g(x)dx$?
Ответ. Нет.
Указание. Если предположить, что C[0;1] с заданным таким образом скалярным произведением есть гильбертово, то имеем подпространство в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$. Можно подобрать последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ из L_2, сходящуюся к разрывной функции $f(x) = \{0$, <u>if $x \le 1/2$</u>, 1, <u>otherwise</u>$\}$. Таким образом, подпространство C[0;1] не полно $\Rightarrow$ противоречие.

Задача 8. Показать, что если в гильбертовом пространстве H последовательность x_n слабо сходится к x и $\|x_n\| \to \|x\|$, то последовательность x_n сходится сильно, т.е. $\|x_n - x\| \to 0$.

Указание. Предположим, что H сепарабельно. Тогда оно изоморфно пространству l_2. Поэтому достаточно доказать это утверждение для пространства l_2. Действительно, $\|x_n - x\|^2=(x_n-x,x_n-x)=\|x_n\|^2+\|x\|^2-2(x,x_n)= \|x_n\|^2-\|x\|^2+2(x,x-x_n)\to 0$ (т.к. согласно слабой сходимости, $(x,x_n-x) \to 0$).

Задача 9. Доказать, что любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H достигает нормы на замкнутом единичном шаре.
Указание. Считаем, что пространство H сепарабельно. Функционал $F(x)=(a,x)$ достигает нормы $\|F\|=\|a\|$ на элементе $a/\|a\|$.

Задача 10. Найти норму оператора A, действующего в пространстве C[0;1], (или в пространстве $L_2[0;1]$): $Ax = tx(t)$.

Ответ. $\|A\| = \sup \{\|Ax\| (\|x\| \le 1)\} = 1$.

Задача 11. Определить оператор A^* и нормы операторов A и A^*, если $A:l_2\to l_2$, где $A(x_1,\dots,x_n,\dots)= A(0,x_1,\dots,x_n,\dots)$.
Указание. Сопряженным к l_2 является пространство функционалов вида $G(x)=(g,x)$, где $g\in l_2$. Нужно подобрать оператор A^* на множестве таких функционалов, такой что $(g,Ax)=(A^*g,x)$. Для функционала $G(x)=(g,x)$, где $g=(g_1,g_2,\dots,g_n,\dots)$ положим $A^*G(x)=G'(x)=(g',x)$, где $g'=(g_2,g_3,\dots, g_n,\dots)$. Поскольку A переводит единичный шар в единичный шар, то $\|A\| = 1$. Поскольку оператор A ограничен и пространство l_2 банахово, то $\|A^*\| = \|A\| = 1$.

Задача 12. Определить спектр оператора A, действующего в пространстве
l_2: $A(x_1,\dots,x_n,\dots)=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots,\frac{x_n}{n},\dots\right)$.
Ответ. $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n=1/n, n\in\mathbf{N}\}$.
Указание. Оператор A компактен, поэтому его спектр состоит из нуля и собственных значений. Числа λ_n являются собственными значениями, т.к. $Ker(A-\lambda_n I)\neq\{0\}$.

Задача 13. В пространстве l_2 задан оператор A: $A(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)=\left(0,\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\dots,\frac{x_n}{n},\dots\right)$. Доказать, что оператор A компактен, найти его спектр.
Ответ. $\sigma(A) = \{0\}$.
Указание. Оператор A компактен, т.к. является композицией компактного оператора из задачи 52 и ограниченного оператора (сдвига). Поскольку оператор задан в гильбертовом пространстве и компактен, то число 0 входит в его спектр. Легко показать, что собственных значений у оператора нет: из $(A-\lambda I)x = 0$, $\lambda\neq 0$ следует $x = 0$.

Задача 14. Привести пример линейного, но не непрерывного функционала.
Пример. Пространство $\{P_i(x)\}$ всевозможных многочленов над **R**. Норма: $\|P\|=\max(|P(x)|)$ на отрезке [0;1/2]. Функционал $f(P) = P(1)$. Функционал f не является непрерывным. В самом деле, рассмотрим последовательность $P_n=x^n$. Очевидно, что $\|P_n\| \to 0$, но $f(P_n)\to\infty$.

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме*: устного опроса (индивидуальный опрос) и решения задач;* Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.