

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
цифровых технологий



С.Д.Кургалин  
30.06.2018 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.Б.14 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

02.03.01 Математика и компьютерные науки

**2. Профиль подготовки/специализация:** распределённые системы и искусственный интеллект

**3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** цифровых технологий

**6. Составители программы:** Семенов Михаил Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом факультета компьютерных наук (протокол № 6 от 25.06.2018)

**8. Учебный год:** 2020-2021

**Семестр(ы):** 6

**9. Цели и задачи учебной дисциплины:** изучение основных методов и инструментов функционального анализа и их применение к решению прикладных задач.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** дисциплина относится к базовой части блока Б1. Для успешного освоения дисциплины необходимо предварительное изучение курсов «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения». Функциональный анализ относится к числу фундаментальных разделов современной математики. Знание основ Функционального анализа является важной составляющей общей математической культуры выпускника.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-1	Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности.	знать: основы теории линейных функционалов и линейных операторов, принципы существования неподвижных точек у различных классов операторов; уметь: применять методы функционального анализа для решения прикладных задач в различных предметных областях; владеть: приемами и методами решения интегральных и операторных уравнений.
ПК-3	Способность строго доказывать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата.	знать: методы формулировки и доказательства математических утверждений; уметь: применять аппарат функционального анализа для доказательства утверждений и теорем; владеть: навыками анализа и интерпретации результатов решения задач.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 4/144.**

**Форма промежуточной аттестации:** 6 семестр – экзамен.

### 13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		6 сем.
Аудиторные занятия	68	68
в том числе: лекции	34	34
практические	34	34
лабораторные		
Самостоятельная работа	40	40
Экзамен	36	36
Итого:	144	144

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
1.1	Интегралы Лебега, Лебега-Стилтьеса	Мера Лебега. Измеримые по Лебегу множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Теоремы Фату, Лебега, Леви. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
1.2	Метрические и Банаховы пространства	Открытые, замкнутые множества. Линейные пространства. Метрические пространства. Метрика. Полнота. Полнота стандартных пространств. Теорема о пополнении. Банаховы и гильбертовы пространства.
1.3	Линейные и компактные операторы	Спектр, резольвента, спектральный радиус линейного оператора. Обратимость линейного оператора. Теорема Банаха-Штейнгауса. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема Арцела. Компактные операторы.
1.4	Теоремы о неподвижных точках	Принцип сжимающих отображений. Теорема Шаудера. Монотонные операторы. Теорема Биркгофа-Тарского.
1.5	Интегральные преобразования, интегральные уравнения	Преобразования Меллина, Радона, приложения к решению интегральных уравнений. Альтернатива Фредгольма.
1.6	Некорректные задачи математической физики	Некорректные задачи. Методы регуляризации. Теорема Тихонова.
1.7	Приближенные методы решения операторных уравнений	Методы осреднения. Метод Рисса. Метод малого параметра.
<b>2. Практические занятия</b>		
2.1	Интегралы Лебега, Лебега-Стилтьеса	Мера Лебега. Измеримые по Лебегу множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Теоремы Фату, Лебега, Леви. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
2.2	Метрические и Банаховы пространства	Открытые, замкнутые множества. Линейные пространства.

		Метрические пространства. Метрика. Полнота. Полнота стандартных пространств. Теорема о пополнении. Банаховы и гильбертовы пространства.
2.3	Линейные и компактные операторы	Спектр, резольвента, спектральный радиус линейного оператора. Обратимость линейного оператора. Теорема Банаха-Штейнгауса. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема Арцела. Компактные операторы.
2.4	Теоремы о неподвижных точках	Принцип сжимающих отображений. Теорема Шаудера. Монотонные операторы. Теорема Биркгофа-Тарского.
2.5	Интегральные преобразования, интегральные уравнения	Преобразования Меллина, Радона, приложения к решению интегральных уравнений. Альтернатива Фредгольма.
2.6	Некорректные задачи математической физики	Некорректные задачи. Методы регуляризации. Теорема Тихонова.
2.7	Приближенные методы решения операторных уравнений	Методы осреднения. Метод Рисса. Метод малого параметра.

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Интегралы Лебега, Лебега-Стилтьеса	4	4		4	12
2	Метрические и Банаховы пространства	4	4		6	14
3	Линейные и компактные операторы	4	4		6	14
4	Теоремы о неподвижных точках	4	4		6	14
5	Интегральные преобразования, интегральные уравнения	6	6		6	18
6	Некорректные задачи математической физики	6	6		6	18
7	Приближенные методы решения операторных уравнений	6	6		6	18
	Итого:	34	34		40	108

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:

- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- методические указания и пособия;
- контрольные задания для закрепления теоретического материала;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Форма организации самостоятельной работы: подготовка к аудиторным занятиям; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — 7-е изд. — Москва : Физматлит, 2012. — 573 с. — <URL: <a href="http://biblioclub.lib.vsu.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82563&amp;sr=1">http://biblioclub.lib.vsu.ru/index.php?page=book_red&amp;id=82563&amp;sr=1</a> >.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: <a href="http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=245">http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=245</a>
3	Треногин В.А. Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин.— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит. — 2007. — 488 с.
4	Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. — М. : Наука. — 1968. — 288 с.
5	Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по специальности "Прикладная математика" / А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. — М. : Наука. — 1979. — 284 с.
6	Садовничий В.А. Теория операторов / Садовничий В.А. — М. : МГУ. — 1986. — 368 с.
7	Рид М. Методы современной математической физики. т.1. Функциональный анализ / М.Рид, Б.Саймон. — М. : Мир. —1977. — 357 с.
8	Вайнберг М.М. Функциональный анализ / М.М.Вайнберг. — М. : Просвещение.- 1979. — 128с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
9	<a href="http://www.lib.vsu.ru">www.lib.vsu.ru</a> –ЗНБ ВГУ

#### 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

(учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: <a href="http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=245">http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=245</a>

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости) — нет

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: лекционная аудитория, оснащённая мультимедийным проектором.

## 19. Фонд оценочных средств:

### 19.1 Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС (средства оценивания)
ОПК-1	Знать: основы теории линейных функционалов и линейных операторов, принципы существования неподвижных точек у различных классов операторов.	Разделы 1-7	Контрольные работы 1-3
	Уметь: применять методы функционального анализа для решения прикладных задач в различных предметных областях.	Разделы 1-7	Контрольные работы 1-3
	Владеть: приемами и методами решения интегральных и операторных уравнений.	Разделы 1-7	Контрольные работы 1-3
ПК-3	Знать: методы формулировки и доказательства математических утверждений.	Разделы 1-7	Контрольные работы 1-3
	Уметь: применять аппарат функционального анализа для доказательства утверждений и теорем.	Разделы 1-7	Контрольные работы 1-3
	Владеть: навыками анализа и интерпретации результатов решения задач.	Разделы 1-7	Контрольные работы 1-3
<b>Промежуточная аттестация</b>			КИМ

### 19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание основ теории линейных функционалов и линейных операторов, принципов существования неподвижных точек у различных классов операторов;
- 2) знание методов формулировки и доказательства математических утверждений;
- 3) умение применять методы функционального анализа для решения прикладных задач в различных предметных областях;
- 4) умение применять аппарат функционального анализа для доказательства утверждений и теорем;
- 5) владение приемами и методами решения интегральных и операторных уравнений;
- 6) владение навыками анализа и интерпретации результатов решения задач.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Обучающийся демонстрирует высокий уровень владения материалом, ориентируется в предметной области, верно отвечает на все дополнительные вопросы.	Повышенный уровень	Отлично

Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному или двум из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Допускаются ошибки при воспроизведении части теоретических положений.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Сформированные знания основных понятий, определений и теорем, изучаемых в курсе, не всегда полное их понимание с затруднениями при воспроизведении.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым четырём из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе.	–	Неудовлетворительно

### **19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

#### **19.3.1 Перечень вопросов к экзамену**

1. Мера Лебега.
2. Принцип сжимающих отображений.
3. Измеримые по Лебегу множества.
4. Теорема Шаудера.
5. Измеримые функции.
6. Монотонные операторы.
7. Интеграл Лебега.
8. Теорема Биркгофа-Тарского.
9. Теоремы Фату, Лебега, Леви.
10. Преобразования Меллина, Радона, приложения к решению интегральных уравнений.
11. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
12. Альтернатива Фредгольма.
13. Открытые, замкнутые множества.
14. Некорректные задачи. Методы регуляризации.
15. Линейные пространства. Метрические пространства.
16. Теорема Тихонова.
17. Метрика. Полнота. Полнота стандартных пространств.
18. Методы осреднения.

19. Теорема о пополнении. Банаховы и гильбертовы пространства.
20. Метод Рисса.
21. Спектр, резольвента, спектральный радиус линейного оператора.
22. Метод малого параметра.
23. Обратимость линейного оператора.
24. Принцип сжимающих отображений.
25. Теорема Банаха-Штейнгауса.
26. Линейные пространства. Метрические пространства.
27. Теорема Банаха об обратном операторе.
28. Измеримые по Лебегу множества. Измеримые функции.
29. Теорема Арцела. Компактные операторы.
30. Преобразования Меллина, Радона, приложения к решению интегральных уравнений.

### 19.3.2 Комплект заданий для контрольных работ

#### Контрольная работа № 1

**Задание 1 (15 баллов).** Доказать, что произвольное открытое подмножество прямой можно представить в виде объединения не более чем счётного числа попарно не пересекающихся интервалов (возможно бесконечных).

**Задание 2 (15 баллов).** Доказать, что  $C[a,b]$  плотно в  $L_1[a,b]$ .

**Задание 3 (20 баллов).** Пусть функция  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  измерима по Лебегу. Пусть задана последовательность измеримых подмножеств  $\{A_n\}$  отрезка  $[0,1]$ ,  $\mu A_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , такая, что  $f$  интегрируема по Лебегу на каждом  $A_n$ . Пусть существует  $M > 0$  такое, что

$$\int_{A_n} |f(t)| dt \leq M$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $f$  интегрируема по Лебегу на  $[0,1]$ , причём существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

#### Контрольная работа № 2

**Задание 1 (15 баллов).** Привести пример непрерывного отображения замкнутого единичного шара пространства  $l_2$  в себя, не имеющего неподвижной точки.

**Задание 2 (15 баллов).** Показать, что отображение  $f(x) = 5x^2 + 2x + 3 - \sin x$  числовой прямой в себя не имеет неподвижных точек.



**Задание 3 (20 баллов).** Вычислить интеграл Лебега  $\int_0^1 f(x) dx$ , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{для всех иррациональных } x, \text{ больших чем } 1/3, \\ x^3 & \text{для всех иррациональных } x, \text{ меньших чем } 1/3, \\ 0 & \text{в рациональных точках.} \end{cases}$$

### Контрольная работа № 3

**Задание 1 (20 баллов).** Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

методом регуляризации, найдя предварительно нормальное решение.

**Задание 2 (30 баллов).** Методом малого параметра найти три слагаемых разложения решения задачи

$$y' - \varepsilon y - \exp(y - x) = 0, \quad y(0) = -\varepsilon.$$

#### **19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в формах: письменного опроса и контрольных работ. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования, а также в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе контроля знаний на факультете компьютерных наук ВГУ.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.