

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
цифровых технологий



С.Д.Кургалин
30.06.2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.08 ТЕОРИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

02.04.01 Математика и компьютерные науки

2. Профиль подготовки/специализация: компьютерная математика

3. Квалификация (степень) выпускника: магистр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: цифровых технологий

6. Составители программы: Запрягаев Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор

7. Рекомендована: Научно-методическим советом факультета компьютерных наук (протокол № 6 от 25.06.2018)

8. Учебный год: 2019-2020

Семестр(ы): 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины: ознакомление слушателей с современным положением дел в области применения специальных функций при решении практических задач с использованием теории дифференциальных уравнений в частных производных.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: для успешного освоения необходимо предварительное изучение следующих разделов математики: интегрирование функций, обыкновенные дифференциальные уравнения.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-1	Способность находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики.	знать: методы решений дифференциальных уравнений в частных производных; способы применения специальных функций и их основные свойства; класс задач в которых используется аппарат теории специальных функций; уметь: обосновывать выбор найденных решений и их асимптотическое поведение; эффективно аппарат специальных функций для решения прикладных задач; владеть: навыком практического применения математического аппарата специальных функций для решения прикладных задач.
ОПК-2	Способность создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках.	знать: постановки классических задач и моделей в естественных науках; уметь: используя полученные знания, формулировать новые математические модели; владеть: навыками анализа получаемых моделей, навыками построения и реализации соответствующих алгоритмов.
ПК-1	Способность к интенсивной научно-исследовательской работе	знать: методологию научно-исследовательской работы; уметь: проводить самостоятельные исследования по заданному плану; владеть: навыками представления и визуализации результатов исследований и научной информации.
ПК-4	Способность к применению методов математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач.	знать: методы математического и алгоритмического моделирования; уметь: выбирать и адаптировать существующие математические методы для решения задач, воз-

		никающих в профессиональной деятельности; владеть: навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов математического моделирования.
ПК-6	Способность к собственному видению прикладного аспекта в строгих математических формулировках.	знать: области применения математики в прикладных задачах; уметь: формулировать задачи профессиональной деятельности в математической форме; владеть: навыками решения прикладных задач средствами математики.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 3/108.

Форма промежуточной аттестации: 4 семестр – зачёт.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		4 сем.
Аудиторные занятия	24	24
в том числе: лекции		
практические		
лабораторные	24	24
Самостоятельная работа	84	84
Экзамен		
Итого:	108	108

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
2. Лабораторные занятия		
2.1	Гамма-функция	Определение гамма-функции. Функциональные соотношения для гамма-функции. Логарифмическая производная гамма-функции. Асимптотическое представление гамма-функции. Определенные интегралы, связанные с гамма-функцией
2.2	Интеграл вероятности и связанные с ним функции	Интеграл вероятности и его основные свойства. Асимптотическое представление для интеграла вероятности. Интеграл вероятности от мнимого аргумента. Интегралы Френеля. Приложение к теории вероятностей.
2.3	Ортогональные полиномы	Полиномы Лежандра. Определение и производящая функция. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра. Ортогональность полиномов Лежандра. Разложение функций в ряды по полиномам Лежандра. Полиномы Эрмита. Определение и производящая функция. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов

		Эрмита. Ортогональность полиномов Эрмита. Разложение функций в ряды по полиномам Эрмита. Полиномы Лагерра. Определение и производящая функция. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра. Ортогональность полиномов Лагерра. Разложение функций в ряды по полиномам Лагерра. Общие сведения о полиномах Якоби. Общие сведения о полиномах Гегенбауэра. Формулы Родрига. Приложения ортогональных полиномов к задачам электродинамики и квантовой механики.
2.4	Цилиндрические функции	Функции Бесселя с целым положительным значком. Функции Бесселя с произвольным значком. Общее представление цилиндрических функций. Функции Бесселя второго рода. Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа. Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента. Разложение произвольных функций в ряды и интегралы по цилиндрическим функциям. Функции Эйри. Приложения цилиндрических функций.
2.5	Сферические функции	Сферические функции Лежандра. Функциональные соотношения для сферических функций. Рекуррентные соотношения. Сферические функции с целым положительным индексом. Связь с полиномами Лежандра. Сферические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа. Присоединенные сферические функции. Приложения сферических функций к задачам математической физики.
2.6	Гипергеометрические функции	Гипергеометрический ряд и его аналитическое продолжение. Элементарные свойства гипергеометрической функции. Гипергеометрическая функция, рассматриваемая как функция своих параметров. Функциональные соотношения для гипергеометрической функции. Представления различных функций через гипергеометрическую функцию. Вырожденная гипергеометрическая функция. Дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции и его интегралы. Вырожденная гипергеометрическая функция второго рода. Асимптотические представления вырожденных гипергеометрических функций для больших значений аргумента. Представления различных функций через вырожденные гипергеометрические функции. Обобщенные гипергеометрические функции. Приложения гипергеометрических функций.
2.7	Функции параболического цилиндра	Разделение переменных в уравнении Лапласа в параболических координатах. Функции Эрмита первого рода. Функциональные соотношения для функций Эрмита. Рекуррентные соотношения для функций Эрмита. Асимптотические представления функций Эрмита для больших значений аргумента. Приложение функций параболического цилиндра к квантовой механике.
2.8	Эллиптические интегралы, эллиптические функции и тэта-функции Якоби	Эллиптические интегралы. Приведение эллиптических интегралов. Периоды и особенности эллиптических интегралов. Полные эллиптические интегралы. Обращение эллиптических интегралов. Двойко-периодические функции. Общие свойства эллиптических функций. Эллиптические функции Якоби. Свойства эллиптических функций Якоби. Определение тэта-функции. Четыре типа тэта-функций Якоби. Основные формулы Якоби. Выражение эллиптических функций при помощи тэта-функций. Мнимое преобразование Якоби. Приложения эллиптических функций.
2.9	Функции Матъе	Дифференциальное уравнение Матъе. Форма решения уравнения Матъе. Уравнение Хилла. Периодические решения уравнения Матъе. Построение функций Матъе. Характер решения общего уравнения Матъе; теория Флоке. Приложения функций Матъе.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Гамма-функция			2	8	10
2	Интеграл вероятности и связанные с ним функции			4	12	16
3	Ортогональные полиномы			4	12	16
4	Цилиндрические функции			2	8	10
5	Сферические функции			2	8	10
6	Гипергеометрические функции			2	8	10
7	Функции параболического цилиндра			2	8	10
8	Эллиптические интегралы, эллиптические функции и тэ-та-функции Якоби			4	14	18
9	Функции Матье			2	6	8
	Итого:			24	84	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:

- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- методические указания и пособия;
- контрольные задания для закрепления теоретического материала;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Форма организации самостоятельной работы: подготовка к аудиторным занятиям; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Хеннер, В. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, основы

	специальных функций и интегральных уравнений / В. К. Хеннер. — Москва : Лань, 2017. — ISBN 978-5-8114-2592-1. — <URL: https://e.lanbook.com/book/96873 >.
--	--

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Холодова, С.Е. Специальные функции в задачах математической физики [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.Е. Холодова, С.И. Перегудин. — Электрон. дан. — Спб. : НИУ ИТМО (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики), 2012. — 72 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=43459
3	Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. — М. : Гос. изд-во физ.-математ. литературы. — 1963. — 358 с.
4	Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа / Э.Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон ; пер. с англ. под ред. Ф.В. Широкова. — М.: Физматлит, 1963. — Ч. 2: Трансцендентные функции. — Изд. 2-е. — 1963. — 515 с.
5	Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер ; пер. с англ. Ю.А. Брычкова; Под ред. А.П. Прудникова. — М. : Наука, 1990. — 528 с.
6	Справочник по специальным функциям: с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; пер. с англ. под ред. В.А. Диткина, Л.Н. Карамзиной. — М. : Наука, 1979. — 830 с.
7	Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра: Т.1 / Г. Бейтмен и А. Эрдейи ; пер. с англ. Н. Я. Виленина. — М. : Наука : Физматлит, 1965. — 294 с.
8	Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены [Т. 2] / Г. Бейтмен и А. Эрдейи ; пер. с англ. Н. Я. Виленина. — М. : Наука, 1966. — 295 с.
9	Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе / Г. Бейтмен и А. Эрдейи ; пер. с англ. Н. Я. Виленина. — М. : Наука : Физматлит, 1967. — 299 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
10	www.lib.vsu.ru –ЗНБ ВГУ

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы
(учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Холодова, С.Е. Специальные функции в задачах математической физики [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.Е. Холодова, С.И. Перегудин. — Электрон. дан. — Спб. : НИУ ИТМО (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики), 2012. — 72 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=43459

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости) — программное обеспечение компьютерных классов.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: лекционная аудитория, оборудованная мультимедийным проектором, компьютерный класс.

19. Фонд оценочных средств:

19.1 Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС (средства оценивания)
ОПК-1	Знать: методы решений дифференциальных уравнений в частных производных; способы применения специальных функций и их основные свойства; класс задач в которых используется аппарат теории специальных функций.	Разделы 1-9	Письменный опрос
	Уметь: обосновывать выбор найденных решений и их асимптотическое поведение; эффективно аппарат специальных функций для решения прикладных задач.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
	Владеть: навыком практического применения математического аппарата специальных функций для решения прикладных задач.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
ОПК-2	Знать: постановки классических задач и моделей в естественных науках.	Разделы 1-9	Письменный опрос
	Уметь: используя полученные знания, формулировать новые математические модели.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
	Владеть: навыками анализа получаемых моделей, навыками построения и реализации соответствующих алгоритмов.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
ПК-1	Знать: методологию научно-исследовательской работы.	Разделы 1-9	Письменный опрос
	Уметь: проводить самостоятельные исследования по заданному плану.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
	Владеть: навыками представления и визуализации результатов исследований и научной информации.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
ПК-4	Знать: методы математического и алгоритмического моделирования.	Разделы 1-9	Письменный опрос
	Уметь: выбирать и адаптировать существующие математические методы для решения задач, возникающих в профессиональной деятельности.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
	Владеть: навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов математического моделирования.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
ПК-6	Знать: области применения математики в прикладных задачах.	Разделы 1-9	Письменный опрос
	Уметь: формулировать задачи профессиональной деятельности в математической форме.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
	Владеть: навыками решения прикладных задач средствами математики.	Разделы 1-9	Лабораторные работы № 1-6
Промежуточная аттестация			Письменный опрос

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание методов решений дифференциальных уравнений в частных производных; способов применения специальных функций и их основные свойства; классов задач в которых используется аппарат теории специальных функций;
- 2) знание постановок классических задач и моделей в естественных науках;
- 3) знание методологии научно-исследовательской работы;
- 4) знание методов математического и алгоритмического моделирования;
- 5) знание области применения математики в прикладных задачах;
- 6) умение обосновывать выбор найденных решений и их асимптотическое поведение; эффективно аппарат специальных функций для решения прикладных задач;
- 7) умение, используя полученные знания, формулировать новые математические модели;
- 8) умение проводить самостоятельные исследования по заданному плану;
- 9) умение выбирать и адаптировать существующие математические методы для решения задач, возникающих в профессиональной деятельности;
- 10) умение формулировать задачи профессиональной деятельности в математической форме;
- 11) владение навыком практического применения математического аппарата специальных функций для решения прикладных задач;
- 12) владение навыками анализа получаемых моделей, навыками построения и реализации соответствующих алгоритмов;
- 13) владение навыками представления и визуализации результатов исследований и научной информации;
- 14) владение навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов математического моделирования;
- 15) владение навыками решения прикладных задач средствами математики.

Для оценивания результатов обучения на зачёте используются оценки: «зачтено» и «не зачтено».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Ответ обучающегося соответствует хотя бы половине из перечисленных критериев. Сформированные знания основных понятий, определений и теорем, изучаемых в курсе, возможно с затруднениями при воспроизведении.	Пороговый уровень	Зачтено
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует более чем половине из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе.	—	Не зачтено

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов для письменного опроса

1. Определение гамма-функции. Функциональные соотношения для гамма-функции.
2. Логарифмическая производная гамма-функции.
3. Асимптотическое представление гамма-функции.
4. Определенные интегралы, связанные с гамма-функцией.
5. Интеграл вероятности и его основные свойства.

6. Асимптотическое представление для интеграла вероятности.
7. Интеграл вероятности от мнимого аргумента.
8. Интегралы Френеля. Приложение к теории вероятностей.
9. Полиномы Лежандра. Определение и производящая функция.
10. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра.
11. Ортогональность полиномов Лежандра.
12. Разложение функций в ряды по полиномам Лежандра.
13. Полиномы Эрмита. Определение и производящая функция.
14. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита.
15. Ортогональность полиномов Эрмита.
16. Разложение функций в ряды по полиномам Эрмита.
17. Полиномы Лагерра. Определение и производящая функция.
18. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра.
19. Ортогональность полиномов Лагерра.
20. Разложение функций в ряды по полиномам Лагерра.
21. Общие сведения о полиномах Якоби.
22. Общие сведения о полиномах Гегенбауэра.
23. Формулы Родрига.
24. Приложения ортогональных полиномов к задачам электродинамики и квантовой механики.
25. Функции Бесселя с целым положительным значком.
26. Функции Бесселя с произвольным значком.
27. Общее представление цилиндрических функций.
28. Функции Бесселя второго рода.
29. Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа.
30. Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента.
31. Разложение произвольных функций в ряды и интегралы по цилиндрическим функциям.
32. Функции Эйри.
33. Приложения цилиндрических функций.
34. Сферические функции Лежандра.
35. Функциональные соотношения для сферических функций. Рекуррентные соотношения.
36. Сферические функции с целым положительным индексом. Связь с полиномами Лежандра.
37. Сферические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа.
38. Присоединенные сферические функции. Приложения сферических функций к задачам математической физики.
39. Гипергеометрический ряд и его аналитическое продолжение.
40. Элементарные свойства гипергеометрической функции.
41. Гипергеометрическая функция, рассматриваемая как функция своих параметров.
42. Функциональные соотношения для гипергеометрической функции.

43. Представления различных функций через гипергеометрическую функцию.
44. Вырожденная гипергеометрическая функция.
45. Дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции и его интегралы.
46. Вырожденная гипергеометрическая функция второго рода.
47. Асимптотические представления вырожденных гипергеометрических функций для больших значений аргумента.
48. Представления различных функций через вырожденные гипергеометрические функции.
49. Обобщенные гипергеометрические функции.
50. Приложения гипергеометрических функций.
51. Разделение переменных в уравнении Лапласа в параболических координатах.
52. Функции Эрмита первого рода.
53. Функциональные соотношения для функций Эрмита.
54. Рекуррентные соотношения для функций Эрмита.
55. Асимптотические представления функций Эрмита для больших значений аргумента.
56. Приложение функций параболического цилиндра к квантовой механике.
57. Эллиптические интегралы.
58. Приведение эллиптических интегралов.
59. Периоды и особенности эллиптических интегралов.
60. Полные эллиптические интегралы.
61. Обращение эллиптических интегралов.
62. Двояко-периодические функции.
63. Общие свойства эллиптических функций.
64. Эллиптические функции Якоби.
65. Свойства эллиптических функций Якоби.
66. Определение тэта-функции. Четыре типа тэта-функций Якоби.
67. Основные формулы Якоби.
68. Выражение эллиптических функций при помощи тэта-функций.
69. Мнимое преобразование Якоби.
70. Приложения эллиптических функций.
71. Дифференциальное уравнение Маттье.
72. Форма решения уравнения Маттье.
73. Уравнение Хилла.
74. Периодические решения уравнения Маттье.
75. Построение функций Маттье.
76. Характер решения общего уравнения Маттье; теория Флоке.
77. Приложения функций Маттье.

19.3.2 Перечень лабораторных работ

1. Гамма-функция.
2. Ортогональные полиномы.
3. Цилиндрические функции.
4. Сферические функции.
5. Эллиптические интегралы.
6. Тэта-функции.

Типовое задание для лабораторной работы

Лабораторная работа № 1 «Гамма-функция»

Цель работы: ознакомление с возможностями пакета Mathematica по работе со специальными функциями на примере гамма-функции.

Отчёт о работе проводится в виде собеседования и заключается в демонстрации работы программы, объяснении принципов работы алгоритма и ответов на дополнительные вопросы.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: ознакомиться со следующими функциями пакета Mathematica:

- $\text{Gamma}[a]$ – эйлерова гамма-функция;
- $\text{Gamma}[a, z]$ – неполная гамма-функция;
- $\text{Gamma}[a, z0, z1]$ – обобщенная неполная гамма-функция $\text{Gamma}(a, z0) - \text{Gamma}(a, z1)$;
- $\text{GammaRegularized}[a, z]$ – регуляризованная неполная гамма-функция $\text{GammaRegularized}(a, z) = \text{Gamma}(a, z) / \text{Gamma}(a)$;
- $\text{GammaRegularized}[a, z0, z1]$ – обобщенная неполная гамма-функция $Q(a, z0) - Q(a, z1)$;
- $\text{LogGamma}[z]$ – логарифм эйлеровой гамма-функции;
- $\text{PolyGamma}[z]$ – дигамма-функция;
- $\text{PolyGamma}[n, z]$ – n-я производная от дигамма-функции.

Построить графики эйлеровой гамма-функции и неполной гамма-функции при вещественном и при комплексном аргументах. Найти площади и объёмы n-мерных гиперсфер и гипершаров единичного радиуса при различных значениях n, используя гамма-функцию.

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в формах: письменного опроса и контрольных работ. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.