

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_ системного анализа и управления  
наименование кафедры, отвечающей за реализацию дисциплины

Курбатов В.Г.  
Курбатов

подпись, расшифровка подписи  
23.03.2024г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.23 Методы оптимизации

Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.03.03 Механика и математическое моделирование

2. Профиль подготовки/специализация:

Компьютерный инжиниринг в механике сплошных сред

3. Квалификация выпускника: \_\_ бакалавр \_\_\_\_\_

4. Форма обучения: \_\_ очная \_\_\_\_\_

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: \_\_ системного анализа и управления

6. Составители программы: \_\_ Е.П. Белоусова, к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_  
(ФИО, ученая степень, ученое звание)

7. Рекомендована: Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики  
(протокол № 5 от 22.03.2024)

(наименование рекомендующей структуры, дата, номер протокола,

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: 2025/2026 \_\_\_\_\_

Семестр(ы): \_\_\_\_\_ 6 \_\_\_\_\_

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- изучение основ теории экстремальных задач, получение необходимых концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки существующих алгоритмов решения оптимизационных задач и, если необходимо, разработки новых методов и подходов решения новых типов таких задач для формирования умений и навыков применения методов математического и алгоритмического моделирования, современного математического аппарата в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности.

Задачи учебной дисциплины:

- дать студентам общее представление о прикладных задачах оптимизации;
- ознакомить с основными теоретическими фактами;
- изучить основные классы методов;
- обучить использованию методов решения прикладных задач оптимизации;
- расширить и систематизировать знания в области методов математического и алгоритмического моделирования;
- обучить анализу поставленной задачи, подбору необходимых методов математического и алгоритмического моделирования для ее решения;
- обучить проведению сравнительного анализа полученного решения с аналогами.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к базовому циклу. Для её успешного освоения требуется знание основных разделов курса математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-2	Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности	ОПК-2.1	Накапливает и систематизирует знания в области методов математического и алгоритмического моделирования	Знать: методы математического моделирования. Уметь: систематизировать знания в области методов математического и алгоритмического моделирования. Владеть: способами систематизации знаний в области методов математического и алгоритмического моделирования.
		ОПК-2.2	Анализирует задачу, подбирает необходимые методы математического и алгоритмического моделирования для ее решения	Знать: методы математического моделирования. Уметь: анализировать задачу. Владеть: методами математического и алгоритмического моделирования.
		ОПК-2.3	Проводит сравнительный анализ полученного решения с аналогами	Знать: аналоги решений. Уметь: проводить сравнительный анализ. Владеть: методами сравнительного анализа полученного решения с аналогами.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 108 \_\_\_/\_\_\_3\_\_\_.**

**Форма промежуточной аттестации(зачет/экзамен) \_\_\_\_\_зачет\_\_\_\_\_**

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость		
	Всего	По семестрам	
		6 семестра	...
Аудиторные занятия	64	64	
в том числе:	лекции	32	32

	практические	32	32		
	лабораторные				
Самостоятельная работа		44	44		
Форма промежуточной аттестации (зачет – час.)					
Итого:		108	108		

### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Формализация задач и классический метод их решения	Формализация задач и классический метод их решения	Методы оптимизации 01.03.03
1.2	Элементы линейного программирования	Примеры, приводящие к постановке задачи линейного программирования. Теорема существования для конечномерной задачи линейного программирования. Симплексный метод. Графический метод решения задач линейного программирования.	Методы оптимизации 01.03.03
1.3	Элементы нелинейного программирования	Задача безусловной минимизации. Задача условной минимизации. Необходимые условия минимума в гладкой задаче с ограничениями типа равенств и неравенств. Метод множителей Лагранжа.	Методы оптимизации 01.03.03
1.4	Элементы выпуклого программирования	Выпуклые множества и выпуклые функции. Критерии выпуклости для гладких функций. Решение задач выпуклого программирования.	Методы оптимизации 01.03.03
1.5	Вариационное исчисление	Простейшая задача вариационного исчисления первого и высших порядков. Уравнение Эйлера. Многомерный случай. Задача Больца.	Методы оптимизации 01.03.03
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Формализация задач и классический метод их решения	Формализация задач и классический метод их решения	Методы оптимизации 01.03.03
2.2	Элементы линейного программирования	Примеры, приводящие к постановке задачи линейного программирования. Теорема существования для конечномерной задачи линейного программирования. Симплексный метод. Графический метод решения задач линейного программирования.	Методы оптимизации 01.03.03
2.3	Элементы нелинейного программирования	Задача безусловной минимизации. Задача условной минимизации. Необходимые условия минимума в гладкой задаче с ограничениями типа равенств и неравенств. Метод множителей Лагранжа.	Методы оптимизации 01.03.03
2.4	Элементы выпуклого программирования	Выпуклые множества и выпуклые функции. Критерии выпуклости для гладких функций. Решение задач выпуклого программирования.	Методы оптимизации 01.03.03
2.5	Вариационное исчисление	Простейшая задача вариационного исчисления первого и высших порядков. Уравнение Эйлера. Многомерный случай. Задача Больца.	Методы оптимизации 01.03.03

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Формализация задач и классический метод их решения	4	4		4	12
2.	Элементы линейного программирования	7	7		10	24
3.	Элементы нелинейного программирования	7	7		10	24
4.	Элементы выпуклого программирования	7	7		10	24
5.	Вариационное исчисление	7	7		10	24
	Итого:	32	32		44	108

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Курс предполагает отведение большого числа разделов на самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами данные разделы. Материал по каждой теме излагается последовательно с использованием ранее введенных определений, обозначений и доказательств. Необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного на занятиях материала.

Желателен просмотр материала по данной учебной дисциплине с опережением лекций с использованием рекомендуемой в данной учебной программе литературы.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Пантелейев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелейев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 512 с. — ISBN 978-5-8114-1887-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/67460">https://e.lanbook.com/book/67460</a> (дата обращения: 22.01.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2.	<b>Васильев, Федор Павлович.</b> Методы оптимизации : [учебник для студ. вузов, обуч. по специальности ВПО 010501 "Прикладная математика и информатика"] : [в 2 ч.] / Ф.П. Васильев. — Москва : Изд-во МЦНМО, 2011. — ISBN 978-5-94057-706-5. Ч. 1: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. — Изд. новое, перераб. и доп. — 2011. — 619 с. : ил. — Библиогр.: с. 570-610. — Предм. указ.: с. 611-614. — ISBN 978-5-94057-707-2.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1.	Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа/Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — М.: Лань, 2009- 272с.
2.	Галеев Э.М. Оптимизация: Теория. Примеры. Задачи/ Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. — М., Эдиториал УРСС, 2010. — 336 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. — Режим доступа: <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a>
2.	Веб-ресурс с подробным описанием функций библиотеки Matplotlib: <a href="https://matplotlib.org/users/beginner.html">https://matplotlib.org/users/beginner.html</a> .
3.	Методы оптимизации 01.03.03 / Е.П. Белоусова — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы, онлайн-курсы, ЭУМК

#### 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Методы оптимизации 01.03.03 / Е.П. Белоусова — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <a href="https://edu.moodle.ru">https://edu.moodle.ru</a> .

#### 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Методы оптимизации 01.03.03», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

---

#### 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: учебная аудитория для проведения лекций и практических занятий: специализированная мебель, доска (меловая или маркерная).

394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. 408п, 409п, 404п, 410п, 502п, 504п.

В случае применения электронного обучения, дистанционных образовательных технологий допускается замена специально оборудованных помещений их виртуальными аналогами, позволяющими обучающимся осваивать умения и навыки, предусмотренные профессиональной деятельностью.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Формализация задач и классический метод их решения	ОПК-2	ОПК-2.1	Контрольная работа
2.	Элементы линейного программирования	ОПК-2	ОПК-2.1	Контрольная работа
3.	Элементы нелинейного программирования	ОПК-2	ОПК-2.2	Контрольная работа
4.	Элементы выпуклого программирования	ОПК-2	ОПК-2.2	Контрольная работа
5.	Вариационное исчисление	ОПК-2	ОПК-2.3	Контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				Перечень вопросов Практическое задание

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Перечень заданий для контрольной работы

1. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используется два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы даны в таблице.

Исходный продукт	Расход на 1 кг сливочного мороженого	Расход на 1 кг шоколадного мороженого	Запас, кг
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

2. Задача продавца газет.
3. Задача управления запасами.
4. Задача теории расписаний.
5. Задача замены автомобильного парка.

Контрольная работа проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде письменной работы. Ограничение по времени— 1 час 35 минут.

*Требования к выполнению заданий контрольной (или шкалы и критерии оценивания)*

1. Правильно решено 5 заданий и больше – отлично.
2. Правильно решено 4 задания – хорошо.
3. Правильно решено 2,3 задания – удовлетворительно.
4. Правильно решено меньше двух заданий или не решено ни одного задания – неудовлетворительно.

---

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

**Перечень вопросов к зачету:**

1. Формализация задач.
2. Классический метод минимизации.
3. Симплексный метод.
4. Графический метод решения задач линейного программирования.
5. Графический метод решения задач нелинейного программирования.
6. Минимизация функций нескольких переменных без ограничений.
7. Задача на условный экстремум функции нескольких переменных с ограничениями типа равенств. Метод множителей Лагранжа.
8. Задача на условный экстремум функции нескольких переменных с ограничениями типа равенств и неравенств.
9. Выпуклые множества и выпуклые функции.
10. Задачи выпуклого программирования.
11. Простейшая задача вариационного исчисления.
12. Простейшая задача вариационного исчисления высших порядков.
13. Задача Больца.

**Перечень практических заданий**

**Контрольно-измерительные материалы № 1**

1. В данный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади.
2. В данный шар вписать конус с наибольшим объемом.
3. В данный шар вписать прямой конус с наибольшей боковой поверхностью.

**Контрольно-измерительные материалы № 2**

1. Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя различными способами. При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3000 изделий, при втором – 4000 изделий. Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?
2. Две фабрики производят продукцию из сырья трех типов. Запасы сырья для готового производства составляют соответственно 11, 7 и 10 единиц. Первая фабрика для изготовления условной единицы продукции, цена которой равна 1, потребляет сырья указанных типов 2,1 и 2 единицы соответственно. Для второй фабрики цена продукции равна 2, а удельные потребности в сырье составляют 4, 3 и 1 единицу. В прошедшем году плановое задание первой фабрики составляло 3, а второй – 1 единицу продукции. Определить задание на предстоящий год, которое обеспечивало бы максимальную суммарную продукцию фабрик

Для оценивания результатов обучения на зачете используется шкала: «зачет», «незачет».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности	Шкала оценок
---------------------------------	--------------------------	--------------

компетенций	
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), применять теоретические знания для решения практических задач в области.	Повышенный уровень Зачет
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному (двум) из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	Базовый уровень Зачет
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум(трем) из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичные знания.	Пороговый уровень Зачет
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем(четырем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки....,	– Незачет

**20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ**

**Вопросы с вариантами ответов**

1. Если число A разложить на два слагаемых  $u_1$  и  $u_2$ , то какое наибольшее значение может принять произведение  $u_1 \cdot u_2$ .

a)  $4A^2$

б)  $2A$

в)  $\frac{A^2}{4}$

г)  $A-1$

Ответ: в).

2. Решить задачу  $I(u) = u_1^2 - u_1 u_2 + u_2^2 - 2u_1 + u_2 \rightarrow \inf$

а) 0

б) -1

в) -3

г) 2

Ответ: б).

3. Решить задачу  $4u_1 + 3u_2 \rightarrow \inf$  при ограничении  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ .

а) 45

б) -3

в) -5

г) 0

Ответ: в).

4. Решить задачу  $u_1^2 + u_2^2 \rightarrow \inf$  при ограничении  $3u_1 + 4u_2 = 1$ .

а) 0

б) 1/3

в) -78

г) 1/25

Ответ: г).

5. Решить задачу  $\int_1^2 t^2 \dot{u}^2 dt \rightarrow \inf$ ,  $u(1) = 3$ ,  $u(2) = 1$

а) -12

б) 36

в) -4

г) 0,8

Ответ: в).

6. Решить задачу  $\int_0^1 (u - \dot{u}^2) dt \rightarrow \inf$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$ .

а) 97

б) -61

в) 0

г) 5/8

Ответ: г).

7. Решить задачу  $\int_0^1 \ddot{u}^2 dt \rightarrow \inf$ ,  $u(0) = u(1)$ ,  $\dot{u}(0) = 0$ ,  $\dot{u}(1) = 1$

а) 14

б) 3.5

в) 4

г) 0.25

Ответ: в).

8. Решить задачу  $\int_0^1 (\ddot{u}^2 - 48u) dt \rightarrow \inf$ ,  $u(0) = 1$ ,  $\dot{u}(0) = -4$ ,  $u(1) = \dot{u}(1) = 0$

а) -9

б) -12

в) -0.8

г) -24

Ответ: а).

9. Решить задачу  $\int_0^1 (\dot{u}^2 - u) dt + u^2(1) \rightarrow \inf$

а) 9

б) -4

в) 0.75

г) 26

Ответ: в).

10. Решить задачу  $\int_0^1 \dot{u}^2 dt + 4u^2(0) - 5u^2(1) \rightarrow \inf$

а) -2

б) 0

в) 24

г) 12

Ответ: б).

11. Решить задачу  $\int_0^1 e^{-t} \ddot{u}^2 dt \rightarrow \inf$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = 1$ ,  $u(1) = e$ ,  $\dot{u}(1) = 2e$ .

а)  $e^2$

б)  $9e - 4$

в) 0

г)  $e^2 + 1$

Ответ: б).

12. Решить задачу  $u_1 u_2 u_3 \rightarrow \inf$ ,  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ ,  $u_1 + u_2 + u_3 \leq 0$

А) 90

Б) -67

В) 1/25

Г)  $1/9\sqrt{3}$

Ответ: г)

13. Решить задачу  $e^{(u_1-u_2)} - u_1 - u_2 \rightarrow \inf$ ,  $u_1 + u_2 \leq 1$ ,  $u_1 \geq 0$ ,  $u_2 \geq 0$

А)  $2e$

Б)  $1/e^2$

В)  $\frac{1}{e} - 1$

Г)  $e + 1$

Ответ: в).

#### Вопросы с кратким текстовым ответом

1. Функция  $I(u) = au^2 + bu + c$  является выпуклой при  $a \geq 0$ ?

Ответ: да.

2. Является ли выпуклой функция  $I(u) = u \ln u + (1 - u) \ln(1 - u)$ ,  $u \in (0,1)$ ?

Ответ: да.

3. Решить графически задачу  $I(u) = u_1 + u_2 \rightarrow \inf$ ,

$$\begin{cases} 2u_1 + 4u_2 \geq 8, \\ u_1 + 2u_2 \leq 1 \end{cases}$$

Ответ: задача не имеет решения.

4. Решить графически задачу  $I(u) = 2u_1 + 4u_2 \rightarrow \inf$ ,

$$\begin{cases} 3u_1 + 2u_2 \geq 11, \\ -2u_1 + u_2 \leq 2, \\ u_1 - 3u_2 \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: 10.

5. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используется два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы даны в таблице

Исходный продукт	Расход на 1 кг сливочного мороженого	Расход на 1 кг шоколадного мороженого	Запас, кг
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более, чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 ед., а шоколадного – 14 ед.

Какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Ответ: 312,5 и 300.

*Описание технологии проведения:*

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 1 час 30 минут

*Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:*

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

- 1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности) :
    - 1 балл – указан верный ответ;
    - 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).
  - 2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень
- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**