МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.
подпись, расшифровка подписи
25.05.2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.15 Функциональный анализ

1. Код и наименование специальности: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Специализация: Современные методы теории функций в математике и механике, Теория функций и приложения

3. Квалификация выпускника: Математик. Механик. Преподаватель

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: функционального анализа и операторных уравнений

6. Составители программы: Каменский Михаил Игоревич, д.ф.-м.н., профессор; Бондарев Андрей Сергеевич, к.ф-м.н., преподаватель; математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений

7. Рекомендована: научно-методическим советом математического факультета, протокол от 25.05.2023, № 0500-06

8. Учебный год: 2024-2025, 2025-2026 **Семестр(ы):** 4-6

9.Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели освоения учебной дисциплины:

- доведение до студентов идей и методов функционального анализа, который является языком современной математики, где широко используются понятия функционального пространства (бесконечномерного) и отображения таких пространств.

Задачи учебной дисциплины:

- развитие у студентов двойного зрения: с одной стороны умения следить за внутренней логикой развития теорий функционального анализа, а с другой не упускать из вида обслуживаемую этими теориями проблематику классического и даже прикладного анализа, в частности, вопросов, связанных с интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерры.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина входит в обязательную часть блока Б1.Дисциплины (модули) учебного плана по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	**Знать:** - актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики. **Уметь:** - использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности. **Владеть:** - навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
		ОПК 1.2	Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности	
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 9/324.

Форма промежуточной аттестации – зачет (4 семестр), экзамен (6 семестр)

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость						
	Всего	По семестрам					
		4 семестр		5 семестр		6 семестр	
		ч.	ч., в форме ПП	ч.	ч., в форме ПП	ч.	ч., в форме ПП
Аудиторные занятия	134	68		16		50	
в том числе: лекции	34	0		0		34	
практические	100	68		16		16	
лабораторные	0	0		0		0	
Самостоятельная работа	154	76		20		58	
Форма промежуточной аттестации *(экзамен – __час.)*	36	зачёт – 0 час.				Экзамен – 36 час.	
Итого:	324	144		36		144	

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	**Наименование раздела дисциплины**	**Содержание раздела дисциплины**	**Ссылка на электронный курс**
1. Лекции			
1.1	Линейные ограниченные операторы	Линейные операторы и функционалы (определения). Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке. Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью. Теорема об ограниченности линейного оператора, определенного на конечномерном пространстве.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6061
		Норма линейного ограниченного оператора (определение). Теорема о вычислении нормы оператора. Оператор Фредгольма в пространстве $C[a,b]$ и его норма. Оператор дифференцирования в $C[a,b]$ и из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$.	
		Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости). Следствие для сопряженного пространства. Произведение линейных операторов.	
		Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью. Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема). Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле сильной сходимости).	
		Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения). Теорема о линейности обратного оператора.	
1.2	Обратимые операторы	Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного. Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе. Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.	
		Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).	
		Резольвента линейного оператора и его спектр (определения). Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра. Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра	

1.3	Замкнутые операторы	. Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора. Замкнутость оператора дифференцирования в $C[a,b]$.	
		Теорема о замкнутости оператора, обратного к замкнутому, следствие для непрерывно обратимого оператора. Декартово произведение линейных нормированных пространств (линейные операции, норма и полнота). График линейного оператора. Лемма о графике замкнутого оператора. Теорема о замкнутом операторе, определенном на всем пространстве.	
1.4	Линейные ограниченные функционалы	Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха (доказательство для сепарабельного вещественного пространства). Три следствия. Лемма о биортогональных системах.	
		Общий вид линейных ограниченных функционалов в пространствах: конечномерном, $l_p\ (1<p<\infty)$, гильбертовом, $L_p[a,b](1<p<\infty)$ (случай $p\neq 2$ без доказательства).	
		Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства. Слабая сходимость элементов в нормированных пространствах (определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела.	
1.5	Слабая сходимость элементов	Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств. Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение). Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества. Теорема о слабой относительной компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства).	
1.6	Сопряженные операторы	Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора). Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a,b]$. Теорема о линейности и норме сопряженного оператора. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.	
1.7	Вполне непрерывные операторы	Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство. Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному. Вполне непрерывные операторы и слабая сходимость (две леммы и теорема).	
		Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Теория Рисса – Шаудера линейных уравнений второго рода. Лемма о множестве значений операторов $I-A$ и $I-A^*$.	
1.8	Линейные уравнения второго рода	Первая, вторая и третья теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами.	
		2. Практические занятия	

2.1	Метрические пространства	Определение метрического пространства. Примеры. Шары. Ограниченные множества.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911
		Сходимости в метрических пространствах. Свойства сходящихся последовательностей. Непрерывность метрики по совокупности переменных. Примеры	
		Полнота метрических пространств. Примеры полных пространств. Пример неполного пространства	
		Точки прикосновения и замыкания множеств. Свойствах операции замыкания. Теорема о точки прикосновения множества. Предельной и изолированной точки.	
		Замкнутые множества. Теорема об объединении и пересечении замкнутых множеств	
		Внутренние точки. Операция взятия внутренности множества и ее свойства. Теорема о связи операций замыкания и взятия внутренности множества.	
		Открытые множества. Теорема о связи открытости множества и замкнутости его дополнения. Теорема о свойствах открытых множеств.	
		Построение ограниченных открытых и замкнутых множеств на прямой	
		Теорема о полноте подпространства. Теорема о вложенных шарах.	
		Совершенные, плотные, всюду плотные, нигде не плотные множества. Теорема о пополнении	
		Множества первой и второй категорий. Теорема Бэра.	
		Сепарабельного пространства. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств	
		Непрерывные отображения метрических пространств. Теорема об эквивалентности определений непрерывности через ε, δ и последовательности. Две теоремы о непрерывных функциях и прообразах открытых и замкнутых множеств.	
		Условие Липшица и сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений (с оценкой погрешности). Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.	
		Относительно компактного и компактного множества. Теорема об ограниченности относительно компактного множества. Теорема Вейерштрасса.	
		Вполне ограниченного множества. Теорема об ограниченности вполне ограниченного множества. Теорема Хаусдорфа	
		Ограниченные, равностепенно непрерывные, относительно компактные множества в C[a,b] (теорема Арцела).	
2.2	Линейные пространства	Линейное пространство (определение и простейшие свойства). Примеры линейных пространств.	
		Выпуклое множество. Линейная зависимость и независимость элементов. Линейное многообразие	
		Размерность линейного многообразия. Базис линейного многообразия. Прямая сумма линейных многообразий.	
2.3	Нормированные пространства	Нормированное пространство. Определения и простейшие свойства. Примеры нормированных пространств.	
		Ряды элементов нормированного пространства. Сходящиеся и абсолютно сходящиеся ряды.	
		Эквивалентные нормы (определение и простейшие свойства). Теорема об эквивалентности норм в любом конечномерном нормированном пространстве.	
		Замкнутость конечномерного линейного многообразия. Полнота конечномерного линейного пространства.	
		Разрешимость интегральных уравнений Вольтерра второго рода.	
		Компактность и конечномерность (лемма Рисса, теорема об относительной компактности всякого ограниченного множества в нормированном пространстве).	

2.4	Пространства со скалярным произведением	Линейное пространство со скалярным произведением (определение). Неравенство Коши - Буняковского, норма, непрерывность скалярного произведения. Определение гильбертова пространства. Примеры пространств со скалярным произведением.
		Свойство ортогональности. Теорема о разложении элемента в сумму проекций.
		Теорема о плотности линейного многообразия в гильбертовом пространстве.
		Ортогональные системы элементов. Теорема об ортогональной системе в сепарабельном пространстве. Процесс ортогонализации Шмидта.
		Задача о наилучшей аппроксимации. Неравенство Бесселя и сходимость ряда Фурье.
		Замкнутая ортонормированная система элементов (определение, сходимость ряда Фурье). Теорема о полной ортонормированной системе элементов.
2.5	Измеримые функции и множество C^+	Множества меры нуль. Ступенчатые функции, действия над ними.
		Измеримые функции, действия над ними. Интегрирование ступенчатых функций. Свойства интеграла. Две леммы о последовательностях ступенчатых функций.
		Множество функций C^+, действия над функциями из C^+. Конечность почти всюду функций из C^+.
		Интеграл в множестве C^+. Простейшие свойства интеграла в C^+. Теорема о предельном переходе в C^+ под знаком интеграла. Следствие.
		Критерий интегрируемости по Риману функции $x(t)$ в терминах функций $\underline{x}$ и $\overline{x}$, следствие. Теорема об интегрируемости функции по Риману в терминах последовательностей ступенчатых функций. Функции x, $\tilde{x}$ и доказательство равенств почти всюду $x = \underline{x}$, $\tilde{x} = \overline{x}$. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману
2.6	Суммируемые функции и интеграл Лебега	Суммируемые функции (определение). Действия над суммируемыми функциями. Интеграл в классе суммируемых функций (определение). Свойства интеграла. Лемма о представлении суммируемой функции. Теорема Беппо Леви, следствия 1 и 2.
		Теорема о связи несобственного интеграла Римана для неотрицательной функции с интегралом Лебега. Пример функции несобственно интегрируемой по Риману, но не суммируемой.
		Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (три леммы). Следствия 1 и 2. Теорема Фату.
2.7	Мера множества	Определение измеримого множества и его меры. Простейшие свойства измеримых множеств. Теорема об объединении измеримых множеств, следствие для пересечения измеримых множеств. Теорема о мере объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств. Теорема о мере объединения расширяющейся последовательности измеримых множеств. Следствие о мере объединения измеримых множеств. Следствие о мере пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.
		Существование неизмеримого множества (множество Лузина). Структура измеримого множества положительной меры.
2.8	Теория Лебега	Внешняя мера множества. Теорема о внешней мере измеримого множества. Теорема об измеримости множества в терминах внешней меры. Определение измеримого множества по Лебегу в терминах внешней и внутренней меры.
		Функции, измеримые по Лебегу. Теорема о множествах функций, измеримых по Лебегу и по Риссу.
		Определение по Лебегу интеграла от ограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении интеграла по Лебегу и интеграла по Риссу от ограниченной измеримой функции. Определение по Лебегу

		интеграла от неограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении множества функций, интегрируемых по Риссу, с множеством функций, интегрируемых по Лебегу.	
2.9	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных	Интегрирование по измеримому множеству. Простейшие свойства. Теорема об интегрировании по объединению измеримых множеств. Теорема о суммируемости неотрицательной функции на объединении измеримых множеств. Оценка интеграла по измеримому множеству. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.	
		Случай бесконечного промежутка. Доказательство измеримости предела измеримых функций. Мера пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.	
		Случай функции двух независимых переменных. Теорема Фубини (без док-ва). Теорема о суммируемости по прямоугольнику функции, для которой существует один из повторных интегралов, два следствия.	
2.10	Пространства суммируемых функций	Пространства $L_p[a,b]$. (определение и линейность для $0 \leq p < \infty$). Неравенство Гельдера. Норма для случая $1 \leq p < \infty$.	
		Полнота пространства $L_p[a,b]$. Пространство $L_\infty[a,b]$ (определение и норма).	
2.11	Линейные ограниченные операторы	Линейные операторы и функционалы (определения). Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке. Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6061
		Норма линейного ограниченного оператора (определение). Теорема о вычислении нормы оператора.	
		Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости).	
		Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью.	
		Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения). Теорема о линейности обратного оператора.	
2.12	Обратимые операторы	Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного. Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе. Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.	
		Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).	
		Резольвента линейного оператора и его спектр (определения). Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра. Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра.	
2.13	Замкнутые операторы	Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора.	
2.14	Линейные ограниченные функционалы	Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха.	
		Общий вид линейных ограниченных функционалов в некоторых пространствах.	
		Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства. Слабая сходимость элементов в нормированных пространствах	

		(определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела.	
2.15	Слабая сходимость элементов	Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств. Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение). Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества. Теорема о слабой относительной компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства).	
2.16	Сопряженные операторы	Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора). Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a,b]$. Теорема о линейности и норме сопряженного оператора. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.	
2.17	Вполне непрерывные операторы	Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство. Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному. Вполне непрерывные операторы и слабая сходимость (две леммы и теорема).	
2.18	Линейные уравнения второго рода	Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Теория Рисса – Шаудера линейных уравнений второго рода. Лемма о множестве значений операторов $I-A$ и $I-A^*$.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Лабораторные	Практические	Самостоятельная работа	Всего
1.	Метрические пространства			38	34	72
2.	Линейные пространства			4	8	12
3.	Нормированные пространства			16	17	33
4.	Пространства со скалярным произведением			10	17	27
5.	Измеримые функции и множество C^+			4	4	8
6.	Суммируемые функции и интеграл Лебега			3	2	5
7.	Мера множества			3	3	6
8.	Теория Лебега			2	4	6
9.	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и			2	3	5

	функции нескольких переменных					
10	Пространства суммируемых функций			2	4	6
11	Линейные ограниченные операторы	5		2	10	17
12	Обратимые операторы	4		2	8	14
13	Замкнутые операторы	4		2	6	12
14	Линейные ограниченные функционалы	4		2	10	16
15	Слабая сходимость элементов	4		2	6	12
16	Сопряженные операторы	5		2	6	13
17	Вполне непрерывные операторы	4		2	6	12
18	Линейные уравнения второго рода	4		2	6	12
19	Контроль					36
	Всего	34	0	100	154	324

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:
- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- работа с конспектами лекций;
- методические указания и пособия;
- контрольные задания для закрепления теоретического материала;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Функциональный анализ» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (контрольным работам) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (4 семестр – зачет, 6 семестр – экзамен).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Смагин, В.В. Линейные операторы и функционалы [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. — Свободный доступ из интрасети ВГУ. — Текстовый файл <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m11-200.pdf>.
2	Смагин, Виктор Васильевич. Действительный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие

	/ В.В. Смагин; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл .— <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf>.
3	Смагин, Виктор Васильевич. Функциональные пространства. Вводный курс [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Воронежский государственный университет, Математический факультет, 2017 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-92.pdf>.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учебное пособие для студ. мат. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука. — 1968. — 496 с.
2	Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь ; пер. с фр. Д.А. Василькова под ред. С.В. Фомина; ред. С.А. Теляковский .— Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Мир, 1979 .— 587 с.
3	Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. — М. : Наука. — 1968. — 288 с.
4	Шилов, Георгий Евгеньевич. Математический анализ. Второй специальный курс : учебное пособие для гос. ун-тов / Г.Е. Шилов .— М. : Наука, 1965 .— 327 с.
5	Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин. — Изд. 4-е, испр. — М.: Физматлит. — 2007. — 488 с.
6	Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2009. — 272 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

№ п/п	**Ресурс**
1	Электронная библиотека ЗНБ ВГУ https://lib.vsu.ru/
2	Электронно-библиотечная система "Лань" https://e.lanbook.com/
3	Электронно-библиотечная система "Консультант студента" http://www.studmedlib.ru

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=245
2	Смагин В.В. Метрические пространства. Пособие по курсу ``Функциональный анализ``. Специальность 010101 (010100) -- Математика // Воронеж. гос. ун-т. Воронеж. 2005. 35 с.
3	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации учебной дисциплины проводятся различные типы лекций: вводная лекция, лекция-информация, лекция-диалог; а также практических занятий, на которых осуществляется решение задач и устные опросы по темам занятия.

Дисциплина может реализовываться с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. При проведении занятий в дистанционной форме используются технические и информационные ресурсы Образовательного портала "Электронный университет ВГУ" (https://edu.vsu.ru), базирующегося на системе дистанционного обучения Moodle, развернутой в университете, а также другие доступные ресурсы в сети Интернет.

Самостоятельная работа регламентируется Положением об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, оснащенные специализированной мебелью.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-4	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Контрольные работы 1-2
2.	Разделы 5-10	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Контрольная работа 3
3.	Разделы 11-18	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Контрольная работа 4
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт, экзамен				Перечень вопросов к зачёту и экзамену из п.20.2

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольные работы

Комплект заданий для контрольной работы № 1

Вариант 1

Задание 1. Доказать полноту пространства *s*.

Задание 2. Показать, что в дискретном метрическом пространстве каждое множество открыто.

Задание 3. Доказать компактность всякого конечного множества в метрическом пространстве.

Задание 4. Пусть множества A и B ограничены в X – МП. Показать, что множество $A \cup B$ также ограничено в X.

Вариант 2

Задание 1. Может ли в метрическом пространстве шар радиуса 4 быть строгим подмножеством шара радиуса 3?

Задание 2. Доказать полноту пространства *m.*

Задание 3. Верно ли, что дополнение к всюду плотному множеству является нигде не плотным?

Задание 4. Доказать, что объединение конечного числа компактных множеств есть множество компактное.

Комплект заданий для контрольной работы № 2

Вариант 1

Задание 1 Доказать, что пересечение любой системы выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Задание 2 Показать, что замыкание открытого шара в линейном нормированном пространстве есть соответствующий замкнутый шар.

Задание 3 Показать, что внутренность замкнутого шара в линейном нормированном пространстве есть соответствующий открытый шар.

Вариант 2

Задание 1 Доказать, что в линейном нормированном пространстве замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Задание 2 Показать, что всякий шар в линейном нормированном пространстве есть выпуклое множество

Задание 3 Пусть A и B множества в линейном нормированном пространстве. Доказать, что если множества A и B ограничены, то множество A+B ограничено.

Комплект заданий для контрольной работы №3.

Вариант 1

Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, быть множеством меры нуль?

Вариант 2

Привести пример суммируемой функции, квадрат которой не суммируем.

Комплект заданий для контрольной работы №4.

№1. Пусть *X*,*Y* – нормированные пространства. Выяснить, совпадает ли область определения $D(A) = \{x \in X | Ax \in Y\}$ оператора *A* с нормированным пространством *X*. Является ли оператор *A* линейным, непрерывным оператором из *D*(*A*) в *Y*? $X = L_2[0;1], Y = L_1[0;1], (Ax)(t) = |x(t)|$.

№2. Доказать, что оператор $A: X \to Y$ является линейным ограниченным, и найти его норму. $A: l_7 \to l_7, Ax = (0,0,\frac{x(1)}{2},\frac{x(2)}{2^2},...,\frac{x(k)}{2^k},...)$

№3. Для последовательности операторов $(A_n) \subset LB(X,Y),$ *X,Y*∈*Norm* и $A \in LB(X,Y)$ установить: 1) сходится ли (A_n) поточечно (сильно) к оператору *A*; 2) сходится ли (A_n) по норме к оператору *A*. $A_n x = (x(1),...,x(n),0,0,...), A = 1_{l_1}, X = Y = l_1$

№4. Пусть $A: X \to Y$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор A^{-1}, и построить его. $A: l_1 \to l_1$, $Ax = ((1-1/2)^2 x_1, (1-1/3)^3 x_2, (1-1/4)^4 x_3, ...)$.

№5. Пусть E, F – ЛНП, A – замкнутый линейный оператор из E в F. Доказать, что множество нулей N(A) оператора A является подпространством пространства E.

Описание технологии проведения

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Обучающийся получает комплект заданий контрольной работы и в течение двух академических часов должен предоставить преподавателю письменный ответ на задания контрольной работы. При этом обучающемуся запрещено пользоваться любыми вспомогательными ресурсами, как то: учебники, методические пособия, конспекты лекций и практических занятий, ресурсы сети Интернет.

Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (зачета).

В условиях применения электронного обучения и дистанционных образовательных технологий все выполняемые задания текущих аттестаций (контрольная работа) обучающиеся выставляют для проверки в личных кабинетах в электронном курсе на портале «Электронный университет ВГУ». – Moodle:URL:http://www.edu.vsu.ru/.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Для оценивания результатов обучения на контрольной работе используются следующие показатели:

1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
2) умение связывать теорию с практикой;
3) умение применять полученные знания в практическом задании.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по билетам к зачёту и экзаменационным билетам, соответственно.

Перечень вопросов к зачету:

1. Неравенство Юнга для конечных сумм, неравенство Гельдера для конечных сумм.
2. Неравенство Гельдера для конечных сумм, неравенство Минковского для конечных сумм.
3. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.
4. Определения относительно компактного и компактного множества. Теорема об ограниченности относительно компактного множества. Теорема Вейерштрасса.
5. Свойство ортогональности (определения ортогональных элементов, элемента ортогонального множеству, ортогонального дополнения). Теорема о разложении элемента в сумму проекций.
6. Ортогональная сумма подпространства. Формулировка теоремы о плотности линейного многообразия в гильбертовом пространстве.
7. Условие Липшица и сжимающие отображения (определения). Принцип сжимающих отображений (с оценкой погрешности).
8. Теорема Хаусдорфа.
9. Линейное пространство со скалярным произведением (определение, простейшие свойства).
10. Неравенство Коши-Буняковского, норма, свойство непрерывности скалярного произведения.
11. Определение гильбертова пространства. Примеры пространств со скалярным произведением.

12. Определение сходимости в метрических пространствах. Сходимость в пространствах C[a,b], s.
13. Совершенные, плотные, всюду плотные, нигде не плотные множества (определения). Множества первой и второй категорий (определения и примеры). Теорема Бэра.
14. Линейные пространства (определение ЛП, простейшие свойства, примеры ЛП).
15. Теорема об относительной компактности множества в конечномерном ЛНП.
16. Определения точки прикосновения и замыкания множества. Теорема о свойствах операции замыкания множеств. Теорема о необходимом и достаточном условии для точки прикосновения множества.
17. Две теоремы о непрерывных функциях и прообразах открытых и замкнутых множеств.
18. Определения замкнутого отрезка и выпуклого множества. Линейная зависимость и независимость элементов. Линейное многообразие, линейная оболочка (определения, две леммы).
19. Формулировка теоремы об эквивалентности норм в конечномерном нормированном пространстве.
20. Замкнутость конечномерного линейного многообразия. Полнота конечномерного нормированного пространства.

Перечень вопросов к экзамену:

1.Линейные операторы и функционалы (определения).
2. Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке.
3.Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью.
4.Теорема об ограниченности линейного оператора, определенного на конечномерном пространстве.
5.Норма линейного ограниченного оператора (определение).
6.Теорема о вычислении нормы оператора.
7.Оператор Фредгольма в пространстве $C[a,b]$ и его норма.
8.Оператор дифференцирования в $C[a,b]$ и из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$.
9.Пространство линейных ограниченных операторов.
10.Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости). Следствие для сопряженного пространства.
11.Произведение линейных операторов.
12.Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью.
13.Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема).
14. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле сильной сходимости).
15.Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения).
16.Теорема о линейности обратного оператора.
17.Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного.
18.Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе.
19.Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.
20.Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).
21.Резольвента линейного оператора и его спектр (определения).
22.Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра.
23.Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра.
24.Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора.
25.Замкнутость оператора дифференцирования в $C[a,b]$.

26.Теорема о замкнутости оператора, обратного к замкнутому, следствие для непрерывно обратимого оператора.
27.Декартово произведение линейных нормированных пространств (линейные операции, норма и полнота). График линейного оператора.
28.Лемма о графике замкнутого оператора.
29.Теорема о замкнутом операторе, определенном на всем пространстве.
30.Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха (доказательство для сепарабельного вещественного пространства).
31.Три следствия.
32.Лемма о биортогональных системах.
33.Общий вид линейных ограниченных функционалов в пространствах: конечномерном, $l_p\ (1<p<\infty)$, гильбертовом, $L_p[a,b](1<p<\infty)$ (случай $p\neq 2$ без доказательства).
34.Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства.
35.Слабая сходимость элементов в нормированных пространствах (определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела.
36.Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств.
37.Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение).
38.Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества.
39.Теорема о слабой относительной компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства).
40.Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора).
41.Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a,b]$.
42.Теорема о линейности и норме сопряженного оператора.
43.Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
44.Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов.
45.Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство.
46.Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному.
47.Вполне непрерывные операторы и слабая сходимость (две леммы и теорема).
48.Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$.

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и степень сформированности умений и(или) навыков.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Зачёт	
Обучающийся знает основные определения, теоремы. Умеет применять их к практическим заданиям. Обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	*Зачтено*

Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе, не дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	*Не зачтено*
Экзамен	
Обучающийся в полной мере использует фундаментальные знания в области математического анализа, функционального анализа и других дисциплин, способен к определению общих форм и закономерностей отдельной данной предметной области умеет строго доказать утверждения, формулировать результаты, быстро видит следствия полученного результата	*Отлично*
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы	*Хорошо*
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум-трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы, демонстрирует частичные знания,	*Удовлетвори-тельно*
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	*Неудовлетвор ительно*

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук
Знать:
- актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.
Уметь:
- использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.
Владеть:
- навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности
Знать:
- актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.
Уметь:
- использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.
Владеть:
- навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний
Знать:
- актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.
Уметь:
- использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.
Владеть:
- навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

Перечень заданий для оценки сформированности компетенции:

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Установите соответствие между метрическим пространством и метрикой, заданной на нём.

1	$C[a,b]$		**а**	$\rho(x,y) = \max\limits_{1\le k\le n} \lvert x_k - y_k\rvert$
2	$\mathbb{R}_p^n$		**б**	$\rho(x,y) = \max\limits_{a\le t\le b} \lvert x(t) - y(t)\rvert$
3	$l_p\ (1 \le p < \infty)$		**в**	$\rho(x,y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lvert x_k - y_k\rvert^p\right)^{1/p}$
4	$\mathbb{R}_\infty^n$		**г**	$\rho(x,y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert x_k - y_k\rvert^p\right)^{1/p}$

Ответ: 1-б, 2-в, 3-г, 4-а

Решение: задание на знание определения метрик в различных пространствах

2. Установить соответствие между обозначением метрического пространства и его словесным описанием

1	$C[a,b]$		**а**	пространство n-мерных векторов с вещественными координатами
2	$\mathbb{R}_p^n$		**б**	пространство непрерывных на отрезке [a,b] функций
3	$l_p\ (1 \le p < \infty)$		**в**	пространство n-мерных векторов с комплексными координатами
4	$\mathbb{C}_\infty^n$		**г**	пространство числовых последовательностей, суммируемых с p-ой степенью

Ответ: 1-б, 2-а, 3-г, 4-в

Решение: задание на знание обозначений основных пространств в функциональном анализе

3. Установите соответствие между началом и концом определения.

1	Множество называется открытым, если		**а**	его замыкание совпадает со всем пространством.
2	Множество называется ограниченным, если		**б**	существует замкнутый шар, содержащий это множество.
3	Множество называется всюду плотным, если		**в**	оно совпадает со своим замыканием.
4	Множество называется замкнутым, если		**г**	оно совпадает со своей внутренностью.

Ответ: 1-г, 2-б, 3-а, 4-в

Решение: вопрос на знание соответствующих определений.

4. Установите соответствие между пространством со скалярным произведением и скалярным произведением, заданным на нём.

1	$C_2[a,b]$		**а**	$(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$
2	$\mathbb{R}_2^n$		**б**	$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt$

3	l_2		**в**	$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$
4	$\mathbb{C}_2^n$		**г**	$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

Ответ: 1-б, 2-а, 3-г, 4-в

Решение: задание на знание определения скалярного произведения в различных пространствах.

5. Установите соответствие между началом и концом определения.

1	Множество называется относительно компактным, если		**а**	$\forall(\varepsilon > 0)$ для этого множества существует конечная ε –сеть.
2	Множество называется ограниченным, если		**б**	из каждой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
3	Множество называется компактным, если		**в**	существует замкнутый шар, содержащий это множество.
4	Множество называется вполне ограниченным, если		**г**	оно относительно компактно и замкнуто.

Ответ: 1-б, 2-в, 3-г, 4-а.

Решение: вопрос на знание соответствующих определений.

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Как называется нормированное пространство, полное в смысле сходимости по норме?

Ответ: банахово пространство (банахово)

Решение: здесь приведено определение банахова пространства

2. Как называется пространство со скалярным произведением, полное по норме, порождённой скалярным произведением?

Ответ: гильбертово пространство (гильбертово)

Решение: здесь приведено определение гильбертова пространства

3. Вставьте одно слово: «Множество, которое содержит все свои точки прикосновения, называется _________ ».

Ответ: замкнутым (замкнутое)

Решение: здесь приведено определение замкнутого множества

4. Вставьте одно пропущенное слово: «Множество, каждая точка которого является ________, называется открытым».

Ответ: внутренней

Решение: здесь приведено определение открытого множества

5. Вставьте 3 пропущенных слова: «Метрическое пространство называется сепарабельным, если в нём существует _______ _______ _______ множество».

Ответ: счётное всюду плотное (всюду плотное счётное) или, если не использовать «ё»: счетное всюду плотное, всюду плотное счетное

Решение: здесь приведено определение сепарабельного пространства

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).