

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
_ системного анализа и управления
В.Г. Курбатов

Курбатов

31.03.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.12 Алгебра

1. Код и наименование направления подготовки:

01.03.02 Прикладная математика и информатика _____

2. Профиль подготовки: Прикладная математика и компьютерные технологии

3. Квалификация выпускника: бакалавр _____

4. Форма обучения: Очная _____

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: кафедра системного анализа и управления

6. Составители программы: Курбатов В.Г., д.ф.-м.н., проф. ; Гусева Е.Ю.

7. Рекомендована: Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики (Протокол № 6 от 17.03.2025)

8. Учебный год: 2025/2026

Семестр(ы): 1, 2.

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- формирование у студентов глубоких теоретических знаний в области линейной алгебры;
- знакомство с абстрактными моделями общей алгебры и спектральной теории;
- подготовка студентов к применению алгебраических методов в научных исследованиях и прикладной деятельности..

Задачи учебной дисциплины:

- отработать навыки работы с матричным представлением операторов и билинейными и квадратичными функционалами;
- сформировать базовые знания и навыки решения типовых задач по основным разделам алгебры, относящейся к базовым дисциплинам математики;
- улучшение навыков формулирования и доказательства математических утверждений и теорем в контексте алгебры;
- практическое применение алгебраических знаний для решения задач из других разделов математики.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина относится к обязательной части Блока 1.

Требуется знание курса «Аналитической геометрии» и общая математическая культура, приобретенная в школе. Используется практически во всех базовых математических курсах: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Численные методы», «Методы оптимизации», «Уравнения математической физики», «Компьютерная графика» и другие.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Демонстрирует знания, относящиеся к базовым дисциплинам математики, информатики и естественных наук.	Знать: знание основ теории Уметь: умение решать типовые задачи применять методы и идеи алгебры Владеть: навыками применения полученных знаний в учебной и научной деятельности
		ОПК-1.3	Использует современные математические инструментальные средства для решения поставленной задачи, анализирует и интерпретирует результаты.	Знать: знание основ теории Уметь: умение решать типовые задачи применять методы и идеи алгебры Владеть: навыками применения полученных знаний в учебной и научной деятельности

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 8/288.

Форма промежуточной аттестации 2 зачета и экзамен

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			1	2	...
Контактная работа		160	48	112	
в том числе:	лекции	96	32	64	
	практические	64	16	48	
Самостоятельная работа		92	42	50	
Промежуточная аттестация (для экзамена)		36	0	36	
Итого:		288	90	198	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Множества и функции	Понятие множества. Операции над множествами. Определение функции, обратной функции, композиции функций. Отношение эквивалентности.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.2	Числа и многочлены	Аксиомы натуральных чисел. Математическая индукция. Деление целых чисел с остатком. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Определение сравнения. Приведенная система вычетов. Кольцевые свойства. Рациональные числа. Варианты определения комплексных чисел. Декартова, тригонометрическая и экспоненциальная формы. Геометрический смысл операций. Алгебраические и функциональные многочлены. Операции. Деление с остатком и теорема Безу. Разложение на комплексные и действительные множители.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.3	Матрицы. Определители 2-го и 3-го порядка	Определение и терминология, связанные с матрицами. Действия с матрицами. Определения и правила вычисления. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Примеры вычисления. Разложение определителя по строке и столбцу. Определение обратной матрицы. Метод присоединенной матрицы.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.4	Системы линейных уравнений.	Терминология, связанная с системами линейных уравнений. Метод Крамера. Матричная запись системы линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Матричные уравнения. Ступенчатые матрицы. Прямой и обратный ход метода Гаусса в случае невырожденной системы. Модификация метода Гаусса для нахождения обратной матрицы. Критерий несовместности, основанный на методе элементарных преобразований. Базисные и свободные неизвестные. Метод элементарных преобразований для решения неопределенной системы. Модификация метода Гаусса для вычисления определителя матрицы	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.5	Определители	Перестановки. Определение определителя n-го	Алгебра

	произвольного порядка	порядка и его свойства. Блочные матрицы. Разложение по строке (столбцу). Линейная независимость строк (столбцов). Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Метод окаймляющих миноров вычисления ранга. Метод элементарных преобразований вычисления ранга. Теорема Кронекера–Капелли.	(ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.5	Линейные пространства	Определение линейного пространства. Арифметическое линейное пространство. Линейная независимость в линейном пространстве. Базис. Размерность. Подпространства и линейные оболочки. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Фактор-пространство. Преобразование координат вектора при замене базиса.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.7	Линейные операторы	Определение линейного оператора. Действия с линейными операторами. Обратимые линейные операторы. Изоморфизм линейных пространств. Однотипность линейных операторов. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Ранг линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.8	Начала спектральной теории	Определитель оператора. Характеристический многочлен. Операторные уравнения. Собственные значения и собственные векторы. Базис из собственных векторов. Формулировка теоремы Жордана.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.9	Евклидовы пространства	Определение евклидова пространства. Норма в евклидовом пространстве. Ортогональный базис. Ортогонализация Грама–Шмидта. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Метод наименьших квадратов. Ортогональное дополнение. Разложение Шура.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.10	Линейные, билинейные и квадратичные функционалы	Определение линейного функционала. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Определение билинейного функционала. Матрица билинейного функционала. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса. Симметричные билинейные функционалы. Квадратичные функционалы. Метод Лагранжа приведения квадратичного функционала к нормальному виду. Критерий Сильвестра.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
1.11	Алгебраические структуры	Внутренние и внешние законы композиции. Группы, кольца, тела, поля и алгебры. Морфизмы и фактор-структуры. Понятие о категориях.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2. Практические занятия			
2.1	Множества и функции	Понятие множества. Операции над множествами. Определение функции, обратной функции, композиции функций. Отношение эквивалентности.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2.2	Числа и многочлены	Аксиомы натуральных чисел. Математическая индукция. Деление целых чисел с остатком. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Определение	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297

		сравнения. Приведенная система вычетов. Кольцевые свойства. Рациональные числа. Варианты определения комплексных чисел. Декартова, тригонометрическая и экспоненциальная формы. Геометрический смысл операций. Алгебраические и функциональные многочлены. Операции. Деление с остатком и теорема Безу. Разложение на комплексные и действительные множители.	w.php?id=30297
2.3	Матрицы. Определители 2-го и 3-го порядка	Действия с матрицами. Определения и правила вычисления. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Примеры вычисления. Разложение определителя по строке и столбцу. Определение обратной матрицы. Метод присоединенной матрицы.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2.4	Системы линейных уравнений.	Терминология, связанная с системами линейных уравнений. Метод Крамера. Матричная запись системы линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Матричные уравнения. Ступенчатые матрицы. Прямой и обратный ход метода Гаусса в случае невырожденной системы. Модификация метода Гаусса для нахождения обратной матрицы. Критерий несовместности, основанный на методе элементарных преобразований. Базисные и свободные неизвестные. Метод элементарных преобразований для решения неопределенной системы. Модификация метода Гаусса для вычисления определителя матрицы	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2.5	Определители произвольного порядка	Перестановки. Определение определителя n-го порядка и его свойства. Блочные матрицы. Разложение по строке (столбцу). Линейная независимость строк (столбцов). Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Метод окаймляющих миноров вычисления ранга. Метод элементарных преобразований вычисления ранга. Теорема Кронекера–Капелли.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2.6	Линейные пространства	Определение линейного пространства. Арифметическое линейное пространство. Линейная независимость в линейном пространстве. Базис. Размерность. Подпространства и линейные оболочки. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Фактор-пространство. Преобразование координат вектора при замене базиса.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2.7	Линейные операторы	Определение линейного оператора. Действия с линейными операторами. Обратимые линейные операторы. Изоморфизм линейных пространств. Однотипность линейных операторов. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Ранг линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2.8	Начала спектральной теории	Определитель оператора. Характеристический многочлен. Операторные уравнения. Собственные значения и собственные векторы. Базис из собственных векторов. Формулировка теоремы Жордана.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2.9	Евклидовы пространства	Определение евклидова пространства. Нормы в евклидовом пространстве. Ортогональный базис. Ортогонализация Грама–Шмидта. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Метод наименьших квадратов. Ортогональное дополнение. Разложение Шура.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297

2.10	Линейные, билинейные и квадратичные функционалы	Определение линейного функционала. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Определение билинейного функционала. Матрица билинейного функционала. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса. Симметричные билинейные функционалы. Квадратичные функционалы. Метод Лагранжа приведения квадратичного функционала к нормальному виду. Критерий Сильвестра.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
2.11	Алгебраические структуры	Внутренние и внешние законы композиции. Группы, кольца, тела, поля и алгебры. Морфизмы и фактор-структуры. Понятие о категориях.	Алгебра (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Множества и функции	4	2		4	8
2	Числа и многочлены	10	5		6	20
3	Матрицы. Определители 2-го и 3-го порядка	6	3		6	12
4	Системы линейных уравнений	12	6		8	24
5	Определители произвольного порядка	8	6		8	22
6	Линейные пространства	8	6		8	22
7	Линейные операторы	8	6		8	22
8	Начала спектральной теории	8	6		8	22
9	Евклидовы пространства	8	6		8	22
10	Линейные, билинейные и квадратичные функционалы	8	6		8	22
11	Алгебраические структуры	16	12		18	46
12	Подготовка к экзамену	0	0		36	36
	Итого:	96	64		128	288

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Курс предполагает отведение ряда разделов на самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами эти разделы.

Изложение материал по каждой теме предполагает использование ранее введенных определений, обозначений и доказательств. Поэтому необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного на занятиях материала.

Рекомендуется также просмотр материала по данной учебной дисциплине с опережением лекций с использованием рекомендуемой в данной учебной программе литературы.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения необходимо выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Курбатов В.Г. Алгебра : учебное пособие // В.Г. Курбатов – Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2022. – 604 с. – Алгебра (ПМИ)/ В.Г. Курбатов— Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.moodle.ru .
2	Курш, А. Г. Лекции по общей алгебре : учебник для вузов / А. Г. Курш. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 556 с. — ISBN 978-5-8114-6477-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/147341 .
3	Постников, М. М. Линейная алгебра : учебное пособие / М. М. Постников. — 3-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-0890-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167777 .
4	Мальцев, И. А. Линейная алгебра : учебное пособие / И. А. Мальцев. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 384 с. — ISBN 978-5-8114-1011-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167832 .

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Кряквин, В. Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях : учебное пособие / В. Д. Кряквин. — 3-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 592 с. — ISBN 978-5-8114-2090-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/72583
2	Сборник задач по алгебре. Ч. 3. Основные алгебраические структуры / Ю.А. Артамонов, Э.Б. Бахтурин, Е.С. Винберг [и др.] ; Под ред. А.И. Кострикина.— М. : Физматлит, 2007.— Т. 2.— 168 с
3	Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Г. Д. Ким.— 3-е изд.— М. : Московский университет, 1998.— 320 с.
4	Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре / Д. К. Фаддеев.— М. : Лань, 2020.— 416 с.
5	Проскуряков, И. В. Числа и многочлены / И. В. Проскуряков.— Второе изд.— М. : Просвещение, 1965.— 284 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. — Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru
2.	Алгебра (ПМИ) / В.Г. Курбатов— Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297
3.	Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: https://e.lanbook.com/).

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Баскаков, А. Г. Лекции по алгебре / А. Г. Баскаков.— Воронеж : ВГУ, 2017.— 158 с.
2	Алгебра (ПМИ)/ В.Г. Курбатов— Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297 .

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение): лекции и практические занятия (с домашними заданиями), контрольные, зачеты и экзамен.

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс «Алгебра (ПМИ)», размещенный на платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle) <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=30297>, а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.5.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины.

Учебная аудитория для проведения лекций, практических занятий, организации самостоятельной работы, проведения текущих и промежуточных аттестаций:

специализированная мебель, доска (маркерная или меловая) компьютер (ноутбук), мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения), допускается использование переносного оборудования.

Программное обеспечение:

ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Google Chrome, Mozilla Firefox), с возможностью подключения к сети «Интернет» и платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами (MS Office, Мой Офис, Libre Office).

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Все разделы	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.3	<i>Контрольные работы (3 шт.)</i>
Промежуточная аттестация форма контроля – 2 зачета и экзамен				Перечень вопросов приведен ниже.

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Перечень оценочных средств по дисциплине «Алгебра»

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Образцы вариантов контрольных

Контрольная 1

1. Вычислить определитель разложением по строке/столбцу:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Найти матрицу, обратную матрице A , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти матрицу X из матричного уравнения $X \cdot A + X + C = 3B$,

если $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Контрольная 2

1. Проверить, что отображение $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = (x - 2y, 2x - 3z, 2y - x)$, является линейным оператором.
2. Найти матрицу оператора из задания 1.
3. Найти матрицу линейного оператора, отображающего систему векторов a_1, a_2, a_3 в систему векторов b_1, b_2, b_3 , где $a_1 = (0, -4, -1)$, $b_1 = (16, -8, 6)$, $a_2 = (1, -5, -5)$, $b_2 = (21, -22, 15)$, $a_3 = (2, 4, 1)$, $b_3 = (-14, 14, -6)$.
4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 4xy + 6xz - 4yz$.

Контрольная 3

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (3x - 8y, -2x + 3y)$.
2. Найти ядро, образ, ранг и дефект оператора, имеющего матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти все собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Найти Жорданову форму оператора, имеющего матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Требования к выполнению заданий контрольных (шкалы и критерии оценивания)

Оценка «5» (отлично) выставляется, если обучающийся показывает всесторонние и глубокие знания программного материала, знание основной и дополнительной литературы; последовательно и четко отвечает на вопросы билета и дополнительные вопросы; уверенно ориентируется в проблемных ситуациях; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании программного материала; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «4» (хорошо) выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала, основной и дополнительной литературы; дает полные ответы на теоретические вопросы, допуская некоторые неточности; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «3» (удовлетворительно) выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; при ответе на вопросы не допускает грубых ошибок, но испытывает затруднения в последовательности их изложения; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по разделу; не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускает грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на задаваемые преподавателем вопросы или затрудняется с ответом; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по билетам к зачету, собеседование по экзаменационным билетам к экзамену.

Перечень практических навыков к зачету в 1-м семестре

1. Проверка соотношений между множествами.
2. Проверка соотношений, содержащих обратную функцию.
3. Умение проверять свойства отношений эквивалентности.
4. Решение задач на математическую индукцию.
5. Решение задач из теории целых чисел.
6. Умение проверять свойства сравнений.
7. Умение выполнять арифметические операции с комплексными числами, преобразовывать их из одной формы в другую.
8. Разложение многочлена на комплексные и действительные множители.
9. Действия с матрицами.
10. Вычисление определителей.
11. Разложение определителя по строке и столбцу.
12. Определение обратной матрицы. Ее нахождение методом присоединенной матрицы.
13. Метод Крамера.
14. Метод обратной матрицы. Матричные уравнения.
15. Метод Гаусса в случае невырожденной системы.
16. Метод Гаусса для нахождения обратной матрицы. Критерий несовместности, основанный на методе элементарных преобразований.
17. Метод элементарных преобразований решения неопределенной системы.
18. Метод Гаусса для вычисления определителя матрицы.

Образец билета к зачету в 1-м семестре

1. Сформулировать определение отношения эквивалентности.
2. Выполнить деление $(1-i)/(2+3i)$.
3. Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы.
4. Решить систему линейных уравнений.

Перечень практических навыков к зачету во 2-м семестре

1. Вычисление определителей произвольного размера.
2. Проверка линейной зависимости и независимости.
3. Вычисление ранга матрицы.
4. Проверка базисности и разложение по базису.
5. Преобразование координат вектора при замене базиса.
6. Нахождение матрицы линейного оператора. Нахождение ядра и образа.
7. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.
8. Нахождение собственных значений и собственных векторов.
9. Вычисление скалярных произведений в различных пространствах.
10. Разложение по ортогональному базису.
11. Ортогонализация Грама–Шмидта.
12. Построение ортогонального базиса из собственных векторов.
13. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса.
14. Метод Лагранжа приведения квадратичного функционала к нормальному виду.
15. Критерий Сильвестра.
16. Проверка аксиом алгебраических структур.
17. Нахождение ядер и образом морфизмов. Проверка изоморфности.

Образец билета к зачету в 2-м семестре

1. Сформулировать определение ранга матрицы.
2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.
3. Сформулировать определение скалярного произведения.
4. Проверить положительную определенность квадратичного функционала.

Описание технологии проведения зачета

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося. Зачет может выставляться по результатам успешного написания контрольных и активного поведения на занятиях. В общем случае в зависимости от результата контрольных количество заданий на зачете может быть сокращено.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Оценка «зачтено» выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций; выполнил не менее 2/3 всех предложенных заданий и задач или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочетов, при наличии четырех-пяти недочетов; допускает незначительные ошибки при оформлении работы; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине; если число ошибок и недочетов в работе превысило норму для оценки «зачтено» или обучающийся выполнил правильно менее 2/3 всех заданий и задач; допускает грубые ошибки при оформлении работы; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Перечень вопросов к экзамену в 2-м семестре

1. Определение линейного пространства. Примеры. Простейшие свойства линейных пространств.
2. Арифметическое линейное пространство.
3. Линейная независимость в линейном пространстве. Линейная независимость одного, двух и нескольких векторов. Подсистема линейно независимой системы.
4. Полные системы. Базис в линейном пространстве: два определения, их эквивалентность. Определение координат вектора относительно базиса.
5. Размерность. Теорема о базисности максимальных линейно независимых систем и минимальных полных систем.
6. Определение подпространства линейного пространства. Размерность подпространства. Примеры подпространств. Линейная оболочка: два определения и их эквивалентность. Размерность линейной оболочки.
7. Сумма и пересечение подпространств. Правило включений-исключений.
8. Прямая сумма двух подпространств: два определения и их эквивалентность. Примеры прямых сумм. Базис и размерность прямой суммы. Определение прямой суммы нескольких подпространств.
9. Преобразование координат вектора при замене базиса: обратимость матрицы перехода от одного базиса к другому, теорема о переходе от координат вектора в одном базисе к координатам в другом.
10. Нормированные пространства: определение нормы, примеры норм в $\mathbb{K}^n$.
11. Определение линейного оператора. Примеры.
12. Действия с линейными операторами (сумма, умножение на число, произведение; их свойства).
13. Определение обратного к линейному оператору, его линейность. Обратный к произведению двух операторов.
14. Изоморфизм линейных пространств. Сохранение базисности, полноты и размерности. Изоморфизм между конечномерным пространством и арифметическим пространством.
15. Слабое подобие линейных операторов: определение, выполнение аксиом отношения эквивалентности.

16. Матрица линейного оператора (случай оператора, действующего между арифметическими пространствами): теорема о биективном соответствии между матрицами и операторами, сохранение трех алгебраических операций и обратимости.
17. Матрица линейного оператора (случай оператора, действующего между произвольными пространствами): теорема о биективном соответствии между матрицами и операторами, сохранение трех алгебраических операций и обратимости.
18. Представление оператора блочной матрицей. Инвариантность подпространств в терминах блочности матрицы.
19. Ядро и образ линейного оператора: определение, их свойства. Фундаментальная система решений однородного уравнения $\mathcal{A}x = 0$. Базис в образе линейного оператора, заданного матрицей.
20. Теорема Фредгольма о размерностях ядра и образа с леммой о базисе в образе линейного оператора. Необходимое и достаточное условие слабого подобия линейных операторов. Ранг линейного оператора.
21. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Пример (по своему выбору).
22. Фактор-пространство: определение, строение фактор-классов, определение линейных операций.
23. Фактор-оператор. Линейность фактор-проекции j . Теорема о существовании фактор-оператора.
24. Подобие операторов: определение, выполнение аксиом отношения эквивалентности.
25. Определитель оператора: определение, его независимость от выбора базиса.
26. Характеристический многочлен: его степень и старший коэффициент.
27. Операторные уравнения: описание совместности уравнения $\mathcal{A}x = b$ в терминах образа оператора $\mathcal{A}$, завершение доказательства теоремы Крамера, существование нетривиального решения у однородной системы.
28. Собственные значения и собственные векторы (определение). Собственное подпространство. Связь собственных значений с корнями характеристического уравнения. Пример на нахождение собственных векторов (по своему выбору).
29. Базис из собственных векторов: вид матрицы оператора в базисе из собственных векторов. Достаточные условия существования базиса из собственных векторов.
30. Формулировка теоремы Жордана (два варианта, без доказательства). Необходимое и достаточное условие подобия линейных операторов.
31. Определение евклидова пространства. Примеры.
32. Норма в евклидовом пространстве: неравенство Коши–Буняковского, проверка аксиом нормы.
33. Ортогональный базис: определение ортогональности, варианты тождества Пифагора. Линейная независимость ортогональной системы, определение ортонормированного базиса, нахождение коэффициентов разложения по ортогональному базису, нахождение элементов матрицы оператора относительно ортонормированного базиса.
34. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Изоморфизм евклидовых пространств.
35. Ортогонализация Грама–Шмидта: описание алгоритма, его обоснование, пример (по своему выбору). Существование ортонормированного базиса в конечномерном евклидовом пространстве.
36. Метод наименьших квадратов. Тождество наименьших квадратов.
37. Ортогональное дополнение: определение, теорема о разложении в прямую сумму, следствие о представлении ортогональных проекторов.
38. Унитарные матрицы: определение, теорема об эквивалентных определениях. Определение унитарного подобия.
39. Разложение Шура.
40. Определение линейного функционала. Общий вид линейного функционала на $\mathbb{K}^n$ и на произвольном линейном пространстве.
41. Сопряженное пространство. Общий вид линейного функционала на евклидовом пространстве.

42. Эрмитов сопряженный оператор, его существование и единственность. Матрица эрмитова сопряженного оператора. Свойства эрмитова сопряжения. Ядро и образ эрмитова сопряженного оператора.
43. Самосопряженный оператор: определение, симметричность его матрицы.
44. Базис из собственных векторов самосопряженного оператора: действительность собственных значений, ортогональность собственных векторов, существование действительного собственного значения, лемма об инвариантном подпространстве, существование ортонормированного базиса из собственных векторов. Унитарные операторы: определение, связь с унитарными матрицами, эквивалентные определения.
45. Определение билинейного и сопряженно билинейного функционалов. Примеры. Определение суммы и произведения на число.
46. Матрица билинейного функционала: теорема о биективном соответствии между матрицами и функционалами. Пример (по своему выбору). Следствие о знаке определителя матрицы.
47. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса.
48. Симметричные билинейные и сопряженно билинейные функционалы. Описание симметричности в терминах матрицы. Биективное соответствие между функционалами и матрицами. Представление симметричного сопряженно билинейного функционала диагональной матрицей.
49. Квадратичные функционалы: определение, примеры (по своему выбору). Поляра квадратичного функционала. Канонический вид. Индекс. Положительная и отрицательная определенность, знакопеременность. Закон инерции.
50. Метод Лагранжа приведения квадратичного функционала к каноническому виду (на примере по своему выбору).
51. Критерий Сильвестра положительной определенности.
52. Законы композиции (внутренние и внешние). Ассоциативность, коммутативность. Определение нейтрального элемента и противоположного элемента, их единственность. Дистрибутивность. Определение алгебраической структуры, гомологичность, изоморфизм и морфизм алгебраических структур. Отношение эквивалентности, согласованное с алгебраической структурой. Законы композиции в фактор-множестве. Теорема о сохранении свойств при переходе к фактор-множеству.
53. Группы: определение и примеры. Подгруппы, изоморфизмы и морфизмы групп, примеры (по своему выбору), ядро и образ морфизма.
54. Нормальные делители и фактор-группы. Теорема о биективном соответствии между отношениями эквивалентности, согласованными с законом композиции, и нормальными подгруппами (без доказательства), следствие о строении классов эквивалентности.
55. Кольца: определение, примеры (по своему выбору). Определение кольца Ли, два примера. Подкольца, изоморфизмы и морфизмы колец.
56. Идеалы и фактор-кольца. Теорема о биективном соответствии между отношениями эквивалентности, согласованными с законами композиции в кольце, и идеалами (без доказательства).
57. Тела и поля, примеры. Тело кватернионов.
58. Алгебры: определение, примеры. Определение алгебры Ли, два примера. Подалгебры, изоморфизмы и морфизмы алгебр.
59. Идеалы и фактор-алгебры. Теорема о биективном соответствии между отношениями эквивалентности, согласованными с законами композиции в алгебре, и идеалами.
60. Понятие о категориях: определение, примеры. Определение функтора, примеры (по своему выбору).

Образец экзаменационного билета

1. Преобразование матрицы билинейного функционала при замене базиса.
2. Ортогональное дополнение: определение, теорема о разложении в прямую сумму, следствие о представлении ортогональных проекторов.

3. Группы: определение и примеры. Подгруппы, изоморфизмы и морфизмы групп, примеры (по своему выбору), ядро и образ морфизма.

Описание технологии проведения экзамена

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Оценка «отлично» выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, содержащегося в основных и дополнительных рекомендованных литературных источниках, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы, за умение анализировать изучаемые явления в их взаимосвязи и диалектическом развитии, применять теоретические положения при решении практических задач; обучающийся подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «хорошо» выставляется за твердое знание основного (программного) материала, включая расчеты (при необходимости), за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы, за умение применять теоретические положения для решения практических задач; обучающийся демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «удовлетворительно» выставляется за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала, за слабое применение теоретических положений при решении практических задач; обучающийся подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в расчетах, за незнание основных понятий дисциплины; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ в случае перехода на дистанционное обучение

Вопросы с вариантами ответов

1. Что такое множество?

- a) Совокупность элементов, объединённых общей характеристикой.
- b) Произвольная совокупность объектов, обозначенная фигурными скобками.
- c) Количество элементов в объекте.
- d) Множество чисел.

2. Как правильно записать множество, состоящее из чисел 1, 2, 3 и 4?

- a) {1,2,3,4}
- b) [1,2,3,4]
- c) (1,2,3,4)
- d) <1,2,3,4>

3. Что означает понятие "элемент множества"?

- a) Объект или число, входящее в множество.
- b) Объект, который не входит в множество.
- c) Объединение двух множеств.
- d) Пересечение двух множеств.

4. Что такое подмножество?

- a) Множество, все элементы которого принадлежат другому множеству.
- b) Множество с меньшим количеством элементов.
- c) Множество без элементов.
- d) Множество с одинаковыми элементами.

5. Что такое пересечение множеств?

- a) Множество элементов, которые принадлежат одновременно обоим множествам.
- b) Объединение двух множеств.
- c) Множество элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств.
- d) Разность двух множеств.

6. Что такое объединение двух множеств?

- a) Множество всех элементов из обоих множеств без повторений: $A \cup B$.
- b) Множество общих элементов: $A \cap B$.
- c) Множество элементов только из первого множества: $A \setminus B$.
- d) Объединение — это пересечение.

7. Что такое функция?

- a) Правило, которое каждому элементу из множества A ставит в соответствие один элемент из множества B .
- b) Множество элементов, связанных между собой.
- c) Процесс преобразования чисел.
- d) Совокупность чисел.

8. Какие свойства обязательно должна иметь функция?

- a) Каждому элементу из области определения ставится в соответствие ровно один элемент из области значения.
- b) Каждый элемент области определения связан с несколькими элементами области значения.
- c) Область определения и область значения совпадают.
- d) Функция обязательно является отображением.

9. Что такое область определения функции?

- a) Множество всех возможных входных значений функции.
- b) Множество всех возможных выходных значений функции.
- c) Множество всех элементов, на которые функция отображает.
- d) Множество всех элементов, связанных с функцией.

10. Что такое график функции?

- a) Геометрическое изображение множества точек (x, y) , где $y = f(x)$.
- b) Таблица значений функции для различных аргументов.
- c) Совокупность всех пар (x, y) , где y — значение функции при аргументе x .
- d) Все вышеперечисленные.

11. Что означает "инъективная" функция?

- a) Каждому элементу области определения соответствует уникальный элемент области значения, и разные элементы области определения имеют разные изображения (нет двух разных аргументов с одинаковым значением).
- b) Каждый элемент области значения имеет хотя бы один образ в области определения.
- c) Каждый элемент области определения может иметь несколько образов в области значения.
- d) Функция не имеет обратной.

12. Что такое отношение эквивалентности?

- a) Отношение, которое обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности.
- b) Отношение, при котором каждый элемент связан только с самим собой.
- c) Отношение, которое обязательно является отношением равенства.
- d) Отношение, при котором элементы связаны только в одну сторону.

13. Что такое класс эквивалентности элемента a ?

- a) Множество всех элементов, которые связаны с a по отношению эквивалентности.
- b) Множество всех элементов, которые не связаны с a .
- c) Множество всех элементов, равных a .
- d) Множество всех элементов, которые не связаны с a .

14. Какие свойства классов эквивалентности верны? (выберите все подходящие варианты):

- a) Классы эквивалентности не пересекаются или совпадают.
- b) Объединение двух классов эквивалентности — это тоже класс эквивалентности или пустое множество.
- c) Каждый элемент принадлежит ровно одному классу эквивалентности.
- d) Классы могут пересекаться.

15. Что означает "разбиение множества на классы эквивалентности"?

- a) Множество разбивается на непересекающиеся подмножества, каждое из которых является классом эквивалентности.
- b) Множество делится на два равных по размеру подмножества.
- c) Множество разбивается на произвольные подмножества без условий.
- d) Множество делится на подмножества по определенному правилу, не связанному с отношением.

16. Что означает, что число a делится на число b ?

- a) Число a делится на b , если существует целое число k , такое что $a=bk$.
- b) Число a делится на b , если остаток при делении равен нулю.
- c) Число a делится на b , если $a \bmod b = 0$.
- d) Все вышеперечисленные утверждения верны.

17. Что такое простое число?

- a) Натуральное число больше 1, которое делится только на 1 и само на себя.

- b) Натуральное число, которое делится на все числа меньше его.
- c) Натуральное число, которое делится только на 1 и 0.
- d) Любое натуральное число.

18. Что такое НОД (наибольший общий делитель)?

- a) Наибольшее натуральное число, которое делит два или более чисел без остатка.
- b) Наименьшее натуральное число, которое является общим делителем двух чисел.
- c) Любое общее кратное двух чисел.
- d) Наибольшее общее кратное двух чисел.

19. Как называется алгоритм нахождения НОД двух чисел?

- a) Алгоритм Евклида.
- b) Алгоритм Гаусса.
- c) Алгоритм Делоне.
- d) Алгоритм Лагранжа.

20. Что такое система линейных уравнений?

- a) Набор нескольких уравнений, каждое из которых является линейным относительно переменных.
- b) Уравнение, содержащее только одну переменную.
- c) Набор нелинейных уравнений.
- d) Уравнение, содержащее только константы.

21. Что означает термин "совместная система уравнений"?

- a) Такая система, для которой существует хотя бы одно решение.
- b) Такая система, которая не имеет решений.
- c) Такая система, в которой все уравнения одинаковы.
- d) Такая система, в которой переменных много.

22. Что такое решение системы линейных уравнений?

- a) Набор значений переменных, при которых все уравнения системы выполняются одновременно.
- b) Любое набор чисел, независимо от уравнений.
- c) Единственное решение для любой системы.
- d) Решение, которое не обязательно удовлетворяет системе.

23. Какие виды решений могут иметь системы линейных уравнений?

- a) Единственное решение, бесконечное множество решений или решений нет вовсе (несовместная).
- b) Только одно решение или бесконечное множество решений.
- c) Только решения с целыми числами.
- d) Только решения с рациональными числами.

24. Как называется метод решения систем линейных уравнений с помощью преобразований матриц?

- a) Метод Гаусса (или метод исключения Гаусса).

- b) Метод подбора случайных чисел.
- c) Метод деления и умножения на числа без преобразований матриц.
- d) Метод дифференцирования.

25. Что такое ранг матрицы системы?

- a) Максимальное число линейно независимых строк (или столбцов) матрицы системы.
- b) Количество переменных в системе.
- c) Количество решений системы.
- d) Количество уравнений в системе.

26. Что такое однородная система линейных уравнений?

- a) Система вида $Ax=0$, где 0 — нулевой вектор; всегда имеет хотя бы тривиальное решение $x=0$.
- b) Система с одним решением и всеми свободными переменными равными нулю.
- c) Система без свободных переменных и единственным решением является нулевой вектор только при определённых условиях.
- d) Система, содержащая только нелинейные уравнения.

27. Что такое линейное пространство (векторное пространство)?

- a) Множество точек на плоскости.
- b) Множество векторов, для которых определены операции сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие определённым аксиомам.
- c) Множество чисел, где определена только операция сложения.
- d) Множество функций, не допускающих операций.

2. Какие из следующих условий обязательно выполняются в линейном пространстве?

- a) Коммутативность сложения и умножения на скаляр.
- b) Наличие нулевого вектора и противоположных векторов.
- c) Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов и скаляров.
- d) Все вышеперечисленное.

28. Что такое базис линейного пространства?

- a) Минимальный набор векторов, порождающих всё пространство.
- b) Максимальный набор линейно независимых векторов.
- c) Набор векторов, которые лежат внутри другого пространства.
- d) Вектор, который можно представить как сумму всех остальных.

29. Что означает термин "линейная зависимость"?

- a) Векторы не могут быть выражены через другие векторы этого набора.
- b) Вектор можно выразить как линейную комбинацию других векторов набора.
- c) Вектор является нулевым.
- d) Вектор не принадлежит пространству.

30. Какие из следующих утверждений верны для любого базиса?

- a) Все его векторы являются линейно зависимыми.
- b) Количество векторов равно размерности пространства.
- c) Он содержит только один вектор.
- d) Он обязательно состоит из нулевых векторов.

31. Что такое размерность линейного пространства?

- a) Количество элементов множества пространства.
- b) Максимальное число линейно независимых векторов, порождающих пространство.
- c) Количество всех возможных базисов этого пространства.
- d) Длина самого длинного вектора.

32. Что такое линейный оператор?

- a) Функция, отображающая вектор в число.
- b) Отображение между двумя векторными пространствами, сохраняющее операции сложения и умножения на скаляр.
- c) Произведение двух векторов.
- d) Вектор, который преобразуется в нулевой при применении оператора.

33. Что такое ядро линейного оператора?

- a) Множество всех векторов, которые отображаются в нулевой вектор.
- b) Множество всех образов векторов под действием оператора.
- c) Образ отображения.
- d) Множество всех собственных значений.

34. Что такое образ линейного оператора?

- a) Множество всех векторов, которые можно получить как результат применения оператора к некоторому вектору.
- b) Множество всех собственных векторов.
- c) Множество всех нулевых векторов.
- d) Множество всех базисных векторов.

35. Как называется матрица линейного оператора относительно заданных базисов?

- a) Матрица перехода.
- b) Матрица представления оператора.
- c) Диагональная матрица.
- d) Обратная матрица.

36. Что такое собственное значение и собственный вектор линейного оператора?

- a) Вектор, который не изменяется при применении оператора, и число, которое его масштабирует при этом.
- b) Вектор, который отображается в нулевой при применении оператора.
- c) Число, которое равно длине вектора после применения оператора.
- d) Вектор, лежащий внутри ядра оператора.

37. Что такое диагонализуемый оператор?

- a) Оператор, представимый диагональной матрицей относительно некоторого базиса.
- b) Оператор с нулевым ядром.
- c) Оператор, у которого все собственные значения равны 1.
- d) Оператор, который не имеет собственных значений.

38. Верно ли утверждение: "Для любого конечномерного пространства существует базис, при котором матрица линейного оператора будет диагональной"?

- a) Да, если оператор диагонализуем.
- b) Нет, только если оператор является нильпотентным.
- c) Нет, это возможно только для комплексных пространств.
- d) Нет, это всегда неверно.

39. Что такое евклидово пространство?

- a) Векторное пространство со скалярным произведением.
- b) Множество всех чисел.
- c) Пространство, в котором определена только операция сложения.
- d) Множество точек на плоскости без дополнительной структуры.

40. Какие свойства выполняются для нормы в евклидовом пространстве?

- a) Неотрицательность, однородность и неравенство треугольника.
- b) Линейность и симметричность.
- c) Только неотрицательность.
- d) Только однородность.

41. Что такое ортогональные векторы?

- a) Векторы, для которых их скалярное произведение равно нулю.
- b) Векторы, равные друг другу.
- c) Векторы, лежащие на одной прямой.
- d) Векторы с одинаковой длиной.

42. Что означает термин "ортогональный базис"?

- a) Базис, состоящий из взаимно ортогональных векторов, каждый из которых нормирован (имеет длину 1) — ортонормированный базис.
- b) Базис, где все векторы параллельны друг другу.
- c) Базис, состоящий только из нулевых векторов.
- d) Базис, где сумма всех векторов равна нулю.

43. Как называется теорема о разложении произвольного вектора относительно ортогонального базиса?

- a) Теорема о разложении по ортогональному базису или теорема о координатах в ортогональном базисе.
- b) Теорема Пифагора для произвольных пространств.
- c) Теорема о существовании единственного базиса.
- d) Теорема о равенстве всех длин.

44. Что означает термин "ортонормированный базис"?

- a) Базис из взаимно ортогональных единичных векторов.
- b) Базис из любых произвольных векторов без условий.
- c) Базис, где все векторы параллельны друг другу.
- d) Базис только из нулевых векторов.

45. Что такое линейный функционал?

- a) Отображение из векторного пространства в поле, сохраняющее операции сложения и умножения на скаляр.
- b) Отображение из поля в векторное пространство.
- c) Отображение двух векторов в число, не обязательно линейное.
- d) Произведение двух векторов.

46. Какие свойства характерны для симметричной квадратичной формы Q ?

- a) $Q(u,v)=Q(v,u)$.
- b) $Q(u,v)=-Q(v,u)$.
- c) Она равна нулю для всех векторов.
- d) Она не зависит от выбора базиса.

47. Как связаны между собой билинейная и квадратичная формы?

- a) Каждая квадратичная форма задаётся через некоторую симметричную билинейную форму как $Q(v)=B(v,v)$.
- b) Они никак не связаны.
- c) Билинейная форма — это производная квадратичной формы.
- d) Квадратичная форма — это сумма двух билинейных форм.

48. Что такое группа?

- a) Множество элементов с операцией, которая ассоциативна, содержит нейтральный элемент и для каждого элемента существует обратный.
- b) Множество элементов, на котором определена только операция сложения.
- c) Множество, в котором все элементы коммутируют.
- d) Множество с операцией, которая не обязательно ассоциативна.

49. Какие свойства обязательно выполняются в группе?

- a) Ассоциативность операции, существование нейтрального элемента и обратных элементов для каждого элемента.
- b) Коммутативность операции и существование нейтрального элемента.
- c) Наличие единичного элемента и нулевого элемента.
- d) Только существование обратных элементов.

50. Что такое абелева (коммутативная) группа?

- a) Группа, в которой операция коммутативна: $a*b=b*a$ для всех a, b .
- b) Группа, в которой все элементы имеют порядок 2.
- c) Группа, в которой существует только один элемент.
- d) Группа, у которой операция не ассоциативна.

51. Что такое подгруппа?

- a) Множество внутри группы, которое само является группой относительно той же операции.
- b) Множество элементов, которые не образуют группу.
- c) Любое подмножество множества элементов группы.
- d) Множество элементов, у которых порядок равен 1.

52. Верно ли утверждение: "Все группы являются абелевыми"?

- a) Нет, существуют некоммутативные группы (например, группа матриц).
- b) Да, все группы коммутируют по определению.
- c) Нет, потому что только конечные группы могут быть некоммутативными.
- d) Да, если они конечные.

53. Что такое кольцо?

- a) Множество с двумя операциями — сложением и умножением, где сложение образует абелеву группу, а умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения.
- b) Множество с операцией только сложения, которая коммутативна.
- c) Множество, в котором определена только операция умножения.
- d) Множество с операциями сложения и умножения, где умножение обязательно коммутативно.

54. Какие свойства обязательно выполняются в кольце?

- a) Сложение образует абелеву группу, умножение ассоциативно, и умножение дистрибутивно относительно сложения.
- b) Умножение коммутативно и существует нейтральный элемент для умножения.
- c) В кольце обязательно есть единичный элемент для умножения.
- d) В кольце все элементы обратимы относительно умножения.

55. Что такое коммутативное кольцо?

- a) Кольцо, в котором произведение любых двух элементов коммутативно: $ab=ba$.
- b) Кольцо, в котором существует единичный элемент для умножения.
- c) Кольцо без нулевого делителя.
- d) Кольцо, в котором все элементы обратимы.

56. Что такое единичное (единичное) кольцо?

- a) Кольцо, в котором существует нейтральный элемент для умножения 1, такой что $1a=a1=a$.
- b) Кольцо без нулевого делителя.
- c) Кольцо, в котором все элементы обратимы относительно умножения.
- d) Кольцо, в котором сложение не обязательно образует группу.

57. Что такое идеал в кольце?

- а) Подмножество кольца, которое является подгруппой относительно сложения и замкнуто относительно умножения на любые элементы кольца с обеих сторон (левый или правый идеал).
- б) Любое подмножество кольца без дополнительных условий.
- с) Множество элементов, которые обратимы относительно умножения.
- д) Единственное подмножество — нулевое множество.

58. В чем отличие поля от кольца?

- а) В поле у каждого ненулевого элемента есть обратный по умножению; в кольце — нет обязательного обратного для всех элементов кроме нуля или единицы (зависит от типа кольца).
- б) В поле отсутствует операция умножения; в кольце — есть умножение.
- с) В поле все элементы взаимнооднозначно связаны; в кольце — нет таких связей.
- д) Нет отличий; это одно и то же.

59. Какие свойства характерны для кольца? (выберите все подходящие):

- а) Ассоциативность сложения и умножения.
- б) Наличие нулевого элемента для сложения и умножения (если есть).
- с) Дистрибутивность умножения относительно сложения: $a*(b+c)=a*b+a*c$.
- д) Обратные элементы для умножения.

60. Какие основные компоненты входят в определение алгебраической структуры?

- а) Множество и операции, определённые на нём.
- б) Только множество элементов.
- с) Только операции над элементами множества.
- д) Множество и его подмножества.

Вопросы с кратким текстовым ответом

1. Как называют множество векторов, которое линейный оператор переводит в ноль?

Ответ: Ядро

Описание технологии проведения:

В исключительных случаях (переход на удаленный режим занятий и т.п.) текущая аттестация может проводиться в виде теста.

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 30 минут

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется бальная шкала:

- 1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности) :
 - 1 балл — указан верный ответ;
 - 0 баллов — указан неверный ответ (полностью или частично неверный).
- 2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень)
 - 2 балла — указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ в случае чрезвычайных ситуаций, связанных с переходом на удаленное обучение.